MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

46. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

4328

Inhalt des sechsundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Die singulären Lösungen der partiellen Differentialgleichungen mit 3 Variabeln.

Von

Eduard v. Weber in München.

Die Umhüllungsfläche einer zweigliedrigen Flächenschaar des gewöhnlichen Raums stellt bekanntlich eine singuläre Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung dar, welche jenes System von ∞^2 Flächen zum vollständigen Integrale hat. Indem wir nun fragen, welche Gestalt die damit bezeichnete Theorie im Falle höherer partieller Differentialgleichungen annimmt, ergiebt sich das folgende Problem, welches den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet: *Es sei ein vollständiges Integral einer partiellen Differentialgleichung n. O. gegeben; welcher, auf dasselbe anzuwendende Process ist als Verallgemeinerung desjenigen zu betrachten, der im Falle $n = 1$ zu der singulären Lösung der zugehörigen Gleichung I. O. führt?*

Unsere Behandlung dieser beiden Aufgaben stützt sich im Wesentlichen auf den Lie'schen Begriff des *Flächenelements*. Nachdem wir in dem vorbereitenden § 1 die Entwickelungen durchgeführt, die zur Verwerthung jener Begriffe für partielle Differentialgleichungen nöthig sind, geben wir in § 2 zunächst im Anschluss an die von Herrn Darboux*) erhaltenen Resultate, doch in theilweise neuer Form, einen Ueberblick über die Hauptsätze aus der Theorie der sing. Lösung einer Gleichung I. O. Beim Fortgang zu den Gleichungen höherer O. (§ 3—5) zeigt es sich dann, dass in dieser Theorie dem Begriff des Flächenelements eine fundamentale Rolle zufällt: die Analogie zwischen den Fällen $n = 1$ und $n > 1$ lässt sich nämlich nur dann aufrecht erhalten, wenn wir nicht nach singulären Lösungen, sondern nach singulären Elementenschaaren fragen.

*) Solutions Singulières etc. Savants Étrangers XXVII 1883.

I. Theil.

Vollständige und allgemeinere Lösungen.

§ 1.

Die Charakteristiken des vollständigen Integrals.

1. In der vorliegenden Abhandlung werden die nachstehenden Abkürzungen gebraucht.

Sind xyz rechtwinkelige Coordinaten, und z eine Function von x und y, so setzen wir

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i} \partial y^i};$$

doch benutzen wir statt $\alpha_0^{(0)} \ldots \alpha_3^{(3)}$ wie üblich die Bezeichnungen $z, p, q, r, s, t, u, v, w, \varpi$ bez.

Bedeutet ferner

$$F^{(n)}(xyzp \ldots \alpha_n^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

eine partielle Differentialgleichung n. Ordnung, so schreiben wir

$$A_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \alpha_i^{(k)}}, \quad X = \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} \text{ etc.}$$

Wir bezeichnen endlich mit $(f)_i^k$ das Resultat, das erhalten wird, wenn man eine Function f von xyz $k-i$ mal nach x und i mal nach y unter der Annahme differentirt, dass z eine Function von x und y sei. So ist

$$(f)_0^0 = f, \ldots (f)_2^2 = f_{yy} + 2qf_{yz} + q^2 f_{zz} + tf_z \text{ etc.}$$

2. Wir setzen $\tau_n = \frac{n(n+3)}{1.2}$ und denken uns ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung n. O. (1) in der Form

$$V(xyza_1 a_2 \ldots a_{\tau_n}) = 0 \tag{2}$$

gegeben, unter den a_i τ_n wesentliche Parameter verstanden. Dabei machen wir natürlich die Annahme, dass diese Gleichung innerhalb eines endlichen Werthgebiets der a_i analytische Flächen darstelle. Die Gleichung (1) wird aus (2) erhalten, indem wir die a_i aus (2) und den τ_n Gleichungen

$$(V)_i^k = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots k; \; k = 1, 2 \ldots n) \tag{3}$$

eliminiren. Die Möglichkeit dieser Elimination sowie das Auftreten einer einzigen resultirenden Gleichung (1) nehmen wir unter die Voraussetzungen über die Flächenschaar (2) auf.

3. Die Gleichungen

$$(V)_i^{n+1} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n+1) \tag{4}$$

bestimmen zusammen mit (2), (3) zu jedem Werthsystem der $x \ldots \alpha_n^{(n)}$, das (1) befriedigt, ein einziges System der Grössen $\alpha_i^{(n+1)}, \ldots \alpha_{n+1}^{(n+1)}$, welches wir uns somit in der Function jener Variabelen ausgedrückt denken können. Die Functionen $\alpha_i^{(n+1)}$ befriedigen identisch die durch Differentiation von (1) erhaltenen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &M + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \alpha_i^{(n+1)} = 0, \\ &N + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \alpha_{i+1}^{(n+1)} = 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

worin zur Abkürzung

$$M = X + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} \alpha_i^{(k+1)},$$

$$N = Y + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} \alpha_{i+1}^{(k+1)}$$

gesetzt ist.

4. Haben die $\alpha_i^{(n+1)}$ die in der vor. Nr. angegebene Bedeutung, so ist das Pfaff'sche System

$$d\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy \tag{6}$$
$$(i = 0, 1 \ldots k; \;\; k = 0, 1 \ldots n),$$

worin die $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ durch die Bedingung (1) aneinander gebunden sind, unbeschränkt integrabel; (2) stellt eben das Integral des Systems dar. Die Thatsache der Integrabilität drückt sich andererseits durch das identische Bestehen der Bedingungen:

$$D_x(\alpha_{k+1}^{(n+1)}) - D_y(\alpha_k^{(n+1)}) = 0 \tag{7}$$
$$(k = 0, 1 \ldots n)$$

aus, wobei die Symbole:

$$D_x(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(k)}},$$

$$D_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i+1}^{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(k)}}$$

gebraucht sind.

Aber auch das Umgekehrte ist richtig: Jedes in einem endlichen Werthebereich der Variabelen $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ holomorphe Functionensystem

$\alpha_0^{(n+1)} \dots \alpha_{n+1}^{(n+1)}$, das die Relationen (5), (7) identisch befriedigt, macht, in (6) substituirt, dieses Pfaff'sche System unbeschränkt integrabel, und die Integration des letzteren liefert unter Berücksichtigung der Bedingung (1) ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (1); zugleich erkennt man, dass *jedes* vollständige Integral von (1) in dieser Weise erhalten wird.

Wir bemerken noch, dass jede unter den Gleichungen (7) als eine Folge der n übrigen und der Relationen (5) erscheint; substituirt man also für 2 der $n+2$ Functionen $\alpha_i^{(n+1)}$ ihre Werthe aus (5) in (7), so ersieht man, dass die Bestimmung eines vollst. Integrals von (1) auf die Ermittelung einer particulären Lösung eines Systems von n linearen partiellen Differentialgleichungen 1. O. mit n unbekannten Functionen hinauskommt.

5. Indem wir den Begriff des Flächenelements n. O. in diese Betrachtung einführen, können wir das durch (6) gegebene Integrationsproblem so aussprechen: Jedem Elemente $E^{(n)}(x \dots \alpha_n^{(n)})$, das (1) genügt, soll ein Element $E^{(n+1)}(x \dots \alpha_n^{(n)}, \alpha_0^{(n+1)} \dots \alpha_{n+1}^{(n+1)})$ so zugeordnet werden, dass sich die so erhaltenen $\infty^{\frac{1}{2} n \overline{n+3}+2}$ Elemente $n+1$. O. zu $\infty^{\frac{1}{2} n \overline{n+3}}$ Flächen zusammenordnen lassen. Ist nun $E^{(n)}(x \dots \alpha^{(n)})$ ein Element von (1), so giebt es ∞^1 benachbarte Elemente $x + \delta x \dots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)}$, welche mit ihm vereinigt liegen, d. h. den Relationen:

$$\delta \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta y$$
$$(i = 0, 1 \dots k; \quad k = 0, n-1)$$

genügen und zugleich auf dem Element $n+1$. O. gelegen sind, das dem $E^{(n)}$ zugeordnet ist, also die Gleichungen

$$\delta \alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)} \delta y$$
$$(i = 0, 1 \dots n)$$

befriedigen. Die Relationen (5) enthalten dann die Forderung, *dass diese ∞^1 Elemente gleichfalls der Differentialgleichung genügen.*

Erinnern wir nun daran*), dass 2 vereinigt liegende Flächenelemente n. O.

$$E^{(n+1)}(x \dots \alpha_{n+1}^{(n+1)}) \quad \text{und} \quad \overline{E}^{(n+1)}(x + \delta x \dots \alpha_{n+1}^{(n+1)} + \delta \alpha_{n+1}^{(n+1)})$$

zusammen ein n-Tripel von Schnittrichtungen bestimmen, das durch die Gleichung

*) Vgl. meine Arbeit: Theorie der Flächenelemente des Raumes von 3 Dimensionen (diese Annalen Bd. 44, pag. 458 ff.).

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \delta \alpha_i^{(n+1)} dx^{n+1-i} dy^i = 0 \tag{8}$$

gegeben ist. Jedem der oben betrachteten ∞^1 Elemente n. O., die auf $(x \ldots \alpha_{n+1}^{(n+1)})$ gelegen sind, und mit $(x \ldots \alpha_n^{(n)})$ vereinigt liegen, entspricht ein Element $n+1$. O., für das man hat:

$$\delta \alpha_i^{(n+1)} = D_x(\alpha_i^{(n+1)})\,\delta x + D_y(\alpha_i^{(n+1)})\,\delta y$$
$$(i = 0, 1 \ldots n+1).$$

Die Gleichung (8) stellt dann zwischen der Fortschreitungsrichtung $\delta x : \delta y$ und den Schnittrichtungen $dx : dy$ eine Correspondenz $(n, 1)$ her, und die Bedingungen (7) enthalten offenbar die Forderung, dass diese Correspondenz eine Polarbeziehung sei, d. h. dass die Gleichung (8) mit der ersten Polare der Richtung $\delta x : \delta y$ in Bezug auf eine binäre Form $n+1$. O. identificirt werden könne. Diese Auffassungsweise wird uns später von Nutzen sein.

6. Um die Ideen zu fixiren, setzen wir $n = 2$, also $r_n = 5$. Die zu dem Integral

$$V(xyz a_1 a_2 \ldots a_5) = 0 \tag{2a}$$

gehörige partielle Differentialgleichung $F^{(2)}(x \ldots t) = 0$ wird durch Elimination der a_i aus den Gleichungen (2a) und:

$$V_x + pV_z = 0, \quad V_y + qV_z = 0, \tag{9}$$

$$V_{xx} + \cdots + rV_z = 0, \quad V_{xy} + \cdots = 0, \quad V_{yy} + \cdots + tV_z = 0 \tag{10}$$

erhalten. Es giebt dann ∞^4 Flächen unserer Schaar, die durch einen beliebigen Punkt xyz einer bestimmten Fläche (2a) mit den Parametern $a_1 \ldots a_5$ hindurchgehen, und insbesondere ∞^3 zur letzteren benachbarte; die Parameter $a_i + da_i$ derselben erfüllen die Relation

$$\sum V_{a_i} da_i = 0. \tag{11}$$

Des Weiteren giebt es ∞^2 Flächen, welche ein Element 1. O. $(xyzpq)$ der Fläche (2a) enthalten, darunter ∞^1 benachbarte; für sie hat man:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum (V_{a_i x} + pV_{a_i z})\, da_i = 0, \\ &\sum (V_{a_i y} + qV_{a_i z})\, da_i = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

worin p und q aus (9) zu entnehmen sind.

Bezeichnen wir mit δ die Variation einer auf (2a) bezüglichen Grösse beim Uebergang zu einer benachbarten Fläche, so folgt:

$$(13)\begin{cases}\sum (V_{a_i xx} + 2pV_{a_i xz} + p^2 V_{a_i zz} + rV_{a_i z})\, da_i + V_z \delta r = 0,\\ \sum (V_{a_i xy} + \cdots \qquad\qquad + s\, V_{a_i z})\, da_i + V_z \delta s = 0,\\ \sum (V_{a_i yy} + \cdots \qquad\qquad + t V_{a_i z})\, da_i + V_z \delta t = 0.\end{cases}$$

Die Elimination der da_i aus (11), (12), (13) führt auf eine lineare Relation zwischen den δr, δs, δt, die mit

$$(14) \qquad R\delta r + S\delta s + T\delta t = 0$$

äquivalent ist, wo R für $\frac{\partial F^{(2)}}{\partial r}$ u. s. w. gesetzt ist.

7. Verlangen wir *stationäre* Berührung zwischen den benachbarten Flächen, so hat man

$$\delta r = y'^2 \delta t, \qquad \delta s = - y' \delta t,$$

wenn y' die Tangentenrichtung der stationären Berührung festlegt; die Elimination von δt, $da_1 \ldots da_5$ aus (11), (12), (13) führt dann auf die folgende Gleichung für y':

$$(15) \quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & V_{a_1} & V_{a_2} \cdots V_{a_5} \\ 0 & V_{a_1 x} + pV_{a_1 z} & \cdots\cdots \\ 0 & V_{a_1 y} + qV_{a_1 z} & \cdots\cdots \\ y'^2 & V_{a_1 xx} + 2pV_{a_1 xz} + p^2 V_{a_1 zz} + rV_{a_1 z} & \cdots\cdots \\ -y' & V_{a_1 xy} + qV_{a_1 xz} + \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & V_{a_1 yy} + \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Es giebt also 2 benachbarte Flächen, welche die ursprüngliche Fläche im Punkte xyz stationär berühren; die zugehörigen Richtungen y', welche als Tangentenrichtungen der Schnittcurve unserer Fläche mit je einer der beiden benachbarten doppelt zählen, sind durch (15) oder auch durch

$$Ry'^2 - Sy' + T = 0$$

gegeben und haben daher eine von der Wahl des vollständigen Integrals ganz unabhängige Bedeutung, die wir sogleich für partielle Differentialgleichungen n. O. aussprechen wollen.

8. Wir schicken voraus, dass 2 Elemente n. O.

$$x \ldots \alpha_{n-1}^{n-1}\, \alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_n^{(n)} \quad \text{und} \quad x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}\, \bar\alpha_0^{(n)} \ldots \bar\alpha_n^{(n)}$$

die 2 zwei aufeinanderfolgende Elemente $n - 1$. O. gemein haben, ein Schnitt-n-tupel

$$\sum \binom{n}{i} (\alpha_i^{(n)} - \bar\alpha_i^{(n)})\, dx^{n-i}\, dy^i = 0$$

bestimmen, das eine vollständige n^{te} Potenz ist, und umgekehrt. In der That zieht jedes der beiden Gleichungssysteme

$$d\alpha_k^{(n-1)} = \alpha_k^{(n)} dx + \alpha_{k+1}^{(n)} dy = \bar{\alpha}_k^{(n)} dx + \bar{\alpha}_{k+1}^{(n)} dy$$
$$(k = 0,\ 1 \ldots n-1)$$

und

$$(\alpha_{i-1}^{(n)} - \bar{\alpha}_{i-1}^{(n)})(\alpha_{i+1}^{(n)} - \bar{\alpha}_{i+1}^{(n)}) - (\alpha_i^{(n)} - \bar{\alpha}_i^{(n)})^2 = 0$$
$$(i = 1,\ 2 \ldots n-1)$$

das andere nach sich. Wir sagen in diesem Falle: die beiden Flächenelemente n. O. gehen miteinander eine *stationäre Berührung* ein.

Der in Aussicht genommene Satz lautet dann so:

„*Jedes Element $E^{(n)}$ der Gleichung $F^{(n)} = 0$ geht mit n benachbarten Elementen derselben Gleichung eine stationäre Berührung ein. Die Richtungen der stat. Berührung heissen charakteristische Richtungen und sind gegeben durch*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i A_i^{(n)} y'^{\,n-i} = 0. \tag{16}$$

Beiläufig sei bemerkt, dass die Schnitt-n-tupel, die auf $E^{(n)}$ durch alle benachbarten Elemente

$$x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)},\ \alpha_0^{(n)} + \delta\alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_n^{(n)} + \delta\alpha_n^{(n)}$$

bestimmt werden, wegen

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \delta\alpha_i^{(n)} = 0$$

zu den charakteristischen Richtungen *apolar* sind.

9. Ein etwas anderer Weg, Gleichung (16) zu erhalten, ist folgender: Irgend 2 vereinigt liegenden Elementen $n-1$. O. ordnet die Gleichung $F^{(n)} = 0$ eine endliche Anzahl von Elementen n. O. zu, auf denen sie beide gelegen sind. Verlangt man nun, dass zwei dieser $E^{(n)}$ unendlich benachbart seien, d. h. substituirt man in $F^{(n)} = 0$ für die $\alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_{n-1}^{(n)}$ ihre aus

$$d\alpha_i^{(n-1)} = \alpha_i^{(n)} dx + \alpha_{i+1}^{(n)} dy \tag{17}$$
$$(i = 0,\ 1 \ldots n-1)$$

entnommenen Werthe und differentiirt das Resultat nach der Variabelen $\alpha_n^{(n)}$, so ergiebt sich (16). Eliminirt man aus $F^{(n)} = 0$ sowie aus (16) und (17) die Grössen $\alpha_i^{(n)}$, so kommt eine Relation der Form:

$$\Phi\left(x \cdots \alpha_{n-1}^{(n-1)},\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d\alpha_0^{(n-1)}}{dx},\ \ldots\ \frac{d\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{dx}\right) = 0. \tag{18}$$

Es existiren also zu jedem Elemente $E^{(n-1)}$ des Raumes ∞^n benachbarte mit ihm vereinigt liegende Elemente n — 1. O., deren jedes mit $E^{(n-1)}$ zusammen 2 unendlich benachbarte $E^{(n)}$ der Differentialgleichung bestimmt; die letzteren haben jene beiden benachbarten Elemente n — 1. O. gemein, berühren sich also stationär, was mit dem Vorigen übereinstimmt.

10. Eine dritte Art der Ableitung ergiebt sich endlich durch die Frage nach Streifen n. O. $C^{(n)}$ von der Beschaffenheit, dass alle ∞^1 Elemente $E^{(n+1)}$, die 2 benachbarte Elemente $E^{(n)}$ von $C^{(n)}$ enthalten, der vorgelegten Gleichung, i. e. den Bedingungen (3) § 1 Genüge leisten. Man erhält solcherweise*) als „*Definitionsgleichungen der charakteristischen Streifen* $C^{(n)}$ *des* r-*Systems*" die folgenden:

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda_\nu, \tag{19}$$

$$\frac{d\alpha_i^{(k)}}{dx} = \alpha_i^{(k+1)} + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\Lambda_\nu, \tag{20}$$

$$(i = 0, \ldots k;\ k = 0, \ldots n-1),$$

$$\left\{\begin{aligned} M + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i B_{i\nu} \frac{d\alpha_i^{(n)}}{dx} &= 0, \\ N + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i B_{i\nu} \frac{d\alpha_{i+1}^{(n)}}{dx} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

worin Λ_ν eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(\Lambda) \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A_i^{(n)} \Lambda^{n-i} = 0 \tag{22}$$

bedeutet, und

$$\frac{\varphi(\Lambda)}{\Lambda - \Lambda_\nu} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} B_{i\nu} \Lambda^{n-1-i} \tag{23}$$

gesetzt ist.

Für (21) können wir auch schreiben

$$\frac{d\alpha_i^{(n)}}{dx} = \alpha_i^{(n+1)} + \alpha_{i+1}^{(n+1)} \Lambda_\nu, \tag{24}$$

$$(i = 0, 1 \ldots n),$$

unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ die *allgemeinsten* Functionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die (5) befriedigen. Bedeuten die $\alpha_i^{(n+1)}$ jedoch insbesondere jene Grössen, welche durch successive Differentiationen der Gleichung (2) des vollst. Integrals als Functionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ erhalten werden, so definiren uns die Gleichungen (19), (20), (24) „*die dem* ν. *System an-*

*) Vgl. meine oben citirte Arbeit

gehörenden charakteristischen Streifen n. O. oder kurzweg die Charakteristiken des vollständigen Integrals"; die „Trägercurven" dieser Streifen, oder, wie wir sagen wollen, die *charakteristischen Curven*, werden auf jeder Fläche (2) durch eine der Relation (15) ganz analog gebaute Differentialgleichung 1. O. und n. Grades bestimmt.*)

11. Aus diesen Ueberlegungen folgt der Satz:

Eine Fläche (2) des vollständigen Integrals wird längs einer jeden charakteristischen Curve von je einer benachbarten, ebenfalls dem vollständigen Integral angehörenden Fläche $n-1$-fach berührt.

Vermöge der Gleichungen (19), (20), (24) der Charakteristiken des vollständigen Integrals ist durch jedes Element n. O. von $F^{(n)}=0$ eine einzige Charakteristik des v. Systems festgelegt. Die Differentiation der n letzten unter den Relationen (20) liefert

$$(25)\qquad \frac{d^2\alpha_i^{(n-1)}}{dx^2}=\frac{d\alpha_i^{(n)}}{dx}+\frac{d\alpha_{i+1}^{(n)}}{dx}\Lambda_i+\alpha_{i+1}^{(n)}\frac{d\Lambda_i}{dx}.$$

Ersetzen wir hierin die $\frac{d\alpha_i^{(n)}}{dx}$ durch ihre Ausdrücke (24), ferner die $\alpha_i^{(n)}$ durch ihre aus $F^{(n)}=0$ und den n letzten Gleichungen (20) entnommenen Werthe (wobei nach Nr. 9 das doppeltzählende Werthsystem zu wählen ist), so stellen uns die Gleichungen (19), (25), sowie die noch nicht benutzten Relationen (20) ein *System von Differentialgleichungen 2. O. für die Trägerstreifen $n-1$. O. der Charakteristiken des v. Systems* dar, und man erkennt unmittelbar, dass durch 2 aufeinanderfolgende vereinigt liegende Flächenelemente $n-1$. O., welche die Bedingung (18) erfüllen, ein solcher Trägerstreifen eindeutig festgelegt ist. Bestimmen wir daher durch Integration des Gleichungensystems (19), (20), (24) zu 2 Elementen n. O., die sich stationär berühren, die zugehörigen Streifen n. O., so haben die letzteren einen Streifen $n-1$. O. gemein, mit andern Worten: „*Haben zwei benachbarte Flächen des vollständigen Integrals zwei aufeinanderfolgende $E^{(n-1)}$ gemein, so haben sie längs einer Charakteristik die Elemente $E^{(n-1)}$ gemein*", da doch jede von ihnen aus charakteristischen Streifen n. O. aufgebaut ist.

Die Gleichung (11) stellt mithin ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung (15) dar, wenn man die da_i aus (11), (12), (13) für irgend ein specielles, der Relation (15) genügendes Werthsystem $x_0y_0y_0'$ berechnet. Dieses Integral liegt freilich nicht in einfachster Form vor, da es die betr. charakteristische Curve doppelt zählend liefert.

*) S. die Gl. (6) des § 6.

§ 2.

Die singulären Lösungen der partiellen Differentialgleichungen I. O.

12. Ehe wir die Frage nach dem Vorhandensein singulärer Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung in Angriff nehmen, wollen wir die wichtigsten Resultate zusammenstellen, die sich nach dieser Richtung für Gleichungen I. O. ergeben haben*).

Sei eine gegebene zweigliedrige Flächenschaar

(1) $$V(xyzab) = 0$$

ein vollständiges Integral der Gleichung

(2) $$F^{(1)}(xyzpq) = 0,$$

so sind die charakteristischen Curven auf jeder Fläche (1) durch die folgende gewöhnliche Differentialgleichung definirt: (vgl. (15) § 1)

(3) $$\begin{vmatrix} 0 & V_a & V_b \\ y' & V_{ax} + p V_{az} & V_{bx} + p V_{bz} \\ -1 & V_{ay} + q V_{az} & V_{by} + q V_{bz} \end{vmatrix} = 0,$$

worin die Differentialquotienten von V wiederum durch untere Indices bezeichnet und die p, q durch ihre Werthe aus

(4) $$V_x + p V_z = 0, \quad V_y + q V_z = 0$$

zu ersetzen sind.

Schreibt man (1) in der Form

(5) $$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \frac{1}{2} r_0 (x - x_0)^2 + \cdots$$

wo $z_0, p_0, \ldots$ als Functionen von a, b aufzufassen sind, so wird (3)

(3a) $$\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial z_0}{\partial a} + \frac{\partial p_0}{\partial a}(x - x_0) + \frac{\partial q_0}{\partial a}(y - y_0) \cdots & \frac{\partial z_0}{\partial b} + \cdots \\ -y', & \frac{\partial p_0}{\partial a} + \frac{\partial r_0}{\partial a}(x - x_0) + \frac{\partial s_0}{\partial a}(y - y_0) \cdots & \frac{\partial p_0}{\partial b} + \cdots \\ 1, & \frac{\partial q_0}{\partial a} + \frac{\partial s_0}{\partial a}(x - x_0) + \frac{\partial t_0}{\partial a}(y - y_0) \cdots & \frac{\partial q_0}{\partial b} + \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Hat man nun für einen Punkt $x_0 y_0 z_0$

(6) $$V_a = 0, \quad V_b = 0$$

oder

$$\frac{\partial z_0}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z_0}{\partial b} = 0,$$

so erhält man für kleine Werthe von $x - x_0$, $y - y_0$ aus (3a) in erster Annäherung:

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial a}\frac{\partial q_0}{\partial b} - \frac{\partial p_0}{\partial b}\frac{\partial q_0}{\partial a}\right)[y'(x - x_0) - (y - y_0)] = 0.$$

---

*) Vgl. Darboux l. c. I. Theil.

Nach bekannten Sätzen über die singulären Stellen der gewöhnlichen Differentialgleichungen I. O. *gehen also durch einen Punkt der Fläche* (1), *der den Relationen* (6) *Genüge leistet, einfach unendlich viele charakteristische Curven und zwar nach allen Richtungen hindurch.*

13. Das Element 1. O. der Fläche (1), welches zu einem Punkt der besprochenen Art gehört, nennen wir ein *singuläres Element I. Art der Gleichung* (2).

Die singulären Elemente I. Art, welche somit durch die Relationen (1), (4), (6) definirt sind, *bilden eine Fläche U*, deren Punktgleichung durch Elimination von a, b aus (1) und (6) erhalten wird; U ist die *Enveloppe* der Flächenschaar (1).

Da die Gleichung (3) mit

$$Py' - Q = 0$$

äquivalent ist, und in einem singulären Element $E^{(1)}$ 1. Art unabhängig von y' verschwindet, so muss man für $E^{(1)}$ haben:

$$(7) \qquad P = 0, \quad Q = 0.$$

Nun wird die linke Seite von (2) mit der von (1) proportional, wenn man die a, b durch ihre aus (4) entnommenen Werthe ersetzt denkt; daraus folgt mit Rücksicht auf (6), dass die Ableitungen X, Y, Z von $F^{(1)}$ bez. den Grössen V_x, V_y, V_z proportional werden, so dass man hat:

$$(8) \qquad M \equiv X + Zp = 0, \quad N \equiv Y + Zq = 0,$$

ohne dass X, Y, Z im allgemeinen verschwinden.

Haben umgekehrt die Gleichungen (7), (8) für alle Punkte einer Fläche U eine gemeinsame Lösung p, q, die (2) befriedigt, *ohne dass Z verschwindet*, so sind jene Grössen p, q die Ableitungen von U*), und von jedem Elemente dieser Fläche laufen — und zwar nach allen Richtungen — ∞^1 Charakteristiken aus**), welche eine Fläche bilden, so dass U als Enveloppe von ∞^2 Integralflächen der Gleichung (2) erscheint.

14. Auf jedem singulären Element I. Art $E^{(1)}$ $(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{p}\,\bar{q})$ kann man in doppelter Weise ein Paar besonderer Richtungen definiren: erstens, die „*Doppelberührungsrichtungen*“, längs welcher $E^{(1)}$ den Elementenkegel berührt, der dem Punkt $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ vermöge (2) zugeordnet ist, und zweitens die „*Schmiegungsrichtungen*“***), d. h. die beiden Tangenten-

*) Darboux l. c. p. 67.

**) l. c. p. 153 u. f.

***) Ueber diese Bezeichnung vergl. meine p. 4 citirte Arbeit.

richtungen, welche die Schnittcurve von U mit der zugehörigen Fläche V im Berührpunkt $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ beider Flächen besitzt. *Diese beiden Paare von Richtungen sind aber identisch*, wie wir jetzt zeigen wollen.

Wir setzen die Gleichung von V wieder in der Form (5) und die von U in folgender Gestalt voraus:

$$z - \bar{z} = \bar{p}(x - \bar{x}) + \bar{q}(y - \bar{y} + \cdots \tag{9}$$

Die Annahme $z_0 = \bar{z}$, $x_0 = \bar{x}$, $y_0 = \bar{y}$ liefert dann die ∞^1 Flächen V, welche durch den Punkt $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ hindurchgehen. Ist x, y, z der Punkt, wo sich die Flächen (5), (9) berühren, so folgt:

$$\begin{aligned} p_0(x-\bar{x}) + q_0(y-\bar{y}) + \cdots &= \bar{p}(x-\bar{x}) + \bar{q}(y-\bar{y}) + \cdots, \\ p_0 + r_0(x-\bar{x}) + s_0(y-\bar{y}) &= \bar{p} + \bar{r}(x-\bar{x}) + \cdots, \\ q_0 + s_0(x-\bar{x}) + t_0(y-\bar{y}) &= \bar{q} + \bar{s}(x-\bar{x}) + \cdots \end{aligned}$$

Sind nun die Werthe von $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$ sehr klein, so können wir die Grössen $r_0 s_0 t_0$ mit denjenigen identificiren, welche der im Punkte $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ berührenden Fläche V zukommen, und es folgt:

$$\begin{aligned} (p-p_0)(x-\bar{x}) + (\bar{q}-q_0)(y-\bar{y}) &= 0, \\ (\bar{p}-p_0) + (\bar{r}-r_0)(x-\bar{x}) + (\bar{s}-s_0)(y-\bar{y}) &= 0, \\ (\bar{q}-q_0) + (\bar{s}-s_0)(x-\bar{x}) + (\bar{t}-t_0)(y-\bar{y}) &= 0, \end{aligned}$$

und durch Elimination von $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$ in erster Annäherung die Gleichung des dem Punkte $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ zugeordneten Elementenkegels in der Form

$$0 = (\bar{t}-t_0)(p-\bar{p})^2 - 2(\bar{s}-s_0)(p-\bar{p})(q-\bar{q}) + (\bar{r}-r_0)(q-\bar{q})^2$$

wo p, q für p_0, q_0 geschrieben ist.

Daraus erhält man für die Doppelberührungsrichtungen des singulären Elements $\bar{x} \ldots \bar{q}$:

$$(\bar{r}-r_0)\,dx^2 + 2(s-s_0)\,dx\,dy + (\bar{t}-t_0)\,dy^2 = 0,$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

15. Auf jedem Element $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{p}\bar{q}$ von (2) definirt die Gleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

die *ausgezeichnete Richtung*, d. h. die Tangentenrichtung an jene Curve K, längs welcher die Ebene

$$z - \bar{z} = \bar{p}(x - \bar{x}) + \bar{q}(y - \bar{y}) \tag{10}$$

mit Elementen der Gleichung (2) belegt ist. Da M, N in einem sing. Element verschwinden, so entsteht die Frage nach dem Verhalten der Curve K an einer solchen Stelle.

Wir lösen sogleich das folgende allgemeinere Problem:

Bestimmt man die ∞^1 Flächen der Schaar (1), die eine beliebige Fläche U' berühren, so bilden die zugehörigen Berührpunkte auf U' eine Curve, deren Beschaffenheit in der Nähe eines Berührpunkts $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ von U und U' zu untersuchen ist.

Sei

$$z-\bar{z}=\bar{p}(x-\bar{x})+\bar{q}(y=\bar{y})+\tfrac{1}{2}r'(x-\bar{x})^2+\cdots$$

die Gleichung von U'; sind dann xyz, $x_1y_1z_1$ die Punkte, wo die Flächen $U\,U'$ bez. von einer Fläche V berührt werden, so folgt, indem wir $x-\bar{x}$, $y-\bar{y}$, $x_1-\bar{x}$, $y_1-\bar{y}$ bez. durch ξ, η, ξ_1, η_1 ersetzen:

$$\begin{aligned}
\bar{z}+\bar{p}\xi+\bar{q}\eta+\tfrac{1}{2}\bar{r}\xi^2+\cdots &= z_0+p_0\xi+q_0\eta+\tfrac{1}{2}r_0\xi^2+\cdots,\\
\bar{z}+\bar{p}\xi_1+\bar{q}\eta_1+\tfrac{1}{2}\bar{r}\xi_1^2+\cdots &= z_0+p_0\xi_1+q_0\eta_1+\tfrac{1}{2}r_0\xi_1^2+\cdots,\\
\bar{p}+\bar{r}\xi+\bar{s}\eta+\cdots &= p_0+r_0\xi+s_0\eta+\cdots,\\
\bar{p}+r'\xi_1+s'\eta_1+\cdots &= p_0+r_0\xi_1+s_0\eta_1+\cdots,\\
\bar{q}+s\xi+\bar{t}\eta+\cdots &= q_0+r_0\xi+s_0\eta+\cdots,\\
\bar{q}+s'\xi_1+t'\eta_1+\cdots &= q_0+s^0\xi_1+t_0\eta_1+\cdots.
\end{aligned}$$

Wiederum können wir für kleine $\xi\ldots\eta_1$ die Grössen $r_0s_0t_0$ mit denjenigen Werthen identisch setzen, welche der in $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ berührenden Fläche V zukommen. Schreiben wir dann $a_0a_1a_2$ für $\bar{r}-r_0$, $\bar{s}-s_0$, $\bar{t}-t_0$ und $b_0\,b_1\,b_2$ für $r'-r_0$ etc. so folgt aus den vorigen Relationen

$$\begin{aligned}
a_0\xi^2+2a_1\xi\eta+a_2\eta^2 &= b_0\xi_1^2+2b_1\xi_1\eta_1+b_2\eta_1^2,\\
a_0\xi+a_2\eta &= b_0\xi_1+b_1\eta_1,\\
a_1\xi+a_2\eta &= b_1\xi_1+b_2\eta_1.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$D_{11}=a_0a_2-a_1^2,\quad D_{12}=a_0b_2-2a_1b_1+a_2b_0,\quad D_{22}=b_0b_2-b_1^2,$$

so ergiebt die Elimination der $\xi\,\eta$, dass $\xi_1:\eta_1$ der folgenden quadratischen Gleichung genügt:

$$(11)\qquad (D_{12}-D_{11})b_x^2-D_{22}a_x^2=0.$$

Indem wir die Fläche U' durch die Ebene (10) ersetzen, erhalten wir den Satz:

Ist das Element $\bar{x}\ldots\bar{q}$ singulär der I. Art, so hat die zur Ebene (10) *gehörige Curve K daselbst einen Doppelpunkt, dessen Tangentenrichtungen durch die Covariante* (11) *der „Schmiegungsrichtungen $a_x^2=0$ und der Asymptotenrichtungen $b_x^2=0$ von $V=0$ dargestellt werden.*

16. Auf jeder Fläche (1) giebt es ausser den durch (6) definirten Stellen noch eine andere Kategorie von Punkten, für welche die

Gleichung (3) der charakteristischen Curven unabhängig von y' verschwindet, nämlich die durch

$$(12)\qquad \left\| \begin{matrix} V_a & V_{ax} + p V_{az} & V_{ay} + q V_{az} \\ V_b & V_{bx} + p V_{bz} & V_{by} + q V_{bz} \end{matrix} \right\| = 0$$

d. h. durch das Verschwinden aller zweigliedrigen Determinanten der linksstehenden Matrix gegebenen. Die zugehörigen Elemente 1. O. von (1) bezeichnen wir als *die singulären Elemente II. Art* der Gleichung (2). Die Fläche (1) wird in jedem ihrer sing. Elemente II. Art von je einer benachbarten Fläche derselben Schaar berührt, deren Parameter $a + da$, $b + db$ z. B. aus

$$(13)\qquad V_a da + V_b db = 0$$

bestimmt werden.

Ist $x_0 y_0 z_0$ eine sing. Stelle unserer Art, so wird die Gleichung (3a) der Charakteristiken in erster Annäherung

$$(14)\qquad \xi y' + \eta = 0,$$

worin

$$\xi \equiv a_1(x - x_0) + b_1(x - y_0),$$
$$\eta \equiv a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0),$$
$$a_1 = b_2 = (z_0 s_0),\quad b_1 = (z_0 t_0),\quad a_2 = (x_0 r_0)$$

wenn allgemein $(f\varphi) = f_a \varphi_b - \varphi_a f_b$ gesetzt wird.

Durch (14) wird also zwischen den Fortschreitungsrichtungen y' und $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ eine *involutorische Beziehung* hergestellt; die Doppelstrahlen dieser Involution sind durch

$$(15)\qquad (z_0 t_0) y'^2 + 2(z_0 s_0) y' + (z_0 r_0) = 0$$

gegeben; es sind dies augenscheinlich die Tangentenrichtungen der Schnittcurve, welche V mit der benachbarten sie berührenden Fläche $V + V_a da + V_b db = 0$ bestimmt. Sind $y_1' y_2'$ die Wurzeln von (15), so wird das allgemeine Integral von (14):

$$\xi' \eta' = \text{const.}$$

wo

$$\xi' \equiv y - y_0 + y_1'(x - x_0),$$
$$\eta' \equiv y - y_0 + y_2'(x - x_0).$$

Im Falle reeller $y_1' y_2'$ gehen also*) durch $x_0 y_0 z_0$ 2 charakteristische Curven, die daselbst die Geraden $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ bez. berühren; die übrigen verlaufen in der Nähe dieses Punktes ähnlich wie ein System von Hyperbeln, welche jene Geraden zu Asymptoten haben; im Falle complexer $y_1' y_2'$ erhalten wir ein System concentrischer Ovale um den Nullpunkt.

*) Poincaré, Liouville's J. sér. III. t. 7, p. 390.

17. Da die 2. Ableitungen rst der Fläche $V=0$ den Gleichungen

$$M+Pr+Qs=0,$$
$$N+Ps+Qt=0$$

genügen, so folgt wegen (7) sofort:

$$M=0,\quad N=0. \tag{16}$$

Suchen wir XYZ aus (1) zu berechnen, indem wir wieder die a, b durch ihre Werthe aus (4) ersetzt denken, so kommen wir auf unbestimmte Ausdrücke. Nehmen wir aber der Einfachheit halber an, dass V eine ganze rationale Function seiner Argumente sei und verstehen wir unter (2) das Resultat der auf *rationalem* Wege auszuführenden Elimination der a, b aus (1), (4), so ist $F^{(1)}$ ebenfalls ein ganzes rationales Polynom, dessen Ableitungen also bestimmte endliche Werthe besitzen; es ist leicht zu zeigen, dass für singuläre Elemente 2. Art diese Werthe mit Null identisch sind. Andernfalls wäre nach Nr. 13 die Fläche W, deren Gleichung die Elimination der a, b aus (1), (12) folgt, ein singuläres Integral von (2) und sonach die linke Seite von (14) mit $y'x-y$ proportional, was nicht der Fall ist.

Indem wir die Hauptresultate dieses Paragraphen zusammenfassen, erhalten wir den Satz:

Ist (2) *eine Differentialgleichung, welche eine beliebig gegebene Flächenschaar* (1) *zum vollständigen Integrale hat, so zerfällt die Fläche, deren Gleichung durch Elimination von p, q aus* (2), (7) *erhalten wird, in 2 Bestandtheile; der eine liefert das singuläre Integral U, und man hat für die Punkte desselben*

$$P=Q=M=N=0,$$

worin p, q die Ableitungen von U bedeuten; für die Punkte des andern Bestandtheils W hat man

$$X=Y=Z=P=Q=0, \tag{17}$$

worin aber p, q nicht die Tangentenebenen von W definiren.

Ist die Differentialgleichung (2) beliebig *vorgegeben*, so sind diese Sätze nicht richtig.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass die Resultate dieses Paragraphen nur im Allgemeinen gelten; für specielle Flächenschaaren (1) kann es z. B. eintreten, dass die Gleichungen (2), (7) in Bezug auf p, q nicht unabhängig sind. Bezüglich weiterer Details verweisen wir indess auf die schon citirte Abhandlung von Darboux.*)

---

*) Daselbst finden sich die Ergebnisse der Nr. 27 und 28, sowie die Existenz von Elementen, die (17) befriedigen, zuerst angegeben; die aus (3) gezogenen Schlüsse, sowie die übrigen Resultate dieses Paragraphen, rühren vom Verf. her.

§ 3.

Die singulären Elemente I. Art.

18. Wie in § 1 legen wir unserer Betrachtung eine τ_n-gliedrige Flächenschaar

(1) $$V(xyza_1 a_2 \ldots a_{\tau_n}) = 0$$

zu Grunde, die wir aber nunmehr ausdrücklich *nicht als vollständiges Integral einer gegebenen Differentialgleichung irgendwie bestimmt, sondern wie im vorigen Paragraphen selber willkürlich gewählt denken.* Dies berechtigt uns zu der Annahme, dass die Flächen (1) an allen den besondern Stellen, die wir im Folgenden betrachten werden, sich vollkommen regulär verhalten, eine Voraussetzung, die bei den Integralflächen einer gegebenen partiellen Differentialgleichung im Allgemeinen nicht zuträfe.

19. Wir werfen nun die Frage auf:

Welches ist der auf die τ_n-gliedrige Flächenschaar anzuwendende Process, welcher der Enveloppenbildung im Falle $n = 1$ entspricht?

Durch eine sing. Stelle I. Art einer Fläche V der zweigliedrigen Schaar (1) § 2 gehen, wie wir sahen, einfach unendlich viele zu V benachbarte Flächen, während durch einen beliebigen Punkt von V nur *eine* benachbarte Fläche gelegt werden kann, d. h. die zu den singulären Elementen I. Art gehörigen Punkte von V sind dadurch charakterisirt, dass durch sie unendlichmal mehr benachbarte Flächen hindurchgehen, als durch einen beliebigen ihrer Punkte.

Betrachten wir nun eine Fläche (1) und die zu ihr benachbarten Flächen, welche ein Element $n-1$. O. mit ihr gemein haben; es giebt deren im allgemeinen ∞^{n-1}; ihre Parameter $a_j + da_j$ genügen den Gleichungen:

(2) $$\sum_{j=1}^{\tau_n} (V_{a_j})_i{}^k \, da_j = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots k;\ k = 0, 1 \ldots n-1).$$

Existirt nun auf der Fläche V ein Element $E^{(n-1)}$, durch das n-fach unendlich viele benachbarte Flächen der Schaar (1) *hindurchgehen, für das also die Gleichungen* (2) *von einander linear abhängig werden, so bezeichnen wir dasselbe, bez. das zugehörige Element n. O. der Fläche V als singuläres Element $E^{(n-1)}$ bez. $E^{(n)}$ I. Art der zur Schaar* (1) *gehörigen partiellen Differentialgleichung*

(3) $$F^{(n)}(x \ldots a_n^{(n)}) = 0.$$

Die singulären $E^{(n)}$ I. Art sind also definirt durch die Bedingungen

$$(4)\qquad \left\| \begin{matrix} V_{a_1} & V_{a_2} \cdots & V_{a_{\tau_n}} \\ (V_{a_1})_0^1 & \cdots & (V_{a_{\tau_n}})_0^1 \\ (V_{a_1})_1^1 & & \\ \vdots & & \\ (V_{a_1})_{n-1}^{n-1} & \cdots & (V_{a_{\tau_n}})_{n-1}^{n-1} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Diese Matrix besteht aus τ_n Colonnen und $\tau_n - n$ Zeilen; wegen der Allgemeinheit der Gleichung (1) dürfen wir also voraussetzen, dass die in (4) enthaltenen Gleichungen mit $n+1$ unabhängigen Bedingungen äquivalent sind, wenn es auch nicht gelingt, die letzteren explicite zu erhalten. Die Elimination der xyz zwischen (1) und (4) liefert dann $n-1$ Bedingungen zwischen den a_i allein, mit andern Worten:

Innerhalb der Schaar (1) *existirt eine besondere* $\frac{n(n+1)}{1.2}+1$-*gliedrige Schaar von Flächen, die singuläre Elemente 1. Art enthalten; es giebt sonach* $\frac{n(n+1)}{1.2}+1$-*fach unendlich viele solche Elemente; die zugehörigen* $E^{(n-1)}$ *können wir durch eine Gleichung*

$$(5)\qquad F^{(n-1)}(x \ldots a_{n-1}^{(n-1)}) = 0$$

gegeben denken, wenn es auch im allgemeinen nicht gelingt, dieselbe explicite darzustellen. Wir nennen (5) *die singuläre* $F^{(n-1)}$ *der vorgelegten Gleichung* (3).

20. Wir gehen dazu über zu untersuchen, in wie weit die im vorigen Paragraphen aufgezählten Eigenschaften der singulären $E^{(1)}$ I. Art einer $F^{(1)}$ sich auf unsere singulären $E^{(n)}$ übertragen lassen. Durch einen analogen Process wie in Nr. 7 erhalten wir als Definitionsgleichung der auf einer Fläche $V=0$ verlaufenden charakteristischen Curven:

$$(6)\qquad \left| \begin{matrix} 0 & V_{a_1} & \cdots & V_{a_{\tau_n}} \\ 0 & (V_{a_1})_0^1 & & \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & (V_{a_1})_{n-1}^{n-1} & \cdots & \\ y'^n & (V_{a_1})_0^n & \cdots & \\ -y'^{n-1} & (V_{a_1})_1^n & \cdots & \\ \cdot & \cdot & & \\ (-1)^n & (V_{a_1})_n^n & \cdots & (V_{a_{\tau_n}})_n^n \end{matrix} \right| = 0.$$

In dem sing. Element $E^{(n)}$, das wir betrachten, mögen nicht all Determinanten der Matrix

$$(7)\qquad \left\| \begin{matrix} V_{a_1} & (V_{a_1})_0^1 & (V_{a_1})_1^1 & \cdots & (V_{a_1})_n^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ V_{a_{\tau_n}} & (V_{a_{\tau_n}})_0^1 & \cdot & \cdots & (V_{a_{\tau_n}})_n^n \end{matrix} \right\|$$

verschwinden. Man erkennt sofort, dass die Gleichung (6) in einem sing. Element $E^{(n)}$ unabhängig von y' verschwindet, woraus sich mit Rücksicht auf (16) § 1 sofort ergiebt, dass für ein solches Element die Gleichungen

$$A_i^{(n)} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n) \tag{8}$$

gelten.

21. Um die Beschaffenheit des Systems der Charakteristiken in der Nähe dieser singulären Stelle zu untersuchen, setzen wir $n = 2$ und nehmen (1) wieder in der Form an:

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \cdots \tag{9}$$

wobei unter $z_0 p_0 \ldots$ Functionen von $a_1 \ldots a_5$ zu verstehen sind.

Die Gleichung (6) wird dann

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial z_0}{\partial a_1} + \frac{\partial p_0}{\partial a_1}(x - x_0) + \frac{\partial q_0}{\partial a_1}(y - y_0) + \cdots, & \cdots \\ 0 & \frac{\partial p_0}{\partial a_1} + \frac{\partial r_0}{\partial a_1}(x - x_0) + \frac{\partial s_0}{\partial a_1}(y - y_0) + \cdots, & \cdots \\ 0 & \frac{\partial q_0}{\partial a_1} + \frac{\partial s_0}{\partial a_1}(x - x_0) + \frac{\partial t_0}{\partial a_1}(y - y_0) + \cdots, & \cdots \\ y'^2 & \frac{\partial r_0}{\partial a_1} + \frac{\partial u_0}{\partial a_1}(x - x_0) + \frac{\partial v_0}{\partial a_1}(y - y_0) + \cdots, & \cdots \\ -y' & \frac{\partial s_0}{\partial a_1} + \frac{\partial v_0}{\partial a_1}(x - x_0) + \frac{\partial w_0}{\partial a_1}(y - y_0) + \cdots, & \cdots \\ 1 & \frac{\partial t_0}{\partial a_1} + \frac{\partial w_0}{\partial a_1}(x - x_0) + \frac{\partial \varpi_0}{\partial a_1}(y - y_0) + \cdots, & \cdots \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Die Bedingungen (4) werden hier

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial z_0}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial z_0}{\partial a_5} \\ \frac{\partial p_0}{\partial a_1} & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial q_0}{\partial a_1} & \cdots & \cdot \end{Vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(f_1 f_2 \ldots f_k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial a_k} \end{vmatrix} \tag{12}$$

und lässt man in (10) bei den Coefficienten der einzelnen Potenzen von y' die Glieder 2. und höherer Ordnung in x, y bei Seite, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (11) ein Resultat der Form

$$(a_1 x + b_1 y) y'^2 + (a_2 x + b_2 y) y' + (a_3 x + b_3 y) = 0 \tag{13}$$

worin der Kürze wegen $x_0 = y_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} a_1 &= (zrqst), & b_1 &= 0. \\ a_2 &= (zpsrt), & b_2 &= (zsqrt), \\ a_3 &= 0 \quad , & b_3 &= (zptrs) \end{aligned}$$

gesetzt ist. Statt (13) können wir also auch schreiben:

$$(14) \qquad (y'x - y)[(zqrst)y' + (zprst)] = 0.$$

Da diese Ueberlegung sich für $n > 2$ ganz analog gestaltet, so schliessen wir:

In der Umgebung eines sing. Elements I. Art werden diejenigen Glieder der Charakteristikengleichung (6), *welche in $x - x_0$, $y - y_0$ von der* 1. *O. sind, durch $y'(x - x_0) - (y - y_0)$ theilbar.*

Da nun für ein solches Element die Gleichungen (2) zusammen mit den folgenden

$$\sum_{j=1}^{\tau_n} (V_{a_j})_i^n \, da_j + (-1)^i y'^{\,n-i} d\tau = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n)$$

(wo $d\tau$ der Homogeneität wegen eingeführt ist) für jeden Werth von y' nach den da_j auflösbar sind, so schliessen wir mit Hülfe der Ergebnisse des § 1 weiter:

Ist $E^{(n)}$ ein sing. Element I. Art der Fläche V, so giebt es ∞^1 benachbarte Flächen der Schaar (1), *welche V längs einer Charakteristik $n - 1$-fach berühren und dabei das zu $E^{(n)}$ gehörige Element $E^{(n-1)}$ mit V gemein haben. Die zugehörigen charakteristischen Streifen $n - 1$. O. laufen von $E^{(n)}$ nach allen Richtungen aus.*

22. Es gilt nun der Satz: *Ist $E^{(n-1)}(x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)})$ ein sing. Element I. Art, $E^{(n)}(x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)} \alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_n^{(n)})$ das zugehörige Element n. O., so sind alle ∞^1 Elemente $n - 1$. O., die zu $E^{(n-1)}$ benachbart und auf $E^{(n)}$ gelegen sind, ebenfalls sing. Elemente I. Art, oder, nach* § 1: *$E^{(n)}$ „genügt“ der singulären $F^{(n-1)}$* (5).

Setzen wir wieder $n = 2$ und seien

$$(15) \qquad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

die 3 unabhängigen mit (4) äquivalenten Relationen.

Die singuläre Differentialgleichung (5) kann durch

$$(16) \qquad V(xyza_1 a_2 \ldots a_5) = 0$$

dargestellt werden, wenn man darin die a_i aus (15) und:

$$(17) \qquad V_x + pV_z = 0, \quad V_y + qV_z = 0$$

berechnet denkt.

Indem wir wie in § 1

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q}; \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y} + \cdots$$

setzen, die Gleichungen (15), (16), (17) mit dem Symbol D_x differentiiren und die $D_x(a_i)$ eliminiren, erhalten wir die Bedingung:

(18) $$D_x(F^{(1)}) = D_x(V) = 0$$

in der Form

(19) $$\begin{vmatrix} 0 & V_{a_1} & \cdots & V_{a_5} \\ (V)_0^2 & (V_{a_1})_0^1 & & \cdot \\ (V)_1^2 & (V_{a_1})_1^1 & & \cdot \\ D_x(A_1) & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & & \cdot \\ D_x(A_2) & \frac{\partial A_2}{\partial a_1} & & \cdot \\ D_x(A_3) & \frac{\partial A_3}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial A_3}{\partial a_5} \end{vmatrix} = 0$$

und eine ähnlich gebaute Determinante für die linke Seite von

(20) $$D_y(F^{(1)}) = 0.$$

Da nun für ein Element 2. O. der Fläche $V = 0$ die Ausdrücke $(V)_0^2, (V)_1^2, (V)_2^2$ identisch verschwinden, so erkennt man unmittelbar, dass ein sing. Element $E^{(2)}$, 1. Art den Relationen (18), (20) Genüge leistet, womit unser Satz bewiesen ist.

23. Die Gleichung (16) kann auch mit der zu dem gegebenen vollständigen Integral gehörigen Differentialgleichung

(21) $$F^{(2)}(xy \ldots t) = 0$$

identificirt werden, wenn man die a_i aus

(22) $$(V)_0^1 = 0, \quad (V)_1^1 = 0, \quad (V)_0^2 = 0, \quad (V)_1^2 = 0, \quad (V)_2^2 = 0$$

berechnet denkt. Man erhält dann durch Differentiation von (16), (22) für $P \equiv \frac{\partial F^{(2)}}{\partial p}$ folgende Gleichung:

(23) $$\begin{vmatrix} -P & V_{a_1} & \cdots & V_{a_5} \\ V_2 & (V_{a_1})_0^1 & & \\ 0 & (V_{a_1})_1^1 & & \\ \cdot & (V_{a_1})_0^2 & & \\ \cdot & (V_{a_1})_1^2 & & \\ \cdot & (V_{a_1})_2^2 & \cdots & (V_{a_5})_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

und ähnliche Gleichungen für Q, X, Y, Z. Aus der Form dieser Gleichungen schliesst man leicht: Wenn für unser singuläres Element $E^{(2)}$, wie wir voraussetzen, nicht alle τ_n-gliedrigen Determinanten der Matrix (7] verschwinden, so wird keine der Ableitungen $XYZPQ$ für $E^{(2)}$ zu Null.

Da aber andererseits die Fläche V sich der Voraussetzung nach

bei $E^{(2)}$ regulär verhält, also endliche 3. Ableitungen $u v w \varpi$ besitzt, so folgt aus den selbstverständlichen Bedingungen

$$M + Ru + Sv + T\omega = 0,$$
$$N + Rv + Tw + T\varpi = 0$$

wegen $R = S = T = 0$ sofort

$$M \equiv X + Zp + Pr + Qs = 0,$$
$$N \equiv Y + Zq + Ps + Qt = 0.$$

Indem wir die Ergebnisse der letzten Nummern zusammenfassen und verallgemeinern, erhalten wir den Satz:

Die singulären Elemente I. Art der Gleichung (3) *sind dadurch gekennzeichnet, dass für sie die Gleichungen:*

(24) $$A_i^{(n)} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n),$$

(25) $$M = 0, \quad N = 0$$

bestehen, worin M, N *die in* § 1 *angegebenen Bedeutungen haben, ohne dass die Ableitungen*

$$X, \; Y, \; A_i^{(k)} \quad (i = 0, 1 \ldots k; \; k = 0, 1 \ldots n - 1)$$

für sie im allgemeinen verschwinden.

Man zeigt vermöge einer Ueberlegung, die der bekannten, von Darboux*) bei $n = 1$ angewandten ganz analog ist, dass die Gleichungen (25) für ein *beliebig vorgegebenes* $F^{(n)}$ nicht eine Folge von (24) sein können, und schliesst daraus, dass die Integralflächen einer willkürlich gewählten Gleichung (3) in den durch (24) definirten Elementen n. O. Singularitäten besitzen, deren Natur wir hier indess nicht weiter verfolgen.

24. Während so in der Theorie der *singulären Elemente* die Analogie zwischen den Fällen $n = 1$ und $n > 1$ eine vollkommene ist, tritt ein fundamentaler Unterschied zu Tage, sobald wir nach *singulären Lösungen* fragen. Sei nämlich

$$E^{(n)}(x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)} \alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_n^{(n)})$$

ein sing. Element I. Art auf der Fläche $V = 0$, so ist jedem Element

$$x + dx \ldots \alpha_{n+1}^{(n-1)} + d\alpha_{n-1}^{(n-1)},$$

das auf $E^{(n)}$ gelegen ist, nach Nr. 37 ein weiteres sing. Element n. O. zugeordnet, das mit $E^{(n)}$ zusammen ein Schnitt-n-tupel bestimmt. Zwischen den Fortschreitungsrichtungen $dx : dy : dz$ und den zugehörigen Schnitt-n-tupeln besteht solchergestalt eine Correspondenz $(1, n)$; es zeigt sich aber, dass dies keine Polarcorrespondenz ist (s. § 1), mit anderen Worten:

*) l. c. p. 68 u. f.

Die $\frac{n(n+1)}{1.2}+1$*-fach unendlich vielen singulären Elemente I. Art ordnen sich nicht zu* $\frac{n(n+1)}{1.2}-1$*-fach unendlich vielen Flächen zusammen.*

Dazu wäre nämlich nach § 1 erforderlich, dass für unsere $\frac{n(n+1)}{1.2}+1$-gliedrige Schaar von Elementen n. O. die Relationen

$$D_y(\alpha_i^{(n)})-D_x(\alpha_{i+1}^{(n)})=0 \qquad (i=0,1\ldots n-1) \tag{26}$$

erfüllt seien. Sei wieder $n=2$ angenommen, so haben wir die Bedingungen

$$\begin{cases} D_y(r)-D_x(s)=0, \\ D_y(s)-D_x(t)=0. \end{cases} \tag{27}$$

Es sind nun r, s gegeben durch

$$V_{xx}+2pV_{xz}+p^2V_{zz}+rV_z=0;$$
$$V_{xy}+qV_{xz}+pV_{yz}+pqV_{zz}+sV_z=0,$$

worin die a_i durch ihre aus (15), (17) entnommenen Werthe zu ersetzen sind. Differentiirt man die erste dieser Gleichungen mit D_y, die zweite mit D_x und subtrahirt, so folgt mit Rücksicht auf (27):

$$\sum_{i=1}^{s}(V_{a_i})_0^2\,D_y(a_i)-\sum_{i=1}^{s}(V_{a_i})_1^2\,D_x(a_i)=0. \tag{28}$$

In ganz ähnlicher Weise erhält man noch die folgende Relation:

$$\sum_{i=1}^{s}(V_{a_i})_1^2\,D_y(a_i)=\sum_{i=1}^{s}(V_{a_i})_2^2\,D_x(a_i)=0. \tag{29}$$

Es ist nun nicht undenkbar, dass diese Relationen eine Folge von (15), (16), (17) sind, so dass dann auch umgekehrt die Bedingungen (27) für jedes sing. Element I. Art erfüllt wären. Wir wollen aber an einem speciellen Beispiel zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

25. Die Gleichung (28) erfordert, dass die folgenden beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & (V_{a_1})_0^2 & \cdot\;\cdot\;\cdot & (V_{a_5})_0^2 \\ 0 & V_{a_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & V_{a_5} \\ 0 & (V_{a_1})_1^1 & \cdot\;\cdot\;\cdot & (V_{a_5})_1^1 \\ D_y(A_1) & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ D_y(A_2) & \frac{\partial A_2}{\partial a_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ D_y(A_3) & \frac{\partial A_3}{\partial a_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & \frac{\partial A_3}{\partial a_5} \end{vmatrix} \tag{30}$$

und

$$
(31)\qquad \begin{vmatrix}
0 & (V_{a_1})_1^2 & \cdot\ \cdot\ \cdot & (V_{a_5})_1^2 \\
0 & V_{a_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
0 & (V_{a_1})_1^1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
D_x(A_1) & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
D_x(A_2) & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
D_x(A_3) & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial A_3}{\partial a_5}
\end{vmatrix}
$$

einander gleich seien, vorausgesetzt, dass die aus ihnen durch Weglassen der 1. Zeile und Colonne hervorgehende Unterdeterminante nicht verschwindet. Wir betrachten nun die folgende 5-gliedrige Flächenschaar:

$$
z = a_1 + (a_2^2 + a_3 a_4)\, x + (a_3^2 + a_2 a_5)\, y + a_2^2 x^2 + a_2 a_3 xy + a_3^2 y^2 \\
+ a_4 y (x+1)^3 + a_5 x (y+1)^3.
$$

Diese Flächen verhalten sich für jeden im Endlichen gelegenen Punkt regulär. Die Matrix (4) wird

$$
\left\Vert \begin{matrix}
1, & 2a_2x + a_5y + 2a_2x^2 + a_3xy, & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 2a_2 + 4a_2x + a_3y & a_4 + a_2y & a_3 + 3(x+1)^2 & 0 \\
0, & a_5 + a_3y & 2a_3 + a_2x + 4a_3y & 0 & a_2 + 3(y+1)^2
\end{matrix} \right\Vert .
$$

Für

$$
a_2 = -\,a_3 = 1,
$$

$$
(32)\qquad x = -1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}; \quad y = -2 + 4\sqrt{\tfrac{1}{3}} = -\,a_4
$$

und beliebiges a_5 verschwinden alle 3-gliedrigen Determinanten obiger Matrix; wählen wir für $A_1 A_2 A_3$ diejenigen unter den letztern, welche die ersten 2 Colonnen enthalten, so ist die gemeinsame Unterdeterminante von (30), (31) von Null verschieden und die genannten beiden Determinanten werden bez.:

$$
-\,4(a_5 - x)^2 \left(1 + 3(y+1)^2\right)^2
$$

und

$$
-\,(a_5 - x) \left(1 + 3(y+1)^2\right) \left(6(x+1)\,(y + 4x + 2) - 4\right),
$$

worin für x, y ihre Werthe (32) einzusetzen sind. Da diese beiden Ausdrücke nicht für jeden Werth von a_5 identisch sind, so sehen wir, dass bei unserer speciellen Flächenschaar die Relationen (26) in einem singulären Element I. Art nicht erfüllt sind. Sie können es also auch im Allgemeinen nicht sein, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Indem wir das Ergebniss dieser Untersuchung noch einmal zusammenfassen, können wir sagen:

Auch bei denjenigen partiellen Differentialgleichungen n. O., welche durch Elimination der Constanten aus einem gegebenen vollständigen

Integral erhalten werden, treten singuläre Lösungen in dem bei $n = 1$ geläufigen Sinne nicht auf, sondern nur „singuläre Elementenschaaren.“

Aus diesem Grunde stehen auch den Sätzen der Nr. 14 und 15 in den höhern Fällen keine analogen zur Seite.

Wir werden mit Rücksicht auf das Folgende die $\frac{n(n+1)}{1.2} + 1$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der singulären $E^{(n)}$ I. Art als die *„erste derivirte Elementenschaar“* des vorgelegten vollst. Integrals oder der zugehörigen partiellen Differentialgleichung bezeichnen.

§ 4.

Die derivirten Elementenschaaren.

26. Betrachten wir wiederum die Gleichung (16) § 3 als diejenige der singulären $F^{(1)}$, welche zu (21) § 3 gehört, indem wir die a_i durch ihre aus (15), (17) § 3 folgenden Werthe ersetzt denken, und substituiren wir in die rechten Seiten der Gleichungen

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial p} = \sum_1^5 V_{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p}; \quad \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q} = \sum_1^5 V_{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial q}$$

für die $\frac{\partial a_i}{\partial p}, \frac{\partial a_i}{\partial q}$ jene Werthe, welche sich durch Differentiation von (15), (17) § 3 ergeben, so findet man mit Rücksicht auf die Relationen

$$(1) \qquad 0 = \left\| \begin{matrix} V_{a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & V_{a_5} \\ (V_{a_1})_0{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (V_{a_1})_1{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & (V_{a_5})_1{}^1 \end{matrix} \right\|$$

die folgenden Beziehungen

$$-D \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial p} = V_z \begin{vmatrix} V_{a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & V_{a_5} \\ (V_{a_1})_1{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & (V_{a_5})_1{}^1 \\ \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_1}{\partial a_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_1}{\partial a_3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial A_3}{\partial a_5} \end{vmatrix}$$

$$-D \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q} = V_s \begin{vmatrix} V_{a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & V_{a_5} \\ (V_{a_1})_0{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_3}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial A_3}{\partial a_5} \end{vmatrix}$$

worin D die im Allgemeinen nicht verschwindende Determinante:

$$\begin{vmatrix} (V_{a_1})_0^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (V_{a_1})_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_3}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial A_3}{\partial a_5} \end{vmatrix}$$

bedeutet. Bemerken wir nun, dass für die Elemente unserer sing. $F^{(1)}$ die 2-gliedrigen Determinanten der Matrix, die aus (1) durch Streichung der zweiten Zeile hervorgeht, mit den entsprechenden Determinanten jener Matrix proportional sind, die ebenso durch Weglassung der 3. Zeile entsteht, so ergiebt sich aus den obigen Gleichungen, dass

$$-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F^{(1)}}{\partial p}$$

bez. mit

$$\begin{vmatrix} V_{a_1} & V_{a_2} \\ (V_{a_1})_0^1 & (V_{a_2})_0^1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} V_{a_1} & V_{a_2} \\ (V_{a_1})_1^1 & (V_{a_2})_1^1 \end{vmatrix}$$

propotional sind. Der negative Quotient dieser beiden Determinanten, der somit die charakteristische Richtung der singulären $F^{(1)}$ auf einem beliebigen ihrer Elemente 1. O. definirt, ist aber mit demjenigen identisch, welcher sich für y' durch Nullsetzen des zweiten Factors auf der linken Seite von (14) § 3 ergiebt.

Durch leichte Verallgemeinerung der soeben durchgeführten Ueberlegung erhalten wir die folgende Ergänzung des Theorems der Nr. 21:

Ist $x_0\, y_0\, z_0$ eine singuläre Stelle I. Art auf einer Fläche $V=0$ des vollständigen Integrals, und lässt man aus der Differentialgleichung, die auf der Fläche V die charakteristischen Curven definirt, die Glieder 2. und höherer O. in $x-x_0$, $y-y_0$ weg, so zerfällt das rückbleibende Polynom n. Grades in y' in 2 Factoren: der eine ist mit $y'(x-x_0)-(y-y_0)$ identisch; der andere stellt, gleich Null gesetzt, die $n-1$ charakteristischen Richtungen der singulären $F^{(n-1)}$ dar.

27. Betrachten wir nun die Punkte der Fläche $U=0$, deren Gleichung sich durch Elimination der a_i aus

$$V=0, \quad V_{a_1}=0 \;.\;.\;.\; V_{a_5}=0$$

ergiebt. Man erkennt sofort, dass die ∞^2 Flächen $V=0$, welche je einen Punkt von U enthalten, diese Fläche daselbst einfach berühren. Es ergiebt sich ferner für die Elemente 1. O. von U:

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial p} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q} = 0;$$

da endlich $\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y}$, $\frac{\partial F^{(1)}}{\partial z}$ zufolge leichter Rechnung bez. in V_x, V_y, V_z übergehen, so hat man für die Elemente von U identisch

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} + p\frac{\partial F^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y} + q\frac{d F^{(1)}}{\partial z} = 0,$$

ohne dass $\frac{\partial F^{(1)}}{\partial z}$ verschwindet; die Fläche U ist also eine *singuläre Lösung* der singulären $F^{(1)}$; wir bezeichnen die Gesammtheit ihrer Elemente 1. O. als die *zweite derivirte Elementenschaar* der vorgelegten Flächenschaar $V = 0$.

28. Die Ergebnisse der vorigen Nr. lassen sich leicht verallgemeinern. Verstehen wir wieder unter der symbolischen Gleichung:

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} V_{a_1} & V_{a_2} & \cdot & \cdot & \cdot & V_{a_{\tau_n}} \\ (V_{a_1})_0^1 & & \cdot & \cdot & \cdot & (V_{a_{\tau_n}})_0^1 \\ (V_{a_1})_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (V_{a_1})_{n-k}^{n-k} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (V_{a_{\tau_n}})_{n-k}^{n-k} \end{matrix} \right\| = 0$$

die Gesammtheit der Relationen, die sich durch Nullsetzen der $\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{1\,.\,2}$-gliedrigen Determinanten der links stehenden Matrix ergeben, so erhält man aus (2) $\tau_n - \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{1\,.\,2} + 1$ unabhängige Gleichungen, welche zusammen mit

$$(3) \quad V = 0, \quad (V)_i^j = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots j;\ j = 1, 2 \ldots n-k+1)$$

eine Schaar von $\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{1\,.\,2} + 1$-fach unendlich vielen Elementen $n-k+1$. O., „*die k^{te} derivirte Elementenschaar*", definiren; die zugehörigen Elemente $n-k$. O. können wir durch eine „singuläre Gleichung $F^{(n-k)} = 0$" bestimmt denken, der auch die singulären $E^{(n-k+1)}$ in dem oft erläuterten Sinne genügen, ohne sich jedoch zu Flächen zusammenzuordnen. Man erhält durch eine Ueberlegung, welche der in der vor. Nr. durchgeführten ganz analog ist, das Resultat:

Die $n-k-1^{te}$ derivirte Elementenschaar ist die erste derivirte der $n-k^{ten}$, in dem Sinne, dass für alle Elemente $n-k$. O., welche nach dem Obigen durch $F^{(n-k-1)} = 0$ bestimmt sind, die Beziehungen

$$M^{(n-k)} = 0, \quad N^{(n-k)} = 0, \quad \frac{\partial F^{(n-k)}}{\partial \alpha_i^{(n-k)}} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n-k)$$

bestehen, wenn $M^{(n-k)}$, $N^{(n-k)}$ aus $F^{(n-k)}$ ebenso gebildet sind, wie M und N aus $F^{(n)}$; dabei wird für die genannten Elemente keine der Ableitungen

$$\frac{\partial F^{(n-k)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial F^{(n-k)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial F^{(n-k)}}{\partial a_i^{(j)}}$$

$$(i = 0, \ldots j; \quad j = 0, 1 \ldots n - k - 1)$$

im Allgemeinen zu Null.

Die n^{te} Derivirte besteht solchergestalt aus den ∞^2 Elementen 1. O. der Fläche, deren Gleichung sich durch Elimination der a_i aus

$$V = 0, \quad V_{a_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots \tau_n)$$

ergiebt, und ist eine singuläre Lösung der singulären $F^{(1)}$.

Es sei hervorgehoben, dass das Auftreten *aller* singulären $F^{(n-k)}$ nur einen Normalfall bildet, von dem in speciellen Fällen die mannigfachsten Abweichungen stattfinden können. Bestehen z. B. zwischen den Gleichungen (2) noch andere Abhängigkeiten, als durch ihre Determinantennatur allein bedingt ist, so ist es möglich, dass eine Gleichung $F^{(n-k)} = 0$ nicht existirt, dass vielmehr zu *jedem* Element $n - k$. O. des Raumes singuläre Elemente $n - k + 1$. O. gehören.

Schliesslich wollen wir nicht unerwähnt lassen, dass die Principien dieses Paragraphen sich zum Theil auch auf andere als τ_n-gliedrige Flächenschaaren anwenden lassen.

§ 5.

Die singulären Elemente II. Art.

29. Ausser für die sing. Elemente I. Art der Gleichung (3) § 3 sind die Bedingungen

$$(1) \qquad A_i^{(n)} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n)$$

auch für jene Elemente n. O. erfüllt, welche durch die symbolische Gleichung:

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} V_{a_1} & (V_{a_1})_0{}^1 & (V_{a_1})_1{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & (V_{a_1})_n^n \\ V_{a_1} & (V_{a_2})_0{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{a_{\tau_n}} & (V_{a_{\tau_n}})_0{}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (V_{a_{\tau_n}})_n^n \end{Vmatrix} = 0$$

auf jeder Fläche $V = 0$ definirt werden; wir bezeichnen sie als *die singulären Elemente II. Art.* Da die Relationen (2) mit 2 unabhängigen Gleichungen äquivalent sind, so enthält jede Integralfläche $V = 0$ eine discrete Anzahl derselben; durch jedes Element $n - 1$. O. des Raums sind also ∞^{n-2} sing. Elemente II. Art bestimmt.

30. Ist $x_0\, y_0\, z_0$ eine auf der Fläche V gelegene singuläre Stelle II. Art und setzen wir $V=0$ wieder in der Form (9) § 3 und ausserdem der Kürze halber $x_0 = y_0 = 0$ voraus, so erhält die Differentialgleichung der auf $V=0$ gelegenen charakteristischen Curven unter Weglassung von Gliedern 2. und höherer Ordnung in x und y die Form

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i x + b_i y)\, y'^{\,n-i} = 0 \tag{3}$$

wo die linke Seite für $\frac{y}{x} = y'$ im Allgemeinen nicht identisch verschwindet. Im Falle $n=1$ wird durch diese Gleichung, wie wir in § 2 gesehen haben, eine involutorische Beziehung zwischen den Richtungen $\frac{y}{x}$ und y' hergestellt; es ist nun leicht zu zeigen, dass sich diese Eigenschaft auf die höhern Fälle nicht übertragen lässt, dass also für $n > 1$ die linke Seite der Gleichung (3) nicht mit der ersten Polare der Richtung $\frac{y}{x}$ in Bezug auf eine binäre Form $n+1$. O. in y' identificirt werden kann.

Auf jeder Fläche der Schaar:

$$z = a_1 + a_2 x + a_3 y + 2a_4 a_5 xy + a_4^3 x(y+1)^2 + a_5^3 y(x+1)^2$$

bestimmt der Punkt $x=0,\ y=0,\ z=a_1$ ein sing. Element II. Art. Die Gleichung (3) wird hier

$$y'^2 x(a_4^3 + 3a_4^2 a_5^2) + y(a_5^3 + 3a_4^2 a_5^2) = 0,$$

was offenbar keine Polarcorrespondenz darstellt; die gedachte Eigenschaft kann also auch im allgemeinen Falle nicht eintreten.

31. Die Bedingungen (2) drücken aus, dass die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\tau_n} V_{a_i}\, da_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{\tau_n} (V_{a_i})_j^k\, da_i = 0$$

$$(j = 0, \ldots k;\ k = 1, 2, \ldots n)$$

miteinander verträglich seien. In jedem ihrer singulären Elemente II. Art wird also die Fläche $V=0$ von einer unendlich benachbarten n-fach berührt.

Da V sich nach der Voraussetzung in der Umgebung eines solchen Elements regulär verhält, so führt die Betrachtung der Relationen (5) § 1 wegen (1) wieder zu dem Schlusse, dass auch für sing. Elemente II. Art die Beziehungen

$$M = 0, \quad N = 0$$

erfüllt sein müssen. Identificirt man aber $F^{(n)}=0$ mit $V=0$, indem man die a_i aus

(4) $$(V)_i^k = 0 \quad (i=0,\dots k;\ k=1,\dots n)$$

entnommen denkt, so ergeben sich für die Ableitungen $X\dots A_{n-1}^{(n-1)}$ unbestimmte Werthe. Diese Thatsache erklärt sich leicht. Nehmen wir nämlich der Einfachheit halber an, dass die linke Seite der Gleichung

(5) $$V(xyza_1\dots a_{\tau n}) = 0$$

eine ganze rationale Function ihrer Argumente sei, und dass sich aus den τ_n Gleichungen (4) für jedes *beliebige* Werthsystem der $xy\dots \alpha_n^{(n)}$ μ Systeme

$$a_1^{(1)} a_2^{(1)} \dots a_{\tau_n}^{(1)}, \quad \dots \quad a_1^{(\mu)} a_2^{(\mu)} \dots a_{\tau_n}^{(\mu)}$$

der Parameter a_i bestimmen lassen; indem wir dann (5) für $F^{(n)}=0$ gebrauchen, denken wir uns ein *bestimmtes*, etwa das ν^{te} dieser μ Werthsysteme in (5) eingesetzt. Eliminiren wir aber nach der Poisson'schen Methode die a_i aus (4), (5), so erhalten wir:

$$0 = \overline{F}^{(n)} \equiv \prod_{k=1}^{\mu} V(xyza_1^{(k)}\dots a_{\tau_n}^{(k)}),$$

worin $\overline{F}$ eine ganze rationale Function der $x\dots \alpha_n^{(n)}$ bezeichnet; bedeutet daher β irgend eine dieser Grössen, so folgt für jedes Element, das $\overline{F}^{(n)}=0$ befriedigt:

$$\frac{\partial V(xyza_1^{(\nu)}\dots a_{\tau_n}^{(\nu)})}{\partial\beta} = \frac{\dfrac{\partial \overline{F}^{(n)}}{\partial\beta}}{\prod\limits_{k=1}^{\nu-1} V(xyza_1^{(k)}\dots)\prod\limits_{k=\nu-1}^{n} V(xyza_1^{(k)}\dots)}.$$

Für sing. Elemente II. Art unterscheidet sich nun nach der zu Anfang dieser Nr. gemachten Bemerkung eines der Werthsysteme $a_1^{(k)}\dots a_{\tau_n}^{(k)}$ unendlich wenig von dem Systeme $a_1^{(\nu)}\dots a_{\tau_n}^{(\nu)}$; der Nenner des rechts stehenden Bruches verschwindet mithin, und da die linke Seite dem Vorigen zufolge unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so muss man haben

$$\frac{\partial \overline{F}^{(n)}}{\partial\beta} = 0$$

für

$$\beta = x\ \dots\ \alpha_n^{(n)}.$$

Indem wir der Möglichkeit Raum geben, dass für specielle Flächenschaaren die Relationen (2) weniger als 2 unabhängige Bedingungen darstellen, können wir sagen:

Eine Differentialgleichung

$$F^{(n)} = 0,$$

welche durch Elimination der Constanten aus einem gegebenen vollständigen Integral (5) *durch Anwendung der gewöhnlichen Eliminationsregeln erhalten wird, besitzt wenigstens* ∞^{τ_n} *Elemente n. O., für welche die Relationen*

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad A_i^{(k)} = 0, \quad (i = 0,\ 1 \ldots k;\ k = 0, 1 \ldots n)$$

erfüllt sind.

München, den 10. März 1894.

Aufstellung eines vollständigen Systems von Differentialen erster Gattung in einem cubischen Functionenkörper.

Von

Ludwig Baur in Darmstadt.

Im 43ten Bande der Math. Ann. habe ich gezeigt, dass man die Grundgleichung eines jeden cubischen Körpers Ω algebraischer Functionen einer Veränderlichen x in die Form

$$F(y, x) = y^3 + f_2(x)y + f_3(x) = 0 \tag{1}$$

setzen kann, wo f_2 und f_3 derartige ganze rationale Functionen von x sind, dass $G(f_2^{\frac{1}{2}})$, $G(f_3^{\frac{1}{3}})$ keinen gemeinsamen Theiler haben und $F(y, x)$ selbst irreducibel ist. Dabei bedeutet allgemein $G(f^{\frac{1}{n}})$ diejenige ganze rationale Function höchsten Grades von x, die in $f^{\frac{1}{n}}$ enthalten ist. Ebendaselbst habe ich nachgewiesen, wie dann stets auf rationalem Wege eine ganze algebraische Function ω_3 so bestimmt werden kann, dass die drei ganzen Functionen

$$\omega_1 = 1,$$
$$\omega_2 = y,$$
$$\omega_3 = \frac{2}{3}\frac{A_2 B h_2}{D} - \frac{9 h_4 t}{D} y + \frac{y^2}{A_1 B D} = \omega\text{*)}$$

eine *Basis des Systems* $\mathfrak{o}$, d. h. des Inbegriffs aller *ganzen* algebraischen Functionen des Körpers Ω bilden. Mit Hülfe dieser Basis lässt sich bereits eine Reihe von Fragen, die sich in der allgemeinen Theorie der algebraischen Functionen darbieten, für die Functionen des cubischen Körpers beantworten und, nachdem ich am erwähnten Orte bereits die *Verzweigungszahl* und das *Geschlecht* des Körpers Ω auf rationalem Wege bestimmt habe**), soll jetzt noch ein kurzer Abriss der Theorie

---

*) Ueber die Bedeutung der hier auftretenden Functionen vergl. die citirte Arbeit oder das erste näher ausgeführte Beispiel im § 7.

**) Mit den in meiner vorigen Arbeit behandelten Fragen hat sich auch Herr Hensel beschäftigt. Bei einer Besprechung, die ich mit ihm zu einer Zeit

der entsprechenden *Ideale* gegeben, schliesslich aber eine andere Basis, eine *Normalbasis* gebildet, ein *vollständiges System von linear unabhängigen Differentialen I. Gattung* aufgestellt, und die Untersuchungen an einigen *Beispielen* wirklich durchgeführt werden. Ich behalte dabei die Bezeichnungen der vorigen, hier kurz mit I citirten Arbeit ungeändert bei mit der einzigen Ausnahme, dass die dort p. 519 mit ε_1 und ε_2 bezeichneten Zahlen jetzt bezüglich $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ genannt werden, um in Uebereinstimmung mit der Dedekind-Weber'schen Arbeit (Journal für Mathematik Bd. 92) jetzt die Zeichen ε_1, ε_2, ε_3 für die zu ω_1, ω_2, ω_3 complementäre Basis verwenden zu können.

Ich hebe wiederum hervor, dass die vorliegenden Untersuchungen eine grosse Classe von Curven umfassen, alle diejenigen nämlich, welche in Bezug auf die eine Coordinate von beliebigem, in Bezug auf die andere vom 3^{ten} Grade sind (I, p. 520) und dass hierzu insbesondere auch *alle Curven vierter Ordnung* gehören, also *der allgemeine Fall* $p=3$. Denn bedeuten $b_{\iota 1}$, $b_{\iota 2}$, $b_{\iota 3}$ die homogenen Coordinaten eines Punktes B_ι, so geht die Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\nu\varrho\sigma\tau} x_\nu x_\varrho x_\sigma x_\tau = 0 \qquad (\nu, \varrho, \sigma, \tau = 1, 2, 3)$$

einer beliebigen Curve 4^{ter} Ordnung durch die lineare Substitution

$$x_\nu = \Sigma b_{\iota\nu} y_\iota \qquad (\iota, \nu = 1, 2, 3),$$

deren Determinante $|b_{\iota\nu}|$ nicht verschwindet, über in

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = \Sigma B_{\iota\varkappa\lambda\mu} y_\iota y_\varkappa y_\lambda y_\mu = 0 \qquad (\iota, \varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3),$$

wo

$$B_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \Sigma a_{\nu\varrho\sigma\tau} b_{\iota\nu} b_{\varkappa\varrho} b_{\lambda\sigma} b_{\mu\tau} \qquad (\nu, \varrho, \sigma, \tau = 1, 2, 3)$$

gesetzt ist, sie nimmt mithin, wenn — was zulässig ist — die Punkte B_i z. B. so gewählt werden, dass B_1 ein beliebiger nicht singulärer Punkt der Curve $F=0$, B_2 ein beliebiger Punkt der in B_1 an die genannte Curve gelegten Tangente und B_3 ein beliebiger nicht auf dieser Tangente liegender Punkt ist, für $y_1 = \Theta$, $y_2 = x$, $y_3 = 1$ diejenige Form an, von der ich in I (1) ausgegangen bin, mit der Massgabe, dass die dort mit a_0 bezeichnete Grösse jetzt eine nicht verschwindende Constante, Θ also bereits eine ganze Function von x ist.

---

hatte, als die daselbst veröffentlichte Untersuchung bereits in ihren wesentlichen Zügen feststand — ich legte Herrn Hensel damals die zunächst unter der Voraussetzung, dass f_2 und f_3 keinen gemeinsamen Theiler haben, fertig gebildete Basis von $\mathfrak{o}$, sowie den Ausdruck der entsprechenden Discriminante $\Delta(\mathfrak{o})$ vor — theilte mir Herr Hensel mit, dass er die auf rationalem Wege zu bewerkstelligende Zerlegung der „Gattungsdiscriminante" auf einem anderen Wege — damals vor etwa einem Jahre — hergeleitet hätte. Herr Hensel hat versprochen, seine Resultate bei Gelegenheit einer allgemeineren Untersuchung auseinanderzusetzen.

§ 1.

Die zu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ complementäre Basis.

Die zu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ complementäre Basis von Ω werde durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bezeichnet. Dann ist, wenn

$$e_{ik} = S(\omega_i \omega_k) \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{2}$$

$$E(x) = |e_{ik}| = \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Delta(\Omega), \tag{3}$$

$$E_{ik} = \frac{\partial E}{\partial e_{ik}}$$

gesetzt wird, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ definirt durch die Gleichungen

$$\omega_i = \Sigma e_{ik} \varepsilon_k \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

so dass

$$E \varepsilon_\lambda = \Sigma E_{i\lambda} \omega_i \tag{4}$$

und

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = E^2 \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

mithin

$$E \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1 \tag{5}$$

ist. Nun folgt (I, § 2, 3)

$$\begin{aligned} e_{11} &= S(1) = 3, \\ e_{12} &= e_{21} = S(y) = 0, \\ e_{13} &= e_{31} = S(\omega) = 0, \\ e_{22} &= S(y^2) = -2 A_1 A_2 B^2 h_2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} e_{23} = e_{32} = S(\omega y) &= \frac{1}{D}\Big(\tfrac{2}{3} A_2 B h_2 S(y) - 9 h_4 t S(y^2) + \frac{1}{A_1 B} S(y^3)\Big) \\ &= \frac{1}{D}(18 h_4 t A_1 A_2 B^2 h_2 - 3 A_1 A_2 B h_4) \\ &= \frac{3 A_1 A_2 B h_4}{D}(6 B h_2 t - 1) \\ &= 3 A_1 A_2 B h_4 k s, \end{aligned}$$

und ε_{33} berechnet sich am einfachsten daraus, dass, wie die wirkliche Ausrechnung zeigt,

$$E = 3(e_{22} e_{33} - e_{23}^2),$$

mithin (I, 50)

$$3 e_{22} e_{33} = E + 3 e_{23}^2 = -A_1 A_2^2 B^2 \Delta_3 + 27 A_1^2 A_2^2 B^2 h_4^2 k^2 s^2$$

oder (I, p. 517 unten)

$$\begin{aligned} 6 h_2 e_{33} &= A_2(\Delta_3 - 27 A_1 h_4^2 k^2 s^2) \\ &= A_2(\Delta_3 - k^2 s^2 D^2 \Delta_3 + 4 A_2 B^2 h_2^3 k^2 s^2). \end{aligned}$$

Da nun weiter (I, Seite 517, unten)

$$1 - k^2 s^2 D^2 = (1 - k s D) 6 B h_2 t,$$

so folgt schliesslich, wenn der Kürze halber

$$(1 - ksD)t\Delta_3 + \tfrac{2}{3}A_2Bh_2^2k^2s^2 = C \tag{7}$$

gesetzt wird,

$$e_{33} = A_2BC, \tag{8}$$

und demgemäss ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{3}, \\ \varepsilon_2 &= 3\,\frac{-C\omega_2 + 3A_1h_4ks\omega_3}{A_1A_2B\Delta_3}, \\ \varepsilon_3 &= 3\,\frac{3h_4ks\omega_2 + 2Bh_2\omega_3}{A_2B\Delta_3} = \frac{\tilde{y}_3}{A_2B\Delta_3} \quad \text{(vergl. I, 48)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Der Modul

$$\mathfrak{e} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] \tag{10}$$

wird der zu $\mathfrak{o}$ *complementäre Modul* genannt. Seine Basisfunctionen sind im allgemeinen gebrochene algebraische Functionen von x. Versteht man nun unter dem *Hauptnenner* mehrerer gebrochener algebraischer Functionen von x diejenige *ganze rationale Function von x niedrigsten Grades*, die so beschaffen ist, dass durch Multiplication mit ihr jene gebrochenen Functionen in *ganze* algebraische Functionen von x verwandelt werden, so muss der Hauptnenner der Brüche $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ wegen ε_3 jedenfalls die Factoren A_2, B, Δ_3 enthalten, da ja $\tilde{y}_3$ nicht mehr durch eine ganze rationale Function von x theilbar ist (I, 48). Was ferner den Zähler von ε_2 anbelangt, so kann dieser nicht durch einen Factor $x - a_1$ von A_1 theilbar sein, denn sonst müsste auch der mit D^2 multiplicirte Zähler von ε_2, und da (I, 46, 27)

$$D^2\Delta_3 \equiv 4A_2B^2h_2^3 \qquad (\text{mod. } x - a_1),$$

$A_2Bh_2^2$ aber relativ prim zu A_1 ist, auch

$$6Bh_2t(ksD - 1) - k^2s^2D^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } x - a_1)$$

d. i. (I, p. 517)

$$(ksD + 1)(ksD - 1) - k^2s^2D \equiv 0 \quad (\text{mod. } x - a_1)$$

sein, was nicht stattfindet.

Daher muss der fragliche Hauptnenner auch den Factor A_1 enthalten d. h. *der Hauptnenner der drei gebrochenen Functionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ist*

$$r(x) = A_1A_2B\Delta_3, \tag{11}$$

er ist also *gleich dem Product aller von einander verschiedenen in $\Delta(\mathfrak{o})$ enthaltenen Linearfactoren.*

Da nun stets (D. W. § 10, 10)*)

*) Durch D. W. bezeichne ich die für das folgende stets zu vergleichende Arbeit der Herren Dedekind und Weber „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" im 92ten Bande des Journals für Mathematik.

$$\mathfrak{o}\mathfrak{e} = \mathfrak{e}$$

und demnach auch

$$\mathfrak{o} r \mathfrak{e} = r \mathfrak{e},$$

so besitzt der Modul $r\mathfrak{e}$ die eine charakteristische Eigenschaft der Ideale und da derselbe ausserdem bloss ganze Functionen enthält, so ist der Modul

(12) $r\mathfrak{e}$ *ein Ideal.*

Daraus folgt dann weiter, dass

$$\Delta(r\varepsilon_1, r\varepsilon_2, r\varepsilon_3) = \text{const.} \times N(r\mathfrak{e})^2 \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

mithin

$$N(r\mathfrak{e})^2 = \text{const.} \times \frac{r^6 \Delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{E} = \text{const.} \times \frac{r^6}{E^2},$$

woraus dann

$$N(r\mathfrak{e}) = \text{const.} \times \frac{r^3}{E}$$

oder

(13) $$N(r\mathfrak{e}) = \text{const.} \times A_1^2 A_2 B \Delta_3^2$$

sich ergiebt.

Demnach besitzt $N(r\mathfrak{e})$ genau dieselben Linearfactoren wie $\Delta(\mathfrak{o})$, aber von umgekehrter Ordnungszahl d. h. die ein- bezw. zweifachen Linearfactoren von $\Delta(\mathfrak{o})$ sind zwei- bezw. einfache Linearfactoren von $N(r\mathfrak{e})$.

§ 2.

Primideale und Verzweigungsideal.

Die dritte Basisfunction von $\mathfrak{o}$, nämlich $\omega_3 = \omega$, möge als rationale Function von x und y durch $\omega(x, y)$ bezeichnet werden. Es kann dann, wie ich im 32ten Bande dieser Zeitschrift bewiesen habe, jedes Primideal, dessen Norm gleich $x - x_0$ ist, in der Form

(14) $$[x - x_0, y - y_{x_0}, \omega(x, y) - \omega(x_0, y_0)]$$

dargestellt werden, wo y_{x_0} jede Wurzel der Gleichung

(15) $$F(y, x_0) = 0$$

sein darf und umgekehrt ist jedes in dieser Form enthaltene Ideal ein Primideal. Bezeichnet man also die drei conjugirten, zu $x = x_0$ gehörigen Werthe von y durch y'_{x_0}, y''_{x_0}, y'''_{x_0} und setzt

(16) $$\mathfrak{p}_{x_0}^{(i)} = [x - x_0, y - y_{x_0}^{(i)}, \omega(x, y) - \omega(x_0, y_{x_0}^{(i)})] \quad (i = 1, 2, 3),$$

so ist

$$N(\mathfrak{p}'_{x_0}) = N(\mathfrak{p}''_{x_0}) = N(\mathfrak{p}'''_{x_0}) = x - x_0,$$

und man erhält alle Primideale des Körpers Ω, wenn man x_0 alle Werthe durchlaufen lässt. Da hiernach $x - x_0$ durch die drei Prim-

ideale $\mathfrak{p}_{x_0}^{(i)}$ und nur durch diese theilbar ist, so ergiebt sich für das Hauptideal $\mathfrak{o}(x-x_0)$ sofort die Factorenzerlegung

$$(17) \qquad \mathfrak{o}(x-x_0) = \mathfrak{p}'_{x_0}\mathfrak{p}''_{x_0}\mathfrak{p}'''_{x_0}.$$

Soll insbesondere $x - x_0$ durch das Quadrat eines Primideals theilbar sein, so müssen zwei von den in (16) angeführten Primidealen einander gleich werden z. B. $\mathfrak{p}'_{x_0}$ und $\mathfrak{p}''_{x_0}$. Dies tritt aber immer und nur dann ein, wenn der grösste gemeinsame Theiler $\mathfrak{t}$ dieser beiden Ideale $\mathfrak{p}'_{x_0}$ selbst ist. Nun ist aber $\mathfrak{t}$ wieder ein Ideal, für das die sechs Basisfunctionen von $\mathfrak{p}'_{x_0}$ und $\mathfrak{p}''_{x_0}$ eine reducibele Basis bilden und es folgt daher:

$$\begin{aligned}\mathfrak{t} = [&x - x_0,\ y - y'_{x_0},\ \omega(x,y) - \omega(x_0, y'_{x_0}),\ x - x_0,\\ &\qquad y - y''_{x_0},\ \omega(x,y) - \omega(x_0, y''_{x_0})]\\ = [&x - x_0,\ y - y'_{x_0},\ \omega(x,y) - \omega(x_0, y'_{x_0}),\\ &\qquad 0,\ y'_{x_0} - y''_{x_0},\ \omega(x_0, y'_{x_0}) - \omega(x_0, y''_{x_0})].\end{aligned}$$

Da nun $\mathfrak{o}$ das einzige Ideal ist, das eine Constante enthält (D. W. § 7), so wäre geradezu $\mathfrak{t} = \mathfrak{o}$, wenn nicht die beiden in $\mathfrak{t}$ auftretenden constanten Basisfunctionen verschwänden. Damit dieser Fall nicht eintritt, muss also

$$(19) \qquad \begin{gathered} y'_{x_0} = y''_{x_0},\\ \omega(x_0, y'_{x_0}) = \omega(x_0, y''_{x_0})\end{gathered}$$

sein. *Dies ist mithin die nothwendige aber*, wie man sofort sieht, *auch hinreichende Bedingung* dafür, dass $\mathfrak{t} = \mathfrak{p}'_{x_0}$ d. h. *dafür, dass die beiden conjugirten Primideale* $\mathfrak{p}'_{x_0}$ *und* $\mathfrak{p}''_{x_0}$ *einander gleich werden*, und da (D. W. § 16)

$$E(x) = (\Sigma \pm \omega_1' \omega_2'' \omega_3''')^2$$

so folgt weiter, dass $x - x_0$ nur dann durch eine höhere Potenz eines Primideals theilbar sein kann, wenn $E(x_0) = 0$, d. h. $x - x_0$ ein Factor von $E(x)$ ist. Da das Product aller von einander verschiedenen Linearfactoren von E, welches in (11) durch r bezeichnet wurde, die Form

$$(20) \qquad r(x) = \Pi(x-a_1)(x-a_2)(x-b)(x-d_3)$$

hat, wo das Product über alle Linearfactoren

$$x - a_i \text{ von } A_i, \quad x - b \text{ von } B, \quad x - d_3 \text{ von } \Delta_3$$

auszudehnen ist, so muss nunmehr jeder einzelne dieser Factoren auf seine Theilbarkeit durch eine höhere Potenz eines Primideals untersucht werden.

Bedeutet nun zunächst $x - c$ einen der Factoren $x - a_2$ oder $x - b$, so folgt sofort aus der Gleichung

$$y^3 + A_1 A_2 B^2 h_2 y + A_1^2 A_2 B^2 h_4 = 0$$

für y und der andern (I, p. 509, 510)

$$y_3(y_3 + A_2 B h_2)^2 - A_1 A_2^2 B h_4^2 = 0$$

für $y_3 = \frac{y^2}{A_1 B}$, dass sowohl die 3 conjugirten Werthe von y wie die von y_3 für $x = c$ verschwinden und dass, da $A_2 B$ relativ prim zu D ist, das gleiche jedenfalls auch für die 3 conjugirten Werthe von $\omega(x, y)$ gilt. Daher ist, wenn

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_2 &= [x - a_2,\ y,\ \omega(x, y)], \\ \mathfrak{b} &= [x - b,\ y,\ \omega(x, y)] \end{aligned}$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}'_{a_2} &= \mathfrak{p}''_{a_2} = \mathfrak{p}'''_{a_2} = \mathfrak{a}_2, \\ \mathfrak{p}'_b &= \mathfrak{p}''_b = \mathfrak{p}'''_b = \mathfrak{b} \end{aligned}$$

und

$$(22)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{o}(x - a_2) &= \mathfrak{a}_2^3, \\ \mathfrak{o}(x - b) &= \mathfrak{b}^3. \end{aligned}$$

Ebenso verschwinden auch für $x = a_1$ die 3 conjugirten Werthe von y; y_3 dagegen erhält für $x = a_1$ einmal den Werth 0 und zweimal den Werth $-(A_2 B h_2)_{a_1}$, und demgemäss ω einmal den Werth $\frac{2}{3}\left(\frac{A_2 B h_2}{D}\right)_{a_1}$ und zweimal den Werth $-\frac{1}{3}\left(\frac{A_2 B h_2}{D}\right)_{a_1}$. Wenn daher

$$(23)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \left[x - a_1,\ y,\ \omega + \frac{1}{3}\left(\frac{A_2 B h_2}{D}\right)_{a_1}\right], \\ \mathfrak{a}_1' &= \left[x - a_1,\ y,\ \omega - \frac{2}{3}\left(\frac{A_2 B h_2}{D}\right)_{a_1}\right] \end{aligned}$$

gesetzt wird, wobei zu berücksichtigen ist, dass D auch mit A_1 keinen Factor gemein hat (I, 46), so sind von den 3 conjugirten Primidealen $\mathfrak{p}_{a_1}^{(i)}$ zwei gleich $\mathfrak{a}_1$, das dritte gleich $\mathfrak{a}_1'$, und man erhält

$$(24)\qquad \mathfrak{o}(x - a_1) = \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_1'.$$

Ferner für $x = d_3$ ist zu beachten, dass allgemein

$$9 h_4 k s y + 6 B h_2 \omega = \tilde{y}_3$$

und $\tilde{y}_3$ der Gleichung (I, 41, 42, 48)

$$\tilde{y}_3^3 - 3 A_2 B^2 h_2 \Delta_3 \tilde{y}_3 - A_2 B^2 D \Delta_3^2 = 0$$

genügt, dass mithin für $x = d_3$ die drei conjugirten Werthe von $\tilde{y}_3$ verschwinden und zunächst

$$6(B h_2 \omega)_{d_3} = -9(h_4 k s y)_{d_3}$$

ist.

Da ferner $\Delta(1, y, y^2) \equiv 0 \pmod{x - d_3}$, so hat die Gleichung $F(y, d_3) = 0$ eine Doppelwurzel und diese wird geliefert durch das simultane System

$$y^3 + f_2(d_3)y + f_3(d_3) = 0,$$
$$3y^2 + f_2(d_3) = 0,$$

aus dem sich für jene Doppelwurzel der Werth

$$-\frac{f_3(d_3)}{2f_2(d_3)} = -\left(\frac{A_1 h_4}{h_2}\right)_{d_3}$$

und demgemäss für die einfache Wurzel der Werth $2\left(\frac{A_1 h_4}{h_2}\right)_{d_3}$ ergiebt. Auch diese Form kann nicht befremden, da h_2 relativ prim zu Δ_3 ist (I, 46). Der zur Doppelwurzel y gehörige Werth von ω ist dann

$$\left(\frac{3A_1 h_4^2 ks}{2Bh_2^2}\right)_{d_3}$$

oder gemäss (I, 27)

$$-\frac{2}{9}(A_2 B h_2 ks)_{d_3}$$

und dementsprechend, da $S(\omega) = 0$ ist, der zur einfachen Wurzel y gehörige Werth von ω

$$+\frac{4}{9}(A_2 B h_2 ks)_{d_3}.$$

Nach Einführung der Bezeichnung

$$(25)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{d}_3 &= \left[x - d_3,\ y + \left(\frac{A_1 h_4}{h_2}\right)_{d_3},\ \omega + \frac{2}{9}(A_2 B h_2 ks)_{d_3}\right], \\ \mathfrak{d}_3' &= \left[x - d_3,\ y - 2\left(\frac{A_1 h_4}{h_2}\right)_{d_3},\ \omega - \frac{4}{9}(A_2 B h_2 ks)_{d_3}\right] \end{aligned}$$

schliessen wir, wie vorhin, dass

$$(26)\qquad \mathfrak{o}(x - d_3) = \mathfrak{d}_3^2 \mathfrak{d}_3'.$$

Wir können also unser Resultat dahin zusammenfassen:

Nur die Linearfactoren von $E(x)$ sind durch höhere Potenzen eines Primideals theilbar und zwar die einfachen Linearfactoren durch das Quadrat, die zweifachen Linearfactoren durch die dritte Potenz eines Primideals.

Die Primideale $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}_3$ — die einzigen, von denen eine höhere als die erste Potenz in ihrer Norm aufgeht, — nenne ich *singulär.* Wird dann das *Verzweigungsideal* $\mathfrak{z}$ durch die Gleichung

$$(27)\qquad \mathfrak{z} = \Pi\, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2^2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{d}_3$$

definirt und das Product aller in E oder, was dasselbe ist, aller in r enthaltener von einander verschiedener Primideale durch $\mathfrak{r}$ bezeichnet, so ergeben sich jetzt aus (22), (24), (26) die Gleichungen

$$(28)\qquad N(\mathfrak{z}) = \text{const.} \times \Pi A_1 A_2^2 B^2 \Delta_3 = \text{const.} \times E(x),$$

$$(29)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{r} &= \Pi\, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b} \mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_3', \\ \mathfrak{o}\, r &= \Pi\, \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_2^3 \mathfrak{b}^3 \mathfrak{d}_3^2 \mathfrak{d}_3' \end{aligned}$$

oder

(30) $$\mathfrak{o}r = \mathfrak{r}\mathfrak{z}.$$

Weiter ist aber nach (12) auch $r\mathfrak{e}$ ein Ideal und da

$$N(r\mathfrak{e}) = \text{const.} \times \Pi A_1^2 A_2 B \Delta_3^2$$

nach (11) bloss die Linearfactoren von r enthält, so kann $r\mathfrak{e}$ bloss durch die in r auftretenden Primideale, und es muss $r\mathfrak{e}$ genau durch die ersten Potenzen von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}$ theilbar sein, und man erhält daher für $r\mathfrak{e}$ zunächst die Darstellung

$$r\mathfrak{e} = \Pi\, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b} \mathfrak{a}_1^{e_1} \mathfrak{a}_1'^{e_2} \mathfrak{d}_3^{e_3} \mathfrak{d}_3'^{e_4}.$$

Wenn man aber vorübergehend unter $\mathfrak{a}$ eines der Ideale $\mathfrak{a}_1$ oder $\mathfrak{a}_1'$ versteht, also

$$\mathfrak{a} = [x - a_1,\ y,\ \omega + c]$$

setzt, wo c eine Constante bedeutet, so ist gemäss (9)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Th}(\mathfrak{a}, r\mathfrak{e}) &= [x - a_1,\ y,\ \omega + c, \\
&\qquad r,\ -Cy + 3A_1 h_4 k s\omega,\ 3A_1 h_4 k s y + 2A_1 B h_2 \omega] \\
&= [x - a_1,\ y,\ \omega + c,\ 0,\ A_1 h_4 k s\omega,\ A_1 B h_2 \omega] \\
&= [x - a_1,\ y,\ \omega + c,\ -A_1 h_4 s c,\ -A_1 B h_2 c] \\
&= [x - a_1,\ y,\ \omega + c] = \mathfrak{a};
\end{aligned}$$

d. h. $r\mathfrak{e}$ ist sowohl theilbar durch $\mathfrak{a}_1$ wie durch $\mathfrak{a}_1'$, und da $N(r\mathfrak{e})$ durch $(x - a_1)^2 = N(\mathfrak{a}_1) \cdot N(\mathfrak{a}_1')$ theilbar ist, so muss $r\mathfrak{e}$ genau durch $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1'$ theilbar sein.

Ebenso lässt sich beweisen, dass $r\mathfrak{e}$ genau durch $\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_3'$ theilbar ist und wir erhalten somit

$$r\mathfrak{e} = \Pi\, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_3',$$

oder

(31) $$r\mathfrak{e} = \mathfrak{r},$$

und es folgt dann

$$r\mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{r}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}r,$$

mithin

(32) $$\mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}.$$

Weitere Beziehungen zwischen den hier auftretenden Idealen ergeben sich leicht, sind indessen für die ferneren Entwicklungen nicht nothwendig. Aus (32) folgt noch

$$E\mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}E = \Pi\, \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_2^6 \mathfrak{b}^6 \mathfrak{d}_3^2 \mathfrak{d}_3'$$

oder, wenn

(33) $$\mathfrak{d} = \Pi\, \mathfrak{a}_2^2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{a}_1' \mathfrak{d}_3'$$

gesetzt wird,

$$E\mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^2 \mathfrak{d},$$

mithin

$$E\mathfrak{e} = \mathfrak{z}\mathfrak{d}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit (32), so folgt

$$E\mathfrak{c}^2\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{d},$$

mithin

(34) $$E\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{d},$$

und hieraus zunächst, dass die Functionen $E\varepsilon_i\varepsilon_k$ ganze Functionen, und weiter, dass gerade E *der Hauptnenner für die drei gebrochenen Functionen* $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$ *ist.* Denn bedeutet F irgend eine ganze rationale Function von x derart, dass $F\varepsilon_i\varepsilon_k$ ganze Functionen sind, so muss doch $F\mathfrak{c}^2$ und demgemäss, wenn E_1 den grössten gemeinsamen Theiler von E und F bedeutet, mit Rücksicht auf (34) auch $E_1\mathfrak{c}^2$ ein Ideal sein. Aus

$$E = E_1 E_2$$

folgt dann

$$N(\mathfrak{d}) = N(E_1\mathfrak{c}^2)\cdot E_2^3,$$

es muss also $N(\mathfrak{d})$ durch die dritte Potenz der ganzen rationalen Function E_2 von x theilbar sein, was gemäss (33) nur dann stattfindet, wenn E_2 sich auf eine Constante reducirt, mithin F gleich E selbst oder gleich einem Vielfachen von E ist, woraus das Gesagte sich ergiebt.

§ 3.

Die Riemann'sche Fläche. Darstellung linearer Functionen von x durch Polygonquotienten.

Zu jedem Primideal gehört ein bestimmter Punkt, der sogenannte *„Nullpunkt"* dieses Primideals. Allgemein bezeichnen wir den Nullpunkt des Primideals $\mathfrak{p}_{x_0}^{(i)}$ durch $\mathfrak{P}_{x_0}^{(i)}$ und insbesondere die Nullpunkte der singulären Primideale $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}_3$ d. i. die singulären Punkte bezüglich durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}_3$. Da im Nullpunkte eines Primideales alle Functionen dieses Ideales, insbesondere auch die Basisfunctionen verschwinden müssen, so bedeutet z. B. $\mathfrak{P}_{x_0}^{(i)}$ den Punkt, in welchem $x = x_0$, $y = y_{x_0}^{(i)}$, $\omega = \omega(x_0, y_{x_0}^{(i)})$ ist. Um auch noch die Punkte zu finden, in welchen $x = \infty$ ist, müssen wir noch die Primideale in $\bar{\mathfrak{o}}$, dem System der ganzen Functionen von $\bar{x} = \frac{1}{x}$, aufstellen. Bezeichnen wir den Exponenten von y durch r_2*), so ist

(35) $$\bar{y} = y\cdot\bar{x}^{r_2}$$

*) Ueber die Bestimmung des Exponenten einer beliebigen Function ω des Systems $\mathfrak{o}$ sei folgendes bemerkt: Genügt ω unter der Voraussetzung, dass φ_i ganze rationale Functionen von x sind, der Gleichung

$$\omega^3 + \varphi_1\omega^2 + \varphi_2\omega + \varphi_3 = 0,$$

welche in Bezug auf x vom Grade ϱ ist, so gilt für

$$\bar{\omega}_1 = \omega\bar{x}^{\varrho}$$

eine Function in $\bar{\mathfrak{o}}$. Da diese Function einer Gleichung von derselben Form genügt, wie y, nämlich der Gleichung

$$(36)\qquad \bar{y}^3 + \bar{f}_2(\bar{x})\,\bar{y} + \bar{f}_3(\bar{x}) = 0,$$

worin die Functionen $\bar{f}_2$ und $\bar{f}_3$ ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ sind — dieselben gehen aus den Functionen f_2 und f_3 bezüglich durch Multiplication mit $\bar{x}^{2r_1}$ und $\bar{x}^{3r_1}$ hervor — so bilden die ganzen Functionen

$$(37)\qquad \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= 1,\\ \bar{\omega}_2 &= \bar{y},\\ \bar{\omega}_3 &= \frac{1}{\bar{D}}\left(\frac{2}{3}\,\bar{A}_2\bar{B}\,\bar{h}_2 - 9\,\bar{h}_4\bar{t}\,\bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{A}_1\bar{B}}\right) = \bar{\omega}(x, \bar{y}) \end{aligned}$$

eine Basis von $\bar{\mathfrak{o}}$, wenn man den überstrichenen Grössen in Bezug auf $\bar{f}_2$ und $\bar{f}_3$ dieselbe Bedeutung beilegt wie den entsprechenden nicht überstrichenen Grössen in Bezug auf f_2 und f_3. Daher ist dann weiter

$$[\bar{x} - \bar{x}_0,\ \bar{y} - \bar{y}^{(i)}_{\bar{x}_0},\ \bar{\omega}(\bar{x}, \bar{y}) - \omega(\bar{x}_0, y^{(i)}_{\bar{x}_0})]$$

die allgemeine Form der Primideale in $\bar{\mathfrak{o}}$, und die Punkte $\bar{\mathfrak{P}}'$, $\bar{\mathfrak{P}}''$, $\bar{\mathfrak{P}}'''$ *), in welchen $\bar{x} = 0$, erzeugen daher die Primideale

$$(38)\qquad \bar{\mathfrak{p}}^{(i)} = [\bar{x},\ \bar{y} - \bar{y}^{(i)}_0,\ \bar{\omega}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\omega}(0, \bar{y}^{(i)}_0)].$$

Da nun (vergl. I, 55)

$$(39)\qquad \Delta(\bar{\mathfrak{o}}) = \bar{A}_1\bar{A}_2^2\,\bar{B}^2\bar{\Delta}_3,$$

so ist nach dem Satze Seite 38 $\bar{x}$ durch das Quadrat oder durch die 3$^{\text{te}}$ oder nur durch die erste Potenz eines Primideals theilbar, je nachdem das Product $\bar{A}_1\bar{\Delta}_3$ oder das Product $\bar{A}_2\bar{B}$ oder keines dieser Producte durch $\bar{x}$ theilbar ist.

Enthalten demnach diese Producte den Factor $\bar{x}$ bezüglich $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mal, so ist (vergl. I, § 4 unter Berücksichtigung des in der Einleitung zur vorliegenden Arbeit erwähnten Wechsels in der Bezeichnung)

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{o}}\bar{x} &= \bar{\mathfrak{p}}'\bar{\mathfrak{p}}''\bar{\mathfrak{p}}''', &&\text{wenn } \varkappa_1 = 0,\ \varkappa_2 = 0,\\ \bar{\mathfrak{o}}\bar{x} &= \bar{\mathfrak{p}}^2\bar{\mathfrak{p}}', &&\quad\text{"}\quad \varkappa_1 = 1,\ \varkappa_2 = 0,\\ \bar{\mathfrak{o}}\bar{x} &= \bar{\mathfrak{p}}^3, &&\quad\text{"}\quad \varkappa_1 = 0,\ \varkappa_2 = 1, \end{aligned}$$

---

die andere

$$\bar{\omega}_1^3 + \bar{\varphi}_1\bar{\omega}_1^2 + \bar{\varphi}_2\bar{\omega}_1 + \bar{\varphi}_3 = 0,$$

wo

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i\bar{x}^{i\varrho}$$

ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ sind. Bedeutet nun ϱ_1 die grösste ganze Zahl derart, dass

$$\bar{\varphi}_i \equiv 0 \bmod. \bar{x}^{i\varrho_1} \quad (i = 1, 2, 3),$$

so ist eben noch

$$\omega\bar{x}^{\varrho - \varrho_1} = \bar{\omega}$$

eine ganze Function von $\bar{x}$ und $r = \varrho - \varrho_1$ der Exponent von ω.

*) $\bar{\mathfrak{P}}^{(i)}$ hat dieselbe Bedeutung wie $\mathfrak{P}^{(i)}_\infty$.

und man kann daher in jedem Falle

$$\bar{\mathfrak{v}}\bar{x} = \bar{\mathfrak{p}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{u}_1 \tag{40}$$

setzen, wenn man der Kürze halber durch $\bar{\mathfrak{p}}$ dasjenige vollständig bestimmte Primideal, das unter den conjugirten Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}', \bar{\mathfrak{p}}'', \bar{\mathfrak{p}}'''$ mehrfach auftritt, und durch $\mathfrak{u}_1$ das Product der $(3-\varkappa_1-2\varkappa_2)$ von einander *verschiedenen* in $\bar{\mathfrak{v}}\,\bar{x}$ aufgehenden Primideale bezeichnet.

Daher verschwindet $\bar{x}$ oder es wird, was dasselbe ist, x unendlich gross in 3 Punkten, nämlich $(\varkappa_1+2\varkappa_2)$-mal in dem Nullpunkte $\overline{\mathfrak{P}}$ des Primideales $\bar{\mathfrak{p}}$, und je einmal in den Nullpunkten der $(3-\varkappa_1-2\varkappa_2)$ in $\mathfrak{u}_1$ enthaltenen Primideale.

Da die Variable x mithin *jeden* Zahlenwerth x_0 in drei verschiedenen oder zusammenfallenden Punkten $\mathfrak{P}'_{x_0}, \mathfrak{P}''_{x_0}, \mathfrak{P}'''_{x_0}$ annimmt, so besitzt sie *die Ordnungszahl* 3. Diese drei Punkte mögen zusammen das Polygon $\mathfrak{C}$ bilden, dann ist im Sinne der Herren Dedekind und Weber das Product aller dieser Polygone

$$\Pi\,\mathfrak{C} = T\,\overline{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\,\Pi\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2{}^2\mathfrak{B}^2,$$

wo T die einfache Gesammtheit aller Punkte der *Riemann'schen Fläche* und

$$\mathfrak{Z}_x = \overline{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\,\Pi\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2{}^2\mathfrak{B}^2 \tag{41}$$

das *Verzweigungs-* oder *Windungspolygon* genannt wird; und es kann demnach diese Fläche im *Endlichen sicher nur dann zweifache Verzweigungspunkte besitzen, wenn die in der Grundgleichung auftretenden Coefficienten einen gemeinsamen Theiler haben;* sind diese Coefficienten theilerfremd, so giebt es im Endlichen bloss 0- oder 1-fache Verzweigungspunkte.

Im Anschluss an (40) werde noch das Polygon, in dem $\bar{x} = 0$ oder $x = \infty$ wird, durch $\mathfrak{U}$ bezeichnet; es ist dann

$$\mathfrak{U} = \overline{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{U}_1 \tag{42}$$

das *Untereck von x*, und zwar enthält das Polygon $\mathfrak{U}_1$ alle von einander verschiedenen Punkte, in denen $x = \infty$ ist, aber jeden nur einmal.

Da ferner $x - x_0$ in den Punkten des Polygons $\mathfrak{P}'_{x_0}\mathfrak{P}''_{x_0}\mathfrak{P}'''_{x_0}$ verschwindet, so wird eben dieses Polygon das *Obereck* von $x - x_0$ genannt und wir erhalten somit folgende Darstellungen durch Polygonquotienten: allgemein

$$x - x_0 = \frac{\mathfrak{P}'_{x_0}\mathfrak{P}''_{x_0}\mathfrak{P}'''_{x_0}}{\mathfrak{U}}, \tag{43}$$

und insbesondere

$$\begin{aligned} x - a_1 &= \frac{\mathfrak{A}_1{}^2\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{U}}, \\ x - d_3 &= \frac{\mathfrak{D}_3{}^2\mathfrak{D}_3'}{\mathfrak{U}}, \end{aligned} \tag{44}$$

$$x - a_2 = \frac{\mathfrak{A}_2^3}{\mathfrak{U}},\qquad (44)$$
$$x - b = \frac{\mathfrak{B}^3}{\mathfrak{U}}.$$

Bezüglich des Zusammenhangs der überstrichenen Functionen mit den nicht überstrichenen mache ich noch folgende Bemerkungen. Da $\bar{f}_2$ und $\bar{f}_3$ sich von f_2 bezw. von f_3 nur durch multiplicative Potenzen von $\bar{x}$ unterscheiden, so muss auch der grösste gemeinsame Theiler von $\bar{f}_2$ und $\bar{f}_3$ aus dem von f_2 und f_3 durch Multiplication mit einer bestimmten Potenz von $\bar{x}$ hervorgehen.*) So weiterschliessend und Schritt für Schritt den genannten Zusammenhang verfolgend findet man, dann

$$(45)\quad \begin{array}{l|l|l}
\bar{B} = B \cdot \bar{x}^{\beta'} & \bar{A}_1 = A_1 \bar{x}^{\alpha_1'} & \bar{\Delta}_1 = \Delta_1 \cdot \bar{x}^{3\alpha_1' + 2\alpha_2' + 4\beta} \\
\bar{A} = A \bar{x}^{\alpha'} & \bar{A}_2 = A_2 \bar{x}^{\alpha_2'} & \bar{\Delta}_2 = \Delta_2 \cdot \bar{x}^{6r_2 - (3\alpha_1' + 2\alpha_2' + 4\beta')} \\
\bar{h}_2 = h_2 \bar{x}^{2r_2 - (\alpha' + 2\beta')} & \bar{h}_2 = h_2 \bar{x}^{2r_2 - (\alpha_1' + \alpha_2' + 2\beta')} & \bar{D} = D \cdot \bar{x}^{\delta'} \\
\bar{h}_3 = h_3 \bar{x}^{3r_2 - (\alpha' + 2\beta')} & \bar{h}_4 = h_4 \bar{x}^{3r_2 - (2\alpha_1' + \alpha_2' + 2\beta')} & \bar{\Delta}_3 = \Delta_3 \cdot \bar{x}^{\delta_3'},
\end{array}$$

wo die Exponenten lauter ganze, nicht negative Zahlen sind, zwischen denen gemäss I (23), (46) die Gleichungen

$$\alpha' = \alpha_1' + \alpha_2',$$
$$2\delta' + \delta_3' = 6r_2 - (3\alpha_1' + 2\alpha_2' + 4\beta')$$

bestehen. Es ist dann

$$\bar{A}_1 \bar{\Delta}_3 = A_1 \Delta_3 \bar{x}^{\alpha_1' + \delta_3'},$$
$$\bar{A}_2 \bar{B} = A_2 B \bar{x}^{\alpha_2' + \beta'},$$

und daher (I, § 4)

$$\alpha_1 + \delta_3 + \varkappa_1 = \alpha_1' + \delta_3',$$
$$\alpha_2 + \beta + \varkappa_2 = \alpha_2' + \beta',$$

$$(46)\qquad w_x = \alpha_1' + \delta_3' + 2(\alpha_2' + \beta')$$
$$= 6r_2 - 2(\alpha_1' + \beta' + \delta').$$

Demnach ist *die Verzweigungszahl stets eine gerade Zahl.*

---

*) Aus

$$\bar{A}\bar{B}^2 = \mathrm{Th}(\bar{f}_2, \bar{f}_3) = \mathrm{Th}(f_2 \bar{x}^{2r_2}, f_3 \bar{x}^{3r_2})$$

folgt nämlich

$$x^{3r_2} \cdot \bar{A}\bar{B}^2 = \mathrm{Th}(f_2 x^{r_2}, f_3)$$
$$= AB^2\, \mathrm{Th}(h_2 x^{r_2}, h_3)$$
$$= AB^2\, \mathrm{Th}(x^{r_2}, h_3)$$
$$= AB^2 \cdot x^r \text{ u. s. w.}$$

Da ferner

$$E(x) = \frac{\Delta(1,\, y,\, y^2)}{A_1^2 B^2 D^2},$$

$$\bar{E}(\bar{x}) = \frac{\Delta(1,\, \bar{y},\, \bar{y}^2)}{\bar{A}_1^2\, \bar{B}^2\, \bar{D}^2} = \frac{\Delta(1,\, y,\, y^2) \cdot \bar{x}^{6r_2}}{A_1^2 B^2 D^2 \cdot \bar{x}^{2(\alpha_1' + \beta' + \delta')}},$$

so folgt noch

$$\bar{E}(\bar{x}) = E(x)\, \bar{x}^{w_x}. \tag{47}$$

§ 4.

Differentiale erster Gattung.

Ist nun ϖ eine beliebige ganze Function von x (eine Function in $\mathfrak{o}$), so wird im allgemeinen $\frac{d\varpi}{dx}$ keine ganze Function von x sein; indessen muss das Unterideal von $\frac{d\varpi}{dx}$ in dem Verzweigungsideal aufgehen (D. W. § 23, 5), so dass, wenn

$$\mathfrak{z} \frac{d\varpi}{dx} = \mathfrak{a}$$

gesetzt wird, $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist. Daraus folgt dann wegen (32)

$$\mathfrak{o} \frac{d\varpi}{dx} = \mathfrak{e}\mathfrak{a},$$

so dass, da $\mathfrak{e}$ die charakteristische Eigenschaft (I) der Ideale besitzt, *die Functionen* $\frac{d\varpi}{dx}$ *sämmtlich dem zu* $\mathfrak{o}$ *complementären Modul* $\mathfrak{e}$ *angehören* (D. W. § 23, 5).

Ist weiter η eine beliebige Function in Ω, so wird jeder Ausdruck von der Form

$$\eta\, dx$$

ein Differential in Ω genannt und zwar ein *eigentliches Differential*, wenn $\eta\, dx$ das Differential einer Function in Ω, andernfalls ein uneigentliches oder *Abel'sches Differential;* in beiden Fällen wird dasselbe durch $d\tilde{\eta}$ bezeichnet, so dass

$$d\tilde{\eta} = \eta\, dx.$$

In diesem Sinne kann jede Function η in Ω entweder als eigentlicher oder als Abel'scher *Differentialquotient* aufgefasst und in der Form

$$\eta = \frac{d\tilde{\eta}}{dx}$$

dargestellt werden. Ist $\frac{d\tilde{\eta}}{dx}$ ein eigentlicher Differentialquotient, also $\tilde{\eta}$ eine Function in Ω, so lässt sich leicht zeigen, dass $\frac{d\tilde{\eta}}{dx} = \eta$ als Polygon-

quotient in die Form $\frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}}$ gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgend zwei Polygone bedeuten. Im andern Falle, wenn nämlich $\frac{d\bar{\eta}}{dx}$ ein Abel'scher Differentialquotient ist, muss doch jedenfalls $\frac{d\bar{\eta}}{dx} = \eta$ eine Function in Ω sein, und kann als solche, nöthigenfalls durch zweckmässiges Erweitern, ebenfalls in der Form

$$\eta = \frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}}$$

dargestellt werden, worin $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Polygone bedeuten, deren Ordnungszahlen a und b der Bedingung

$$a + 6 = b + w_x$$

oder

(48) $$a = b + 2p - 2$$

genügen (DW. § 25). Man erhält demnach stets für $\frac{d\bar{\eta}}{dx}$ die Darstellung

(49) $$\frac{d\bar{\eta}}{dx} = \frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{A}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{B}}.$$

Unter *Differentialquotienten erster Gattung* werden dann diejenigen verstanden, bei denen im Untereck bloss die Verzweigungspunkte auftreten, also $\mathfrak{B}$ das Nulleck $\mathfrak{O}$ ist, so dass, wenn $\mathfrak{W}$ ein beliebiges Polygon bedeutet, der Ausdruck

(50) $$\frac{dw}{dx} = u = \frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{P}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{U}_1{}^2\mathfrak{W}}{\Pi\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2{}^2\mathfrak{B}^2}$$

alle Differentialquotienten erster Gattung und nur sie umfasst. Die Ordnungszahl w' des „*Grundpolygons*" $\mathfrak{W}$ ergiebt sich — wegen der gleichen Ordnungszahlen von Ober- und Untereck der Function u in Ω — aus

$$w' + 6 = w_x = 2p + 2,$$

nämlich

(51) $$w' = 2p - 4.$$

Da

$$\mathfrak{o}\, r(x) = \mathfrak{o} A_1 A_2 B \Delta_3 = \Pi\, \mathfrak{a}_1{}^2 \mathfrak{a}_1{}' \mathfrak{d}_3{}^2 \mathfrak{d}_3{}' \mathfrak{a}_2{}^3 \mathfrak{b}^3,$$

so ergiebt sich

$$r(x) = \frac{\Pi\, \mathfrak{A}_1{}^2\mathfrak{A}_1{}'\mathfrak{D}_3{}^2\mathfrak{D}_3{}'\mathfrak{A}_2{}^3\mathfrak{B}^3}{\mathfrak{U}^{\alpha_1+\alpha_2+\beta+\delta_3}}$$

$$= \mathfrak{Z}\,\frac{\Pi\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1{}'\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_3{}'}{\mathfrak{P}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{U}^{\alpha_1+\alpha_2+\beta+\delta_3}},$$

und mithin

$$r(x)\cdot u = \frac{\mathfrak{U}^2\mathfrak{W}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{U}^{\varrho}},$$

wo $\mathfrak{R}$ das Polygon aller von einander verschiedener, im Endlichen gelegener Verzweigungspunkte und ϱ den Grad von $r(x)$ d. h. die

Anzahl aller von einander verschiedener Linearfactoren der Discriminante unseres Körpers bezeichnet.

Da nun andererseits das Ideal $\mathfrak{r}$ die sämmtlichen Functionen enthält, die in $\mathfrak{R}$ verschwinden, so muss $r(x).u$ eine Function in $\mathfrak{r}=r\mathfrak{e}$ und demnach *u eine Function in* $\mathfrak{e}$, also, wenn wiederum u_1, u_2, u_3 ganze rationale Functionen von x bedeuten,

$$u = u_1 \varepsilon_1 + u_2 \varepsilon_2 + u_3 \varepsilon_3$$

sein. Daraus folgt dann:

$$u_i = S(u\,\omega_i).$$

Da nun

$$ux = \frac{\bar{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{U}_1^2\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{P}_0'\mathfrak{P}_0''\mathfrak{P}_0'''}{\Pi\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2^2\mathfrak{B}^2\bar{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}\mathfrak{U}_1} = \frac{\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{P}_0'\mathfrak{P}_0''\mathfrak{P}_0'''}{\Pi\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3\mathfrak{A}_2^2\mathfrak{B}^2},$$

so verschwindet ux in allen Punkten, in denen x unendlich gross ist. Da ferner $\frac{\omega_i}{x^{r_i}}$ dem System $\bar{\mathfrak{o}}$ angehört, so hat diese Function in allen eben genannten Punkten einen endlichen Werth; mithin muss

$$\frac{u_i}{x^{r_i-1}} = S\left(ux\cdot\frac{\omega_i}{x^{r_i}}\right) = 0 \quad \text{für } x=\infty \qquad (i=1,2,3),$$

und daher $u_1=0$ und die Grade von u_2 und u_3 jedenfalls bezüglich kleiner als r_2-1 und r_3-1 sein; d. h.

Alle Differentialquotienten erster Gattung des cubischen Körpers sind enthalten in der Form

$$(52) \qquad \Sigma c_{2\sigma}x^{\sigma-1}\varepsilon_2 + \Sigma c_{3\tau}x^{\tau-1}\varepsilon_3 \qquad \begin{pmatrix}\sigma=1,\ldots r_2-1\\ \tau=1,\ldots r_3-1\end{pmatrix},$$

wo die $c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{31}, c_{32}, \ldots$ constante Grössen sind.

Damit ist aber nicht gesagt, dass bei beliebiger Wahl der Constanten $c_{2\sigma}$, $c_{3\tau}$ auch alle hierin enthaltenen Functionen wirklich Differentialquotienten erster Gattung sind. Diese Frage erfordert vielmehr noch weitere Untersuchungen.

§ 5.
Normalgleichung.

Ich habe die bisherigen Betrachtungen vollständig durchgeführt unter Beibehaltung der in meiner vorigen Arbeit aufgestellten Basis $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ des Systems $\mathfrak{o}$. Nachdem man aber einmal weiss, dass die Gleichungsdiscriminante blos den ausserwesentlichen Factor $A_1^2B^2D^2$ besitzt (I, (50) ff.), kann man in jedem gegebenen Falle rascher und einfacher zur Aufstellung einer solchen Basis gelangen. Da nämlich die ganze Function y^2 und daher auch die ganze Function $y^2-\frac{1}{3}S(y^2)$ durch A_1B (I, p. 509) und weiter die unter I (41) eingeführte ganze

Function y_3' — die übrigens, wie ich gleich hier erwähnen will, abgesehen von dem Factor $\frac{\text{const.}}{A_1^2 A_2 B^2}$ nichts anderes ist, als die Discriminante der Grundgleichung (7) dividirt durch die nach y genommene erste Ableitung der linken Seite dieser Gleichung*) — durch D theilbar ist, so gehören die beiden Functionen

$$(53)\qquad y_4 = -\frac{1}{3} S(y_3) + y_3 = \frac{2}{3} A_2 B h_2 + \frac{y^2}{A_1 B},$$

$$(54)\qquad \bar{y}_3 = \frac{-9h_4 y + 6Bh_2 y_4}{D}$$

dem System $\mathfrak{o}$ an und zwar genügt die erste der Gleichung (vergl. die Gleichung für y_3 Seite 7)

$$y_4^3 - \frac{1}{3} A_2^2 B^2 h_2^2 y_4 + 2 A_2 B^2 h_2^3 + 27 A_1 h_4^2 = 0,$$

die letzte der Gleichung (vergl. Seite 7 unten)

$$\bar{y}_3^3 - 3 A_2 B^2 h_2 \Delta_3 \bar{y}_3 - A_2 B^2 D \Delta_3^2 = 0.$$

Daraus folgt dann, dass auch die Functionen

$$(55)\qquad \begin{aligned} \eta &= \frac{h_5 y + h_6 y_4}{D}, \\ \zeta &= m y_4 + n\eta = \frac{n h_5 y + y_4}{D}, \\ \lambda &= \frac{l y + y_4}{D} \end{aligned}$$

algebraisch ganz sind, wenn h_5, h_6, l bezüglich die mod. D genommenen kleinsten Reste der mit D theilerfremden ganzen rationalen Functionen $-9h_4$, $6Bh_2$ und nh_5 bedeuten, wobei m und n als ganze rationale Functionen von x so bestimmt werden, dass

$$(56)\qquad mD + nh_6 = 1;$$

und wegen der Gleichung

$$\Delta(1, y, \lambda) = \frac{1}{D^2} \Delta(1, y, y_4) = \Delta(\mathfrak{o})$$

bilden *die* 3 *Functionen* $1, y, \lambda$ *ebenfalls eine Basis für* $\mathfrak{o}$. Es tritt dann in dieser Basis ausser A_1, B und D nur noch die eine Function l auf, deren einfachste Bestimmung am Schluss des § 6 gezeigt wird.

Dementsprechend bilden weiterhin die Functionen

$$(57)\qquad 1,\ \bar{y},\ \bar{\lambda} = \frac{\bar{l}\,\bar{y} + \bar{y}_4}{\bar{D}}$$

eine Basis für $\bar{\mathfrak{o}}$, wenn $\bar{l}$ aus $\bar{f}_2$ und $\bar{f}_3$ gerade so abgeleitet wird, wie l aus f_2 und f_3. Dabei ist

$$(58)\qquad \bar{y}_4 = y_4 \cdot \bar{x}^{2r_2 - \alpha_1' - \beta'}.$$

*) Diese Thatsache lässt sich leicht verificiren, erscheint im übrigen aber als specieller Fall eines viel allgemeineren Satzes, auf den ich demnächst zurückzukommen hoffe.

Aber auch diese Basis wird im Allgemeinen nicht beibehalten werden; es wird vielmehr zunächst eine „*Normalgleichung*" des Körpers Ω gebildet werden müssen. Hierzu schicke ich folgende Bemerkungen voraus.

I) Bedeutet ω eine beliebige Function des Körpers Ω, die nicht eine rationale Function von x allein ist, so bilden die 3 Functionen $1, \omega, \omega^2$ eine Basis von Ω.

In der That, der Grad derjenigen Gleichung niedrigsten Grades für ω, die rationale Functionen von x zu Coefficienten hat, muss wegen der vorausgesetzten Irreducibilität der Grundgleichung ein Theiler des Grades dieser Grundgleichung d. h. ein Theiler von 3 sein; es kann also ω, da es keine rationale Function von x allein ist, keiner Gleichung von niedrigerem als dem 3^{ten} Grade genügen und es sind mithin die 3 Functionen $1, \omega, \omega^2$ rational unabhängig, woraus das Gesagte folgt.

Ist hiernach

$$\omega^3 + g_1(x)\,\omega^2 + g_2(x)\,\omega + g_3(x) = 0$$

die in Rede stehende Gleichung, so muss dieselbe irreducibel sein und kann ebenfalls zur Definition des Körpers Ω benutzt werden.

II) Setzt man, unter c eine Constante verstehend, $x = x_1 - c$, so ist jede ganze Function ω von x gleichzeitig eine ganze Function von x_1, und der Exponent r von ω in Bezug auf x ist zugleich der Exponent von ω in Bezug auf x_1.

Der erste Theil dieser Behauptung ist ohne Weiteres klar und ergiebt sich auch unmittelbar aus der eben aufgestellten Gleichung für ω, in welcher jetzt g_1, g_2, g_3 *ganze* rationale Functionen von x bedeuten. Für die zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehörende Function

$$\bar{\omega} = \omega \bar{x}^r$$

besteht dann die Gleichung

$$\bar{\omega}^3 + \bar{g}_1(\bar{x})\,\bar{\omega}^2 + \bar{g}_2(x)\,\bar{\omega} + \bar{g}_3(\bar{x}) = 0,$$

wo

$$\bar{g}_i = g_i \bar{x}^{ir} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ist und in Folge der Bedeutung des Exponenten nicht etwa für alle 3 Werthe von i zugleich die Congruenz $\bar{g}_i \equiv 0 \text{ mod. } \bar{x}^i$ stattfindet. Demnach überschreitet zwar der Grad von g_i die Zahl ir nicht, aber er ist auch nicht für die 3 Werthe von i zugleich kleiner oder ebenso gross wie $i(r-1)$.

Durch die genannte Transformation geht nun die Gleichung für ω über in

$$\omega^3 + g_{11}(x_1)\,\omega^2 + g_{21}(x_1)\,\omega + g_{31}(x_1) = 0,$$

wo die ganzen rationalen Functionen g_{i1} von demselben Grade wie die g_i sind, und es genügt daher die Function

$$\omega \bar{x}_1^r = \bar{\omega}_1$$

der Gleichung

$$\bar{\omega}_1^3 + \bar{g}_{11}(x_1)\,\bar{\omega}_1^2 + \cdots = 0,$$

in welcher

$$\bar{g}_{i1} = g_{i1}\bar{x}_1^{ir} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ganze rationale Functionen von $\bar{x}_1$ sind. Es ist mithin $\bar{\omega}_1$ eine ganze Function von $\bar{x}_1$ und demnach der Exponent von ω in Bezug auf x_1 jedenfalls nicht grösser wie r. Derselbe kann aber auch nicht kleiner wie r sein, denn sonst müsste $\bar{\omega}_1$ durch $\bar{x}_1$ d. h. $\bar{g}_{i1}$ durch $\bar{x}_1^i$ theilbar, mithin der Grad von g_{i1} oder, was dasselbe ist, der Grad von g_i $\leq i(r-1)$ sein, und zwar für $i = 1, 2, 3$, was nicht stattfindet. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nunmehr bilden wir eine *Normalgleichung* des cubischen Körpers nach folgender für die Praxis geeigneten Vorschrift:

Die gegebene Grundgleichung

$$(1) \qquad F(y, x) = y^3 + f_2(x)\,y + f_3(x) = 0$$

ging durch die Substitution

$$(35) \qquad y\bar{x}^{r_2} = \bar{y}$$

über in

$$(36) \qquad \bar{F}(y, \bar{x}) = \bar{y}^3 + \bar{f}_2(\bar{x})\,y + \bar{f}_3(\bar{x}) = 0.$$

Enthält nun die in dem ausserwesentlichen Theiler von $\bar{\Delta}$ auftretende Function $\bar{D}$, die eine ganze rationale Function von $\bar{x}$ ist und jetzt ausführlicher durch $\bar{D}(\bar{y})$ bezeichnet werden soll, den Factor $\bar{x}$, so setze man

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - c_1, \quad \bar{y} = \bar{y}_1$$

und wähle — was immer geschehen kann — die Constante c_1 so, dass $\bar{D}(\bar{y})$ nicht mehr durch $\bar{x}_1$ theilbar ist. Hierdurch gehe die vorige Gleichung über in

$$\bar{F}(\bar{y}_1, \bar{x}_1) = \bar{y}_1^3 + \bar{f}_{21}(\bar{x}_1)\,y_1 + \bar{f}_{31}(\bar{x}_1) = 0,$$

dann ist der Exponent von $\bar{y}_1$ in Bezug auf $\bar{x}_1$ nach II) auch gleich r_2. Setzt man daher

$$\bar{y}_1 x_1^{r_2} = y_1,$$

so erhält man für Ω eine neue Grundgleichung

$$(1_1) \qquad F_1(y_1, x_1) = y_1^3 + f_{21}(x_1)\,y_1 + f_{31}(x_1) = 0$$

und es hat y_1 in Bezug auf x_1 ebenfalls den Exponenten r_2,*) während jetzt $\bar{D}(\bar{y}_1)$ nicht mehr durch $\bar{x}_1$ theilbar ist.

*) Darin ist die Thatsache enthalten: Ist y eine ganze Function von x mit dem Exponenten r_2 und setzt man $x = \frac{x_1}{1 - c_1 x_1}$, so ist $y_1 = y(1 - c_1 x_1)^{r_2}$ eine ganze Function von x_1 und r_2 die niedrigste ganze Zahl, für welche dies statt-

Bildet man zu $1, y_1$ als dritte Basisfunction des Systems $\mathfrak{o}_1$ der ganzen Functionen von x_1 das zugehörige $\lambda_1 = y_1'$, und ist der Exponent r' von y_1' in Bezug auf x_1 kleiner als r_2, so bilde man die Gleichung für y_1', etwa

$$(1') \qquad y_1'^3 + f_2'(x_1)\, y_1' + f_3'(x_1) = 0,$$

in welcher f_2', f_3' ganze rationale Functionen von x_1 sind — dies ist die zutreffende Form, da $S(y_1') = S(\lambda_1) = 0$; ausserdem ist diese Gleichung nach I) irreducibel, da in λ sicher y^2, mithin in y_1' sicher y_1^2 vorkommt — und sieht jetzt (1′) gemäss I) als Grundgleichung für Ω an. Dieser steht dann vermöge der Relation

$$y_1'\, \bar{x}_1^{r'} = \bar{y}_1'$$

die andere

$$\bar{y}_1'^3 + \bar{f}_2'(\bar{x}_1) \cdot \bar{y}_1' + \bar{f}_3'(\bar{x}_1) = 0$$

zur Seite, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $\bar{x}_1$ sind, und wenn jetzt das entsprechende $\bar{D}(\bar{y}_1')$ wieder durch $\bar{x}_1$ theilbar sein sollte, so kann man durch Wiederholung des vorigen Verfahrens d. i. durch Substitutionen von der Form

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 - c_2, \quad \bar{y}_1 = \bar{y}_2, \quad \bar{y}_2 x_2^{r'} = y_2$$

die beiden Gleichungen

$$\bar{y}_2^3 + \bar{f}_{22}(\bar{x}_2)\, \bar{y}_2 + \bar{f}_{32}(\bar{x}_2) = 0,$$

$$(1_1') \qquad y_2^3 + f_{22}(x_2)\, y_2 + f_{32}(x_2) = 0$$

herleiten, wo jetzt wiederum das entsprechende $\bar{D}(\bar{y}_2)$ nicht durch $\bar{x}_2$ theilbar, der *Exponent von* y_2 in Bezug auf x_2 aber gleich r' und mithin *kleiner wie* r_2 ist. Nunmehr wird $(1_1')$ als Grundgleichung für Ω angenommen. Bildet man nun wiederum zu $1, y_2$ als 3te Basisfunction das zugehörige $\lambda_2 = y_2'$, so schlägt man, falls der Exponent r'' der dritten Basisfunction y_2' wieder kleiner als der der zweiten Basisfunction y_2 d. i. kleiner als r' sein sollte, wiederum dasselbe Verfahren ein. Man kommt so zu immer neuen Grundgleichungen. Da sich aber hierbei der Exponent der zweiten Basisfunction fortwährend erniedrigt, so kommt man jedenfalls nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einer solchen Basis $1, y_\nu, y_\nu'$ für das System $\mathfrak{o}_\nu$ der ganzen Functionen von x_ν, bei der der Exponent der dritten Basisfunction y_ν' in Bezug auf die Variable x_ν nicht kleiner ist wie der der zweiten Basisfunction y_ν, während gleichzeitig das entsprechende $\bar{D}(\bar{y}_\nu)$ den Factor $\bar{x}_\nu$ nicht enthält. Dabei ist x_ν eine gebrochene lineare Function von x,

findet. Weiter ist der Exponent von y_1 in Bezug auf x_1 gleich dem von y in Bezug auf x. Dies ergiebt sich direct nach Ausführung der Substitution aus der Grundgleichung. Das oben auseinandergesetzte Verfahren dürfte sich aber für die Praxis am Besten eignen.

y_ν eine rationale Function von x und y. Die Gleichung für y_ν soll dann endgültig als Grundgleichung für Ω beibehalten und als eine *Normalgleichung* für Ω bezeichnet werden. Da diese Normalgleichung aber dieselbe Form hat, wie die gegebene Grundgleichung, so setze ich von jener Grundgleichung von jetzt ab voraus, dass sie bereits durch die eben angeführten, in jedem Falle ausführbaren Transformationen zur Normalgleichung gemacht sei d. h. ich *setze voraus:*

I. *dass die zur Gleichung* (36) *gehörige Function* $\overline{D}$ *den Factor* $\bar{x}$ *nicht enthalte,*

II. *dass* $r_3 \geqq r_2$, *d. h. dass der Exponent von* λ *in Bezug auf* x *nicht kleiner sei als der von* y.

Zwischen diesen Exponenten r_2 und r_3 besteht nun ein einfacher Zusammenhang. Derselbe ergiebt sich aus der Bedingung, dass in Folge der Bedeutung des Exponenten

$$\lambda \bar{x}^{r_3} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 \bar{y} + \bar{k}_3 \bar{\lambda},$$

und

$$\bar{k}_1, \; \bar{k}_2, \; \bar{k}_3$$

ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ ohne den gemeinsamen Theiler $\bar{x}$ sein müssen.

Nimmt man von beiden Seiten die Spur, so folgt zunächst

$$\bar{k}_1 = 0,$$

und aus der Thatsache, dass $1, y, y_4$ ein System linear unabhängiger Functionen bilden, weiter mit Rücksicht auf (55) und (58)

$$\frac{\bar{x}^{r_3}}{D} = \frac{\bar{k}_3}{\overline{D}} \bar{x}^{2r_2 - \alpha_1' - \beta'},$$

d. i. wegen (45)

$$\bar{k}_3 = \bar{x}^{r_3 + \alpha_1' + \beta' + \delta' - 2r_2} = \bar{x}^{r_3 + r_2 - \frac{1}{2} w_x},$$

und schliesslich

$$\frac{l \bar{x}^{r_3}}{D} = \bar{k}_2 \bar{x}^{r_2} + \bar{k}_3 \frac{\bar{l}}{\overline{D}} \bar{x}^{r_2},$$

d. i.

$$\bar{k}_2 = \frac{l \bar{x}^{\delta' + r_3 - r_2} - \bar{l} \bar{x}^{r_3 + r_2 - \frac{1}{2} w_x}}{\overline{D}}.$$

Die Gleichung für $\bar{k}_3$ sagt aus, dass

$$r_3 + r_2 - \tfrac{1}{2} w_x \geqq 0$$

sein muss. Ferner muss der Bedeutung von l nach der Grad dieser Function kleiner wie der von D, mithin zufolge (45) jedenfalls auch kleiner wie δ' sein, zudem ist $r_3 \geqq r_2$; der Zähler des vorstehenden Bruches ist demnach eine ganze rationale Function von $\bar{x}$, und da

auch $\bar{k}_2$ eine ebensolche Function ist, so folgt, dass jener Zähler durch $\bar{D}$ theilbar und demnach zwischen l und $\bar{l}$ eine Gleichung von der Form

$$l\bar{x}^{\delta'+r_3-r_2} - \bar{l}\bar{x}^{r_3+r_2-\frac{1}{2}w_x} = c(1+xg)\,\bar{x}^{\gamma}\,\bar{D}$$

bestehen muss, wo c eine Constante, $\bar{g}$ eine ganze rationale Function von $\bar{x}$ und γ eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet. Demgemäss ist dann

$$\bar{k}_2 = c(1+x\bar{g})\,\bar{x}^{\gamma}.$$

Nun können 2 Fälle eintreten:

1) $\bar{k}_2 \equiv 0 \bmod. \bar{x}$, dann darf $\bar{k}_3$ nicht durch $\bar{x}$ theilbar, es muss vielmehr

$$r_2 + r_3 = \frac{1}{2}w_x; \quad \bar{k}_3 = 1$$

sein.

2) $\bar{k}_2$ ist nicht congruent 0 mod. $\bar{x}$, dann muss

$$\gamma = 0,$$
$$\bar{k}_2 = c(1+\bar{x}\bar{g}), \qquad c \neq 0$$

und

$$l\bar{x}^{\delta'+r_3-r_2} - \bar{l}\bar{x}^{r_3+r_2-\frac{1}{2}w_x} = c(1+xg)\,D$$

sein, und daraus ergiebt sich die Congruenz

$$c\bar{D} \equiv -\bar{l}x^{r_3+r_2-\frac{1}{2}w_x} \pmod{\bar{x}},$$

die — da $\bar{D}$ nicht congruent 0 mod. $\bar{x}$ — jedenfalls nur dann bestehen kann, wenn auch jetzt

$$r_2 + r_3 = \frac{1}{2}w_x$$

ist.

Diese wichtige Gleichung besteht daher in jedem Falle und aus ihr folgt

$$\bar{k}_3 = 1,$$
$$\lambda\bar{x}^{r_3} = \bar{k}_2\bar{y} + \bar{\lambda}.$$

§ 6.

Normalbasis und vollständiges System von Differentialen erster Gattung.

Setzt man jetzt der Bequemlichkeit wegen

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1, && \lambda_1' = 1, \\ (59)\qquad &\lambda_2 = y, && \lambda_2' = \lambda_2\bar{x}^{r_2} = \bar{y}, \\ &\lambda_3 = \lambda, && \lambda_3' = \lambda_3\bar{x}^{r_3} = \bar{k}_2 y + \bar{\lambda}, \end{aligned}$$

so ist

$$\Delta(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3') = \Delta(1, \bar{y}, \lambda) = \Delta(\bar{\mathfrak{o}})$$

und demgemäss bilden die Functionen $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ eine Basis für $\bar{\mathfrak{o}}$. Wegen der hierin enthaltenen Eigenschaft der Basis $1, y, \lambda$ soll diese jetzt eine *Normalbasis* genannt werden.*)

Bezeichnet man weiter von nun an durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nicht mehr die zu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, sondern die zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *complementäre*, durch $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'$ die zu $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ complementäre Basis, so ist (D. W. § 10, 5))

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = \varepsilon_2 x^{r_2}, \quad \varepsilon_3' = \varepsilon_3 x^{r_3}$$

und es folgt gerade wie in § 4, dass alle Differentialquotienten erster Gattung in der Form

$$u = \Sigma c_{2\sigma} x^{\sigma-1} \varepsilon_2 + \Sigma c_{3\tau} x^{\tau-1} \varepsilon_3 \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \ldots r_2 - 1 \\ \tau = 1, \ldots r_3 - 1 \end{pmatrix}$$

enthalten sind, wo die $c_{21}, c_{22}, \ldots c_{31}, c_{32}, \ldots$ constante Grössen bedeuten. Umgekehrt ist aber jetzt auch jede in dieser Form enthaltene Function ein Differentialquotient erster Gattung.

Da nämlich $\mathfrak{e}\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, d. h. jede Function in $\mathfrak{e}$, insbesondere also auch u, multipliciert mit jeder Function in $\mathfrak{z}$ eine ganze Function ist, so kann u im Endlichen blos in den Punkten ∞ gross werden, in denen $\mathfrak{z}$ verschwindet, d. i. in den Punkten des Polygons $\Pi \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{B}^2 \mathfrak{D}_3$. Da ferner

$$u x^2 = \varepsilon_2' \Sigma c_{2\sigma} \bar{x}^{r_2-1-\sigma} + \varepsilon_3' \Sigma c_{3\tau} \bar{x}^{r_3-1-\tau} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, \ldots r_2 - 1 \\ \tau = 1, \ldots r_3 - 1 \end{pmatrix},$$

so gehört ux^2 dem Modul $\bar{\mathfrak{e}}$ an, und es kann daher ux^2 im Unendlichen blos in den Punkten ∞ gross werden, in denen $\bar{\mathfrak{z}}$ verschwindet, d. i. wegen (27) und (39) in $\bar{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2}$, im Endlichen aber blos in den Punkten in denen u selbst unendlich gross wird. Daher sind die Unendlichkeitsstellen von ux^2 alle enthalten in dem Polygon

$$\bar{\mathfrak{P}}^{\varkappa_1+2\varkappa_2} \Pi \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{B}^2 \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{Z}$$

und es kann daher, wenn $\mathfrak{C}$ ein gleich näher zu bestimmendes Polygon bedeutet,

$$u x^2 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{Z}}$$

gesetzt werden, woraus sich zunächst wegen (43)

$$u = \frac{\mathfrak{U}^2 \mathfrak{C}}{(\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_0' \mathfrak{P}_0'')^2 \mathfrak{Z}}$$

ergiebt. Da aber jede Function des Moduls $u\mathfrak{z}$ eine ganze Function ist und demgemäss an keiner der Stellen $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_0' \mathfrak{P}_0''$ ∞ gross wird,

*) Es lässt sich leicht direct beweisen, dass $1, y, \lambda$ auch eine Normalbasis im Sinne der Herren Dedekind und Weber ist.

und da ferner das Polygon $\mathfrak{U}$ relativ prim zu $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_0'\mathfrak{P}_0''$ ist (42), so muss $\mathfrak{C}$ durch $(\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_0'\mathfrak{P}_0'')^2$ theilbar sein, so dass, wenn $\mathfrak{W}$ ein neues Polygon bedeutet, $\mathfrak{C} = (\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_0'\mathfrak{P}_0'')^2\,\mathfrak{W}$, mithin

$$u = \frac{\mathfrak{U}^2\,\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}}$$

gesetzt werden kann, und demnach wirklich ein Differentialquotient erster Gattung ist, w. z. b. w.

Die Werthe von ε_1, ε_2, ε_3 lassen sich leicht angeben. Nach D. W, § 10, 8) heisst nämlich die zu $1, y, y^2$ complementäre Basis in unserem Falle

$$\frac{f_2 + y^2}{F'(y)},\quad \frac{y}{F'(y)},\quad \frac{1}{F'(y)},$$

wobei

$$F'(y) = \frac{\partial F(y, x)}{\partial y} \tag{60}$$

gesetzt ist, und der Satz von Nr. 5 desselben Paragraphen liefert, da

$$\lambda = \frac{2}{3}\frac{f_2}{A_1BD} + \frac{l}{D}\,y + \frac{1}{A_1BD}\,y^2,$$

die Gleichungen

$$\frac{y^2 + f_2}{F'(y)} = \varepsilon_1 + \frac{2}{3}\frac{f_2}{A_1BD}\,\varepsilon_3,$$

$$\frac{y}{F'(y)} = \varepsilon_2 + \frac{l}{D}\,\varepsilon_3,$$

$$\frac{1}{F'(y)} = \frac{1}{A_1BD}\,\varepsilon_3,$$

woraus

$$\varepsilon_3 = \frac{A_1BD}{F'(y)},\quad \varepsilon_2 = \frac{y - A_1Bl}{F'(y)},\quad \varepsilon_1 = \frac{1}{3} \tag{61}$$

sich ergiebt.

Wir kommen also zu dem Resultat:

Die Differentiale

$$\begin{aligned} dw_\sigma &= \frac{A_1BD}{F'(y)}\,x^{\sigma-1}\,dx \qquad (\sigma = 1, \cdots r_3 - 1),\\ dw_{r_3-1+\tau} &= \frac{y - A_1Bl}{F'(y)}\,x^{\tau-1}\,dx \qquad (\tau = 1, \cdots r_2 - 1) \end{aligned} \tag{62}$$

bilden ein vollständiges System von linear unabhängigen Differentialen erster Gattung. Die Anzahl derselben ist

$$(r_2 - 1) + (r_3 - 1) = \tfrac{1}{2}\,w_x - 2 = p,$$

sie ist *gleich dem Geschlecht des Körpers* Ω.

Jedes andere Differential erster Gattung dw kann, wenn $c_1, c_2, \ldots c_p$ Constanten bedeuten, in der Form dargestellt werden:

$$dw = c_1\,dw_1 + c_2\,dw_2 + \cdots + c_p\,dw_p, \tag{63}$$

und da nach den Euler'schen Formeln

$$S(\varepsilon_2) = S(\varepsilon_3) = 0$$

ist, so gilt stets die Gleichung

$$S\left(\frac{dw}{dx}\right) = 0, \tag{64}$$

d. i. *das Abel'sche Theorem für Differentiale erster Gattung.*

Damit sind denn auch die *Riemann'schen φ-Functionen* für den cubischen Körper fertig gebildet. Setzt man

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 B D, \\ \varphi_2 &= y - A_1 B l, \end{aligned} \tag{65}$$

so bilden die p Functionen

$$\begin{aligned} &\varphi_1,\ \varphi_1 x,\ \ldots,\ \varphi_1 x^{r_1-2}, \\ &\varphi_2,\ \varphi_2 x,\ \ldots,\ \varphi_2 x^{r_2-2} \end{aligned} \tag{66}$$

ein *vollständiges System von Riemann'schen φ-Functionen* und jede andere Function φ ist in der Form enthalten:

$$\begin{aligned} \varphi = {} & \varphi_1(c_1 + c_2 x + \cdots + c_{r_1-1} x^{r_1-2}) \\ & + \varphi_2(c_1' + c_2' x + \cdots + c_{r_2-1}' x^{r_2-2}), \end{aligned}$$

derart, dass auch umgekehrt bei beliebiger Wahl der Constanten c_σ, c_τ' der vorstehende Ausdruck eine φ Function liefert (vergl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, ges. Werke, II. Aufl., Seite 117).

Bemerkenswerth ist noch die Form dieser Functionen. Es ist nämlich φ_1 nichts anderes als *die Quadratwurzel aus dem ausserwesentlichen Theiler der Discriminante der Normalgleichung*, der ja stets ein volles Quadrat ist, nämlich (vergl. I, Seite 518 und diese Abhandlung Seite 16)

$$\varphi_1 = A_1 B D = \sqrt{\frac{\Delta(1, y, y^2)}{\Delta(1, y, \lambda)}}. \tag{67}$$

Was ferner φ_2 angeht, so kommt darin ausser den bereits in dem gemeinsamen Theiler der Gleichungscoefficienten f_2 und f_3 auftretenden Factoren A_1 und B nur noch die auch für λ charakteristische Function l vor. Dieselbe genügt, wie die Betrachtung der Seite 17 auftretenden Functionen zeigt, der Congruenz

$$6 B h_2 l \equiv h_6 l \equiv h_6 n h_5 \equiv h_5 \equiv -9 h_4 \quad (\text{mod. } D)$$

oder

$$2 B h_2 l + 3 h_4 \equiv 0 \quad (\text{mod. } D)$$

oder auch

$$2 R(B h_2)\, l + 3 R(h_4) \equiv 0 \quad (\text{mod. } D), \tag{68}$$

wenn man jetzt der Anschaulichkeit halber durch $R(Bh_2)$ und $R(h_4)$

die nach dem Modul D genommenen kleinsten Reste von Bh_2 bezw. h_4 bezeichnet.

Umgekehrt ist auch l *vollkommen bestimmt durch die Bedingung, dass es diejenige ganze rationale Function von x sein soll, die der Congruenz* (68) *genügt und von niedrigerem Grade wie D ist.* Die Bestimmung von l erweist sich demnach als unabhängig von den früher eingeführten Hülfsfunctionen. Beiläufig folgt noch aus (68), da h_4 theilerfremd zu D ist, dass auch l mit D keinen Factor gemeinsam hat.

§ 7.

Beispiele.

Zur Veranschaulichung der vorstehenden Entwicklungen will ich dieselben nun für einen speciellen Fall, bezw. für 2 concrete Beispiele durchführen.

Der specielle Fall, den ich wegen seines häufigen Vorkommens besonders hervorheben will, ist der, dass der ausserwesentliche Theiler $A_1^2 B^2 D^2$ der Discriminante der Normalgleichung keine anderen Factoren enthält, als solche, die bereits in dem gemeinsamen Theiler der Coefficienten f_2 und f_3 jener Gleichung auftreten. *In diesem Falle ist* $D = 1$, mithin $l = 0$, die 3 Functionen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = y_4$ bilden eine Normalbasis, und die p Differentiale

$$dw_\sigma = \frac{A_1 B}{F'(y)} x^{\sigma-1} dx \qquad (\sigma = 1, \ldots r_3 - 1),$$

$$dw_{r_3-1+\tau} = \frac{y}{F'(y)} x^{\tau-1} dx \qquad (\tau = 1, \ldots r_2 - 1)$$

ein vollständiges System von Differentialen I. Gattung, mit der Massgabe, dass jetzt r_3 einfach den Exponenten von y_4 oder, was dasselbe ist, den von $y_3 = \frac{y^2}{A_1 B}$ bedeutet, und demgemäss den Werth

$$2r_2 - \alpha_1' - \beta'$$

hat. Hierher gehört z. B. die bekannte Curve 4ter Ordnung

$$y^3 + x^3 y + x = 0,$$

für welche

$$r_2 = 2, \quad r_3 = 3, \quad D = 1, \quad \overline{D} = 1$$

und

$$p = (r_2 - 1) + (r_3 - 1) = 3$$

ist, was mit den Betrachtungen von Riemann und Clebsch insofern stimmt, als die vorliegende Curve weder Doppel- noch Rückkehrpunkte besitzt und dementsprechend das Geschlecht

$$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} - 0 - 0 = 3$$

haben muss. Die zugehörigen Differentiale erster Gattung heissen

$$dw_1 = \frac{dx}{F'(y)}, \quad dw_2 = \frac{x\,dx}{F'(y)}, \quad dw_3 = \frac{y\,dx}{F'(y)}.$$

Die Rechnungen sind indessen zu einfach, als dass ich sie hier, namentlich mit Rücksicht auf die folgenden Beispiele, im Einzelnen ausführen sollte.

Ich betrachte jetzt den Fall, dass D *eine lineare Function von* x ist. Dies findet z. B. statt bei der Gleichung

$$F(y, x) = y^3 - 3xy + x^6(9x - 11) = 0.$$

Dieselbe ist irreducibel. Denn wäre sie reducibel, so müsste $F(y, x)$ einen Factor von der Form $y - R(x)$ enthalten, wo $R(x)$ eine ganze rationale Function und zwar ein Theiler von $x^6(9x - 11)$ sein müsste. Man sieht aber leicht, dass ein solcher Werth $R(x)$, für y gesetzt, der Gleichung $F(y, x) = 0$ nicht genügt. Die Gleichung $F(y, x) = 0$ kann daher als Grundgleichung eines Körpers Ω angenommen werden. Ihr steht dann vermöge der Relation

$$\bar{y} = y\bar{x}^3$$

die andere

$$\bar{y}^3 - 3\bar{x}^5\bar{y} + \bar{x}^2(9 - 11\bar{x}) = 0$$

zur Seite und es ergeben sich dann folgende Resultate:

$$f_2 = -3x, \quad f_3 = x^6(9x - 11),$$

$$AB^2 = \mathrm{Th}(f_2, f_3) = x, \quad B = 1, \quad A = x,$$

$$h_2 = \frac{f_2}{AB^2} = -3, \quad h_3 = \frac{f_3}{AB^2} = x^5(9x - 11),$$

$$A_1 = \mathrm{Th}(A, h_3) = x, \quad A_2 = \frac{A}{A_1} = 1, \quad h_4 = \frac{h_3}{A_1} = x^4(9x - 11),$$

$$\frac{1}{27}\Delta = \frac{4}{27}f_2^3 + f_3^2 = -4x^3 + x^{12}(9x - 11)^2,$$

$$\Delta_1 = A_1^3 A_2^2 B^4 = x^3,$$

$$\frac{1}{27}\Delta_2 = \frac{1}{27}\frac{\Delta}{\Delta_1} = -4 + x^9(9x - 11)^2, \quad \frac{d\Delta_2}{dx} = x^8(9x - 11)(x - 1),$$

$$D = G\left(\Delta_2^{\frac{1}{2}}\right) = x - 1, \quad R(Bh_2) = -3, \quad R(h_4) = -2,$$

$$\frac{1}{27}\Delta_3 = \frac{1}{27}\frac{\Delta_2}{D^2} = \frac{x^9(9x - 11)^2 - 4}{(x - 1)^2} = 81x^9 + \cdots,$$

$$y_1 = \frac{y^2}{A_1 B} + \frac{2}{3}A_2 B h_2 = \frac{y^2}{x} - 2.$$

Schliesslich ist l bestimmt durch die Congruenz

(68) $2R(Bh_2)\,l + 3R(h_4) = 2\cdot -3l + 3\cdot -2 \equiv 0 \pmod{x-1}$,

also

$$l = -1$$

und

(56) $$\lambda = \frac{-y+y_4}{x-1}.$$

Ferner entsprechend:

$$\bar{y} = y\,.\,\bar{x}^3, \quad r_2 = 3,$$
$$\bar{f}_2 = -3\bar{x}^5, \quad \bar{f}_3 = \bar{x}^2(9-11\bar{x}),$$
$$\bar{A}\,\bar{B}^2 = \bar{x}^2, \quad \bar{B} = \bar{x}, \quad \beta = 0, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \beta' = 1,$$
$$\bar{A} = 1, \quad \bar{h}_2 = -3\bar{x}^3, \quad \bar{h}_3 = 9 - 11\bar{x},$$
$$\bar{A}_1 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1' = 1, \quad \bar{A}_2 = 1, \quad \alpha_2 = 0,$$
$$\bar{h}_4 = 9 - 11\bar{x},$$
$$\frac{1}{27}\bar{\Delta} = -4\bar{x}^{15} + \bar{x}^4(9-11\bar{x})^2, \quad \bar{\Delta}_1 = \bar{x}^4,$$
$$\frac{1}{27}\bar{\Delta}_2 = -4\bar{x}^{11} + (9-11\bar{x})^2, \quad \bar{D} = \bar{x} - 1, \quad \delta' = 1,$$
$$\frac{1}{27}\bar{\Delta}_3 = \frac{-4\bar{x}^{11} + (9-11\bar{x})^2}{(\bar{x}-1)^2}, \quad \delta_3 = 9, \quad \varkappa_1 = 0,$$
$$\bar{y}_4 = \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}} - 2\bar{x}^4.$$

Aus

$$\bar{D} = \bar{x} - 1, \quad R(\bar{B}\bar{h}_2) = -3, \quad R(\bar{h}_4) = -2$$

folgt dann wie vorhin

$$l = -1 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{y}+\bar{y}_4}{\bar{x}-1}.$$

Nach I, (56) ergiebt sich demnach

$$w_x = \alpha_1 + \delta_3 + \varkappa_1 + 2(\alpha_2 + \beta + \varkappa_2) = 1 + 9 + 2\cdot 1 = 12,$$
$$p = \frac{1}{2}w_x - 2 = 4$$

oder in Uebereinstimmung hiermit nach (45)

$$w_x = 6r_2 - 2(\alpha_1' + \beta' + \delta') = 6\cdot 3 - 2(1+1+1) = 12.$$

Da

$$-\Delta(0) = A_1 A_2^2 B^2 \Delta_3 = x\,\Delta_3,$$
$$-\Delta(\bar{0}) = \bar{x}^2\bar{\Delta}_3,$$

so besitzt der Körper im Endlichen 10 einfache, im Unendlichen 1 doppelten Verzweigungspunkt (vergl. I, p. 519). —

Weiter folgt

$$\bar{y}_4 = y^2 \frac{\bar{x}^6}{\bar{x}} - 2\bar{x}^4 = y_4 \cdot \bar{x}^4$$

und

$$\lambda \bar{x}^3 = \frac{-\bar{x}\bar{y} + \bar{y}_4}{1 - \bar{x}} = \bar{y} + \bar{\lambda};$$

der Exponent von λ ist mithin nicht kleiner wie der von y — es ist $r_3 = r_2 = 3$ —; ausserdem enthält $\overline{D}$ den Factor $\bar{x}$ nicht. Die vorliegende Gleichung erfüllt daher die Bedingungen einer Normalgleichung. Und in der That ist auch

$$(r_2 - 1) + (r_3 - 1) = 2 + 2 = 4 = p;$$

und die 4 Differentiale

$$dw_1 = \frac{x(x-1)}{F'(y)}\,dx, \qquad dw_2 = \frac{x^2(x-1)}{F'(y)}\,dx,$$

$$dw_3 = \frac{y+x}{F'(y)}\,dx, \qquad dw_4 = \frac{y+x}{F'(y)}\,x\,dx$$

bilden ein vollständiges System von Differentialen erster Gattung.

Zum Schlusse noch ein Beispiel, wo D *eine ganze rationale Function* 2^{ten} *Grades* ist. Dazu benutzen wir die Gleichung

$$F(y, x) =$$
$$y^3 + 3(x+1)^2 \cdot \{x(x-1)(33x-1) - 4\}\,y - 16(9x-1) = 0.$$

Auch diese ist irreducibel — dies ergiebt sich auf ganz dieselbe Weise, wie bei dem vorigen Beispiel — und bildet daher ebenfalls die Grundgleichung eines cubischen Körpers. Durch die Substitution

$$\bar{y} = y \cdot \bar{x}^3$$

geht dieselbe über in

$$\bar{y}^3 + 3\bar{x}(1+\bar{x})^2 \{(1-\bar{x})(33-\bar{x}) - 4\bar{x}^3\}\,\bar{y} - 16\bar{x}^8(9-\bar{x}) = 0.$$

Es ist daher jetzt

$$r_2 = 3, \quad A_1 = A_2 = B = \Delta_1 = 1, \quad h_2 = f_2, \quad h_4 = f_3,$$
$$\Delta_2 = \Delta = 4f_2^3 + 27f_3^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0.$$

Δ und $\frac{d\Delta}{dx}$ verschwinden gleichzeitig blos einmal für $x = 0$ und $x = 1$, so dass

$$D = x(x-1),$$

$$\Delta_3 = \frac{\Delta}{x^2(x-1)^2}, \quad \delta_3 = 11.$$

Ferner ist

$$R(Bh_2) = -12(3x+1), \quad R(h_4) = R(f_3) = -16(9x-1),$$

mithin nach (68) l definirt durch

$$-24(3x+1)\,l - 48(9x-1) \equiv 0 \quad \bigl(\text{mod. } x(x-1)\bigr)$$

oder

$$(3x+1)\,l + 2(9x-1) \equiv 0 \quad \bigl(\text{mod. } x(x-1)\bigr),$$

so dass

$$l = 2(1-3x)$$

und

$$\lambda = \frac{2(1-3x)\,y + y_4}{x(x-1)}.$$

Entsprechend ergiebt sich

$$\bar{B} = 1, \quad \bar{A}_1 = \bar{x}, \quad \bar{A}_2 = 1, \quad \varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_2 = 0,$$

mithin gemäss I (56)

$$w_x = \alpha_1 + \delta_3 + \varkappa_1 + 2(\alpha_2 + \beta + \varkappa_1) = 11 + 1 = 12,$$

$$p = \tfrac{1}{2} w_x - 2 = 4;$$

und weiter

$$\bar{y}_4 = \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}} + \tfrac{2}{3}\bar{A}_2\bar{B}\bar{h}_2 = \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}} + \frac{2}{3}\frac{\bar{f}_2}{\bar{x}},$$

$$\bar{D} = 1 - \bar{x},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{-4\bar{y} + \bar{y}_4}{1-\bar{x}},$$

$$\alpha_1' = 1, \quad \beta' = 0, \quad \delta' = 2,$$

$$w_x = 6 \cdot 3 - 2(1+2) = 12.$$

Aber aus

$$\bar{y}_4 = y_4 \cdot \bar{x}^5$$

folgt:

$$\lambda \bar{x}^3 = \frac{2\bar{x}(\bar{x}-3)\,\bar{y} + \bar{y}_4}{1-\bar{x}} = 2(\bar{x}-2)\,\bar{y} + \bar{\lambda},$$

also

$$r_3 = 3.$$

Wiederum erfüllt die Grundgleichung die beiden Bedingungen einer Normalgleichung: $r_3 \geqq r_2$, $\bar{D}$ nicht theilbar durch $\bar{x}$, und demgemäss bilden die $p = (r_2 - 1) + (r_3 - 1) = 4$ Differentiale

$$dw_1 = \frac{x(x-1)}{F'(y)}\,dx, \qquad dw_2 = \frac{x(x-1)}{F'(y)}\,x\,dx,$$

$$dw_3 = \frac{y - 2(1-3x)}{F'(y)}\,dx, \qquad dw_4 = \frac{y - 2(1-3x)}{F'(y)}\,x\,dx,$$

ein vollständiges System von Differentialen 1^{ter} Gattung.

Darmstadt, Mai 1894.

Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function für complexe Exponenten.

(Erste Abhandlung.*))

Von

Fritz Schilling in Wilhelmshaven.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich eng an die in diesen Annalen Bd. 44, pag. 161 ff. veröffentlichte Abhandlung an: *„Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function"* und stellt sich als wesentliche Aufgabe die Lösung des dort noch unerledigt gebliebenen Problems, *den Fundamentalbereich der genannten Function auch für complexe Exponenten geometrisch in voller Allgemeinheit zu construiren.* Die erwähnte Abhandlung werde ich in der Folge kurz als „Beiträge" citiren. Die allgemeinen Gedanken, die hier in Betracht kommen, sind insbesondere im § 2, sowie in den §§ 21 und 22 daselbst angegeben worden. Es sei sogleich vorweg bemerkt, dass wir in der That, wie in den „Beiträgen" angenommen ist, dem Fundamentalbereich die Gestalt eines *Kreisbogenvierecks* geben wollen. Die im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen sind genau dieselben wie in den „Beiträgen".

§ 1.

Aufstellung zweier Hülfssätze.

Ehe wir uns zu der Construction der Fundamentalbereiche wenden, wollen wir *zwei Hülfssätze* vorausschicken, die uns hierbei wesentliche Dienste leisten werden.

Der erste knüpft direct an den Kern der drei Fundamentalsubstitutionen an. *Wir wünschen den Werth des Doppelverhältnisses der 4 Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' durch die Exponenten λ, μ, ν auszudrücken.*

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Göttinger Nachrichten vom August 1894.

Diese 4 Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' haben bekanntlich gerade deswegen für uns besonderes Interesse, weil sie allgemein die vier Eckpunkte unseres gesuchten Kreisbogenvierecks bilden werden. Es sei daran erinnert, dass der Punkt c_2' — derselbe ist natürlich willkürlich bevorzugt; das Analoge gilt auch für die Punkte a_2' und b_2' — aus dem Fixpunkt c_2 des Kernes entsteht, indem wir um die Gerade 3 desselben, d. h. um den inneren kürzesten Abstand der Axen I und II eine halbe Umdrehung ausführen.

Wir gehen aus von der identischen Relation:

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \frac{DV(a_1 a_2 c_1 b_1)}{DV(a_1 a_2 c_2' b_1)} \cdot \frac{1 - DV(a_1 a_2 c_2' b_1)}{1 - DV(a_1 a_2 c_1 b_1)},$$

deren Richtigkeit sich sofort ergiebt, sobald wir für einen Augenblick

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \infty, \quad b_1 = 1$$

annehmen. Nun ist

$$DV(a_1 a_2 c_2' b_1) = DV(a_2 a_1 c_2 b_2) = \frac{1}{DV(a_1 a_2 c_2 b_2)},$$

da die 4 Punkte a_1, a_2, c_2', b_1 durch eine halbe Umdrehung um die Gerade 3 des Kernes entsprechend in die 4 Punkte a_2, a_1, c_2, b_2 übergehen. Setzen wir nun für die Doppelverhältnisse $(a_1 a_2 c_1 b_1)$ und $(a_1 a_2 c_2 b_2)$ ihre Werthe aus den Cosinusformeln der Formelgruppe I des § 10 der „Beiträge“ ein, so ergiebt sich:

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \frac{DV(a_1 a_2 c_2 b_2) - 1}{\frac{1}{DV(a_1 a_2 c_1 b_1)} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-i\pi\lambda} + e^{i\pi(\mu-\nu)}}{e^{i\pi\lambda} + e^{i\pi(\mu-\nu)}} - 1}{\dfrac{e^{i\pi\lambda} + e^{i\pi(\nu-\mu)}}{e^{-i\pi\lambda} + e^{i\pi(\nu-\mu)}} - 1}.$$

Nach leichter Vereinfachung des Ausdrucks der rechten Seite, wobei wir an Stelle des dort auftretenden negativen Vorzeichens in dem Exponenten $i\pi$ hinzugefügt haben, nimmt diese Gleichung die einfache Form an:

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = e^{i\pi(\nu-\mu-\lambda+1)}.$$

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, wie ein Rückblick auf die Ableitung dieser Formel zeigt, dass letztere sich als eine unmittelbare Folge der symbolischen Gleichung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ erweist. Wenn wir nun noch

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \varrho \cdot e^{i\varphi\pi}$$

setzen, wo $-1 \leqq \varphi \leqq +1$ sein möge, so zerfällt die letzte Gleichung in die beiden Theile

$$e^{-\pi(\nu''-\mu''-\lambda'')} = \varrho,$$

$$\nu' - \mu' - \lambda' + 1 = \varphi \pm 2n,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Besonders *die zweite Gleichung* ist für unsere spätere Betrachtung von grosser Wichtigkeit. In Worten besagt sie: *Der reelle Theil ν' des den verdoppelten Ecken c_1, c_2' entsprechenden Exponenten vermindert um die reellen Theile der beiden anderen Exponenten ist bei gegebenem Doppelverhältniss der 4 Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' nothwendig gleich einer bestimmten Constanten, abgesehen von einer positiven oder negativen geraden Zahl.*

Wir wollen dieses Resultat noch durch eine *geometrische Betrachtung* ergänzen und uns damit anschaulich vor Augen führen. Wir denken die vier Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' irgendwie in der Ebene gegeben und dann durch vier beliebige (sich nicht durchkreuzende) Kreisbogen so verbunden, dass ein schlichtes Kreisbogenviereck entsteht (Fig. 1). Dies ist allemal möglich, wie auch die spätere Betrachtung unmittelbar erkennen lässt. Wir setzen nun die Summe der Winkel an den Ecken c_1 und c_2' gleich $2\nu'\pi$, den Winkel der Ecke a_1 gleich $2\lambda'\pi$, den der Ecke b_1 gleich $2\mu'\pi$. Lassen wir dann, von der Figur 1 ausgehend, z. B. den Kreisbogen $a_1 c_2'$ beliebig nach aussen oder auch innerhalb gewisser Grenzen nach innen sich drehen unter Festhaltung seiner Endpunkte a_1, c_2', genau wie es bei dem geometrischen Processe I im § 14 der „Beiträge" geschieht, so nehmen die Winkel $2\nu'\pi$ und $2\lambda'\pi$ je um denselben Betrag zu oder ab. Das Analoge ist der Fall, wenn wir einen der drei anderen Kreisbogen in derselben Weise nach aussen oder innen drehen. Diese Betrachtung lässt unmittelbar erkennen, *dass eben der Ausdruck $\nu' - \mu' - \lambda'$ für alle in solcher Weise aus einem vorliegenden Kreisbogenviereck entstehenden neuen Vierecke mit denselben Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' gleich einer Constanten ist und zwar gleich derjenigen Constanten φ, abgesehen von $\pm 2n$, die sich aus der obigen Doppelverhältnissgleichung ergiebt.* Dies letztere ist der Fall, weil alle die einzelnen Kreisbogenvierecke unmittelbar auch functionentheoretisch als Fundamentalbereiche brauchbar sind und damit für sie die Bedingung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ in bekannter Weise gilt. Wie sich andererseits die Constante φ für die zu zeichnenden Vierecke beliebig um $2n$ vermehren oder vermindern lässt, wird die spätere Betrachtung zeigen.

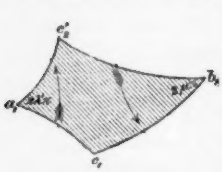


Fig. 1.

Der zweite in Aussicht genommene Hülfssatz steht in naher Beziehung zu der obigen Gleichung $e^{-\pi(\nu'-\mu'-\lambda')} = \varrho$ des ersten Hülfssatzes. Er ist bereits in § 21 der „Beiträge" angegeben worden: *Jedes als Fundamentalbereich seiner geometrischen Gestalt nach brauchbare Kreisbogenviereck stellt uns eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener Fundamentalbereiche vor*, *die durch die verschieden mögliche Zuordnung jedes Seitenpaares sich unterscheiden.* Bei dieser verschiedenen

Zuordnung ändern sich nur die imaginären Theile der zugehörigen Exponenten λ, μ, ν, da ja die Winkel des Vierecks unverändert bleiben, *und zwar wird durch die Gesammtheit aller möglichen Zuordnungen auch die Gesammtheit aller Werthecombinationen der imaginären Theile* $i\lambda'', i\mu'', i\nu''$ *erschöpft, welche der Relation* $e^{-\pi(\nu''-\mu''-\lambda'')} = \varrho$ *genügen.* Denn sei irgend ein die letzte Gleichung erfüllendes Werthetripel $i\lambda'', i\mu'', i\nu''$ den reellen Theilen λ', μ', ν' der Exponenten, wie sie die geometrische Gestalt des Vierecks liefert, zugeordnet. Damit sind dann zugleich drei Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ mit der Bedingung $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma = 1$ festgelegt. Für diese müssen die Punkte a_1, b_1, c_1, c_2' ihre charakteristische Bedeutung haben, da ja die Gleichung $DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = e^{i\pi(\nu-\mu-\lambda+1)}$ nur ein Ausfluss der Bedingung $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma = 1$ ist. Durch Anwendung der Substitution A geht also der Kreisbogen $a_1 c_1$ in den Kreisbogen $a_1 c_2'$ über, wobei der Punkt a_1 sich selbst, der Punkt c_1 dem Punkte c_2' entspricht. Demgemäss muss umgekehrt diese Substitution A auch durch eine bestimmte Zuordnung eines dritten Punktepaares der beiden Kreisbogen herauskommen. Das Analoge gilt für die Substitution B in Bezug auf die Kreisbogen $b_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ und, da die Substitution Γ durch die Substitutionen A und B eindeutig bestimmt ist, so ist hiermit unsere obige Behauptung erwiesen. Unser zweiter Hülfssatz ergiebt hiernach das wichtige Schlussresultat: *Gilt es den Fundamentalbereich für ein gegebenes Werthetripel* λ, μ, ν *zu construiren, so genügt es ein brauchbares Kreisbogenviereck zu zeichnen, welches einmal das den Exponenten* λ, μ, ν *entsprechende Doppelverhältniss der vier Eckpunkte und überdies den reellen Theilen der Grössen* λ, μ, ν *entsprechende Winkel darbietet.* Denn durch richtige Zuordnung der einander entsprechenden Seitenpaare, ohne dass die geometrische Gestalt des Vierecks zu ändern ist, lässt sich dieses Kreisbogenviereck allemal zu dem Fundamentalbereich erheben, welcher auch den imaginären Theilen der Grössen λ, μ, ν richtig entspricht. Mit anderen Worten: *Auf die imaginären Theile* $i\lambda'', i\mu'', i\nu''$ *der Exponenten brauchen wir bei der Construction der Fundamentalbereiche nur noch insofern Rücksicht zu nehmen, als sie das Doppelverhältniss* $(a_1 b_1 c_1 c_2')$ *bedingen.*

§ 2.

Vorbemerkungen allgemeiner Natur.

Wir denken uns eine beliebige Auswahl complexer Exponenten λ, μ, ν gegeben. Es wird verlangt, den Fundamentalbereich der zugehörigen s-Function zu zeichnen. Wir wollen die Fälle, dass einer oder mehrere der Grössen λ, μ, ν rein imaginär sind, oder dass dieselben der Gleichung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ genügen, für das

Folgende ausschliessen. Dem ersten Vorkommniss werden wir später noch eine besondere Betrachtung widmen; das zweite ist in den „Beiträgen" § 24 ff. ohnehin bereits erledigt. Hierbei ist dann insbesondere auch ein Zusammenfallen zweier der Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' ausgeschlossen.

Gemäss § 12 der „Beiträge" werden wir bei gegebenen Werthen λ, μ, ν zunächst den functionentheoretisch in Betracht kommenden „Kern", d. h. die 3 Axen der zugehörigen Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ construiren. (Von den beiden bei der Construction sich ergebenden Kernen wird gerade derjenige auszuwählen sein, für dessen Fixpunkte die Cosinusformeln I der „Beiträge" § 10 gelten). In diesem Kern seien mit a_1, b_1, c_1 diejenigen drei Fixpunkte bezeichnet, welche als Ecken des Fundamentalbereiches aufzutreten haben. Wir denken die Punkte a_1, b_1, c_1 nun durch lineare Transformation der s-Ebene entsprechend in die Punkte $-1, +1, 0$ verlegt, was stets möglich ist. Der Punkt c_2', den wir als vierten Eckpunkt des zu zeichnenden Fundamentalbereiches auswählen, wird dann irgendwo in der Ebene gelegen sein, wie er eben durch das bekannte Doppelverhältniss $(a_1 b_1 c_1 c_2')$ bestimmt ist. Von dieser Lage des Punktes c_2' wollen wir sogleich noch sprechen. Bei der speciellen Annahme der Punkte a_1, b_1, c_1 wird

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \frac{1 - c_2'}{1 + c_2'}$$

oder, wenn wir hierin $c_2' = p + qi$ setzen,

$$DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \frac{1 - p^2 - q^2}{(1+p)^2 + q^2} - \frac{2q}{(1+p)^2 + q^2} \cdot i.$$

Je nachdem nun die Grösse q positiv oder negativ ist, ergeben sich die folgenden beiden Sätze:

Liegt der vierte Eckpunkt c_2' oberhalb der Axe des Reellen, dann gilt $-1 < \varphi < 0$ und die Grösse $\nu' - \mu' - \lambda' = \varphi - 1 \pm 2n$, die wir abkürzend mit ψ bezeichnen wollen, und die wir uns in eine reelle Zahlenreihe eingetragen denken können, liegt in einem der Intervalle von $2n$ bis $2n + 1$, woselbst n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Diese Intervalle sind in der Figur 2 stark ausgezogen.

Fig. 2.

Liegt aber c_2' unterhalb der Axe des Reellen, dann gilt $0 < \varphi < +1$, und die Grösse ψ liegt in einem der übrig bleibenden Intervalle von $2n - 1$ bis $2n$. (Fig. 2.)

Dem *Uebergangsfall*, woselbst c_2' in der Axe des Reellen selbst liegt, entspricht, dass φ gleich ± 1 resp. $= 0$ ist, und dass die

Grösse ψ gerade in den Grenzpunkt zweier der angegebenen Intervalle fällt.

Alle diese Sätze gestatten überdies die unbeschränkte Umkehrung.

Wir unterscheiden nun weiter, genau wie in der Dreieckstheorie, zwischen *Vierecken erster Art und Vierecken zweiter Art*, und zwar werden wir von einem Viereck erster Art sprechen, wenn der reelle Theil jedes Exponenten kleiner oder gleich ist der Summe der reellen Theile der beiden anderen Exponenten, und von einem Viereck zweiter Art, wenn der reelle Theil des grössten Exponenten grösser ist als die Summe der reellen Theile der beiden übrigen Exponenten.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Construction der gesuchten Fundamentalbereiche selbst über.

§ 3.

Construction der reducirten Fundamentalbereiche.

Wir beschränken uns zunächst auf die *Construction der reducirten Fundamentalbereiche*. Gemäss § 22 der „Beiträge" sind dieselben dadurch definirt, dass von den reellen Theilen λ', μ', ν' der Exponenten keiner grösser als 2 und keine zwei grösser als 1 sind. Es sei weiter vorausgesetzt, dass die Beziehung $\nu' \geqq \mu' \geqq \lambda'$ gilt, was keine Beschränkung bedeutet, d. h. in den Fundamentalvierecken wollen wir stets diejenige Ecke (bei unserer Annahme der Bezeichnung also die dem Exponenten ν entsprechende Ecke) verdoppelt annehmen, welche dem in seinem reellen Theile grössten Exponenten entspricht. Für ein reducirtes Viereck erster Art ist dann überdies der Ausdruck $\psi = \nu' - \mu' - \lambda'$ negativ oder gleich 0, für ein Viereck zweiter Art dagegen positiv. Für die reducirten Vierecke können wir ferner sogleich die Intervalle der Fig. 2 angeben, in denen der Werth von ψ gelegen sein kann. Wie eine leichte Ueberlegung zeigt, ergeben sich als Grenzen $+2$ und -1, d. h. *die Grösse ψ kann nur den Intervallen von -1 bis 0, von 0 bis $+1$ und von $+1$ bis $+2$ angehören.* Diese drei Intervalle werden wir jetzt nach einander behandeln und sodann noch eine Specialbetrachtung für die Grenzen derselben hinzufügen.

Es sei erstens $0 < \psi < 1$. Es liegt dann ein Viereck 2. Art vor und der Punkt c_2' ist oberhalb der Axe des Reellen gelegen. Um unsere Betrachtung allgemeiner durchzuführen, nehmen wir daselbst eine beliebige Lage des Punktes c_2' an und verbinden ihn mit a_1 und b_1. Dann entsteht allemal ein geradliniges Viereck mit den Ecken a_1, b_1, c_1, c_2', wie es in Fig. 3 durch Schraffirung hervorgehoben ist. Da in demselben

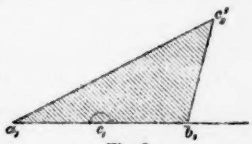


Fig. 3.

$$\sphericalangle c_1 + \sphericalangle c_2' - \sphericalangle a_1 - \sphericalangle b_1 = 2\pi(\nu' - \mu' - \lambda')$$

positiv und kleiner als 2π ist, so ist die Beziehung $0 < \psi < 1$ gewiss erfüllt. Doch ist dieses Viereck im Allgemeinen keineswegs der gesuchte Bereich. Es kommt eben noch darauf an, demselben durch Hinaus- oder Hineindrehen der begrenzenden Seiten unter Festhaltung der Ecken auch noch die richtigen Winkel zu geben, wie sie den vorgeschriebenen Grössen λ', μ', ν' entsprechen. Um den Nachweis zu führen, dass dies allgemein möglich ist, setzen wir:

$$\begin{aligned} \nu' &= \psi + \mu' + \lambda', \\ \mu' &= 0 + \mu', \\ \lambda' &= 0 + \lambda' \end{aligned}$$

und zeigen, dass es allemal ein brauchbares *reducirtes Hülfsviereck* giebt mit denselben Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' und Winkeln, wie sie Exponenten mit den reellen Theilen $\nu_0' = \psi$, $\mu_0' = 0$, $\lambda_0' = 0$ entsprechen, d. h. die Winkel an den Ecken a_1 und b_1 des Hülfsvierecks müssen gleich 0 sein, die Summe der Winkel an den Ecken c_1 und c_2' aber gleich $2\psi\pi$. Wie wir von diesem Hülfsviereck dann zu dem gewünschten Viereck für die reellen Theile λ', μ', ν' der Exponenten aufsteigen, ist leicht zu erkennen. Wir drehen einfach die Kreisbogenseiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2\lambda'\pi$ nach aussen und analog die Kreisbogenseiten $b_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2\mu'\pi$. (Es ist hierbei gleichgültig, wie wir z. B. den Winkel $2\lambda'\pi$ auf die beiden Kreisbogenseiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ vertheilen; man kann etwa allein $a_1 c_1$ um den Winkel $2\lambda'\pi$ nach aussen drehen und $a_1 c_2'$ gar nicht oder umgekehrt, oder man kann auch beide nach aussen drehen, doch so, dass sie zusammen um den Winkel $2\lambda'\pi$ gedreht sind. Alle die verschiedenen Vierecke sind functionentheoretisch äquivalent.) Das in solcher Weise entstehende Viereck besitzt dann in der That an der Ecke a_1 den Winkel $2\lambda'\pi$, an der Ecke b_1 den Winkel $2\mu'\pi$ und an den Ecken c_1 und c_2' die Winkelsumme $2\nu'\pi$.

Doch wie finden wir nun unser Hülfsviereck? Bei der Construction desselben werden wir vor allem darauf unser Augenmerk zu richten haben — und dies gilt in analoger Weise auch für alles folgende — dass jeder einzelne geometrische Process, den wir anwenden, sich auch allgemein ausführbar zeigt, ohne dass das entstehende Hülfsviereck irgendwie unbrauchbar wird, wo immer auch der Punkt c_2' oberhalb der Axe des Reellen gelegen sein mag. Wir nehmen jetzt an, es sei c_2' rechts von der Axe des Imaginären oder auf derselben gelegen. Es bedeutet dies keine Beschränkung, indem im anderen Fall in unserer folgenden Betrachtung nur die Bezeichnungen a_1 und b_1 zu vertauschen wären. Man drehe dann zunächst die Seite $a_1 c_1$ um den Winkel a_1 nach innen; dieses kann niemals einer Schwierigkeit

begegnen, da das Dreieck $a_1 c_2' c_1$, welches durch geradlinige Verbindung von c_2' mit c_1 entsteht, bei a_1 spitzwinklig und bei c_1 stumpfwinklig oder rechtwinklig ist. Dann drehe man die Seite $b_1 c_1$ um den Winkel b_1 nach innen. In wie weit auch dieses ohne Weiteres möglich ist, ergiebt eine einfache Ueberlegung. Eine bei nur geringer Drehung der Seite $b_1 c_1$ sich zunächst darbietende Configuration giebt Figur 4. Bei weiterem Drehen der Kreisbogenseite $b_1 c_1$ wandern die Schnittpunkte x und y auf dem Kreise (oder der Geraden) der Seite $a_1 c_1$ resp. der Seite $b_1 c_2'$, wie die Pfeile es andeuten. Nun ist der Winkel der Ecke b_1 gewiss kleiner als der Winkel c_1 in Fig. 4, da ja in der ursprünglichen Figur 3 der Winkel c_1 gleich π, die Summe der Winkel a_1 und b_1 aber kleiner als π war. Es muss daher bei dem Hineindrehen der Seite $b_1 c_1$ nothwendig der Punkt y eher nach b_1 gelangen als x nach c_1. Was kann nun Singuläres bei diesem geometrischen Process eintreten? Die Kreisbogenseite $b_1 c_1$ kann höchstens an der Gegenseite $a_1 c_2'$ ein Zweieck abschneiden, wie es Fig. 5 zeigt. Dieses Zweieck hätten wir dann als negativ anzusehen, so dass der vorher rein positive Bereich in zwei positive Dreiecke und ein negatives Zweieck zerfallen wäre. Doch wollen wir ausdrücklich nachweisen, dass dieses Zweieck nicht an die Punkte a_1 und c_2' heranreichen kann. Denn sollte dasselbe etwa an den Punkt a_1 heranreichen, so müsste ja der zweite Schnittpunkt x des Kreises der Seite $c_1 b_1$ mit dem Kreise der Seite $a_1 c_1$ über c_1 nach a_1 gewandert sein, was nicht möglich ist, da er nicht einmal bis c_1 gelangt. In analoger Weise ist zu zeigen, dass das Zweieck auch nicht an den Punkt c_2' heranreichen kann, da sonst der Punkt y über b_1 nach c_2' gelangt sein müsste, was wieder nicht möglich ist. Wir wollen nun nicht weiter erörtern, ob ein solcher ausgearteter Bereich unmittelbar auch functionentheoretisch als Fundamentalbereich brauchbar ist oder nicht; vielmehr wollen wir in solchem Falle das Viereck der Fig. 5 so umändern, dass der negative Theil ganz fortfällt. Zu dem Zwecke brauchen wir nur die Seite $a_1 c_2'$ und $b_1 c_1$ je um denselben Winkel nach aussen zu drehen, bis sie sich gerade berühren, und dann die beiden anderen Kreisbogen $a_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ je um denselben Winkel nach innen, was niemals irgend welche Schwierigkeit bieten kann. Hiermit ist gezeigt, dass wir allemal ein

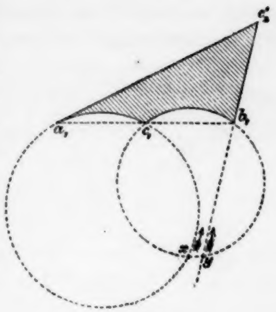


Fig. 4.

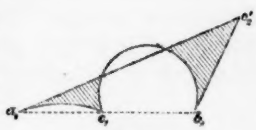


Fig. 5.

brauchbares reducirtes Hülfsviereck erhalten, welches an den Ecken a_1 und b_1 die Winkel 0, an den Ecken c_1 und c_2' die Winkelsumme ψ darbietet.

Wir gehen jetzt weiter zu dem Fall über, *dass für den Ausdruck ψ die Bedingung $-1 < \psi < 0$ gilt.* Der gesuchte Fundamentalbereich stellt dann ein Viereck erster Art vor, und der Punkt c_2' ist unterhalb der Axe des Reellen gelegen. Wir nehmen dort wieder eine beliebige Lage des Punktes c_2' an und verbinden ihn mit a_1 und b_1 (Fig. 6). Fassen wir dann den Aussenbereich des geradlinigen Linienzuges in's Auge, so stellt derselbe uns ein Viereck dar, für dessen Winkel in der That die Bedingung $-1 < \psi < 0$ erfüllt ist, wo immer auch c_2' gewählt sein mag. Denn für dieses Viereck ist stets $\sphericalangle a_1 + \sphericalangle b_1 > \sphericalangle c_1 + \sphericalangle c_2'$. Doch besitzt dasselbe im Allgemeinen noch nicht die richtigen Winkel, wie sie den reellen Theilen λ', μ', ν' der gegebenen Exponenten entsprechen. Um den Nachweis zu führen, dass wir von dem Viereck Fig. 6 ausgehend durch Hinein- oder Hinausdrehen der Seiten stets auch ein Viereck mit den richtigen Winkeln construiren können, gehen wir wieder auf ein brauchbares *reducirtes Hülfsviereck* zurück. Wir bemerken zunächst, dass gemäss der Bedingung $\nu' \geqq \mu' \geqq \lambda'$ nothwendig die kleinste Grösse λ' gleich oder grösser als $-\psi$ sein muss. Wir setzen daher:

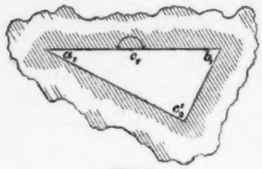


Fig. 6.

$$\nu' = 0 + \alpha + \beta,$$
$$\mu' = \mu_0' + \beta,$$
$$\lambda' = \lambda_0' + \alpha,$$

woselbst $\mu_0' + \lambda_0' = -\psi$ und $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ ist, und bezeichnen als Hülfsviereck das zu Exponenten mit den reellen Theilen $\nu_0' = 0$, μ_0', λ_0' gehörige Viereck, welches ausserdem natürlich wieder dieselben Ecken a_1, b_1, c_1, c_2' besitzen muss. Die Grössen μ_0' und λ_0' sind nicht völlig bestimmt, nur ist ihre Summe gleich $-\psi$, also jede einzelne gewiss kleiner oder höchstens gleich $-\psi$. Wie wir von dem Hülfsviereck zu dem gesuchten Viereck für die reellen Theile ν', μ', λ' der Exponenten gelangen, ist leicht zu übersehen. Man hat einfach wieder die Seiten a_1c_1 und a_1c_2' zusammen um den Winkel $2\alpha\pi$, die Seiten b_1c_1 und b_1c_2' zusammen um den Winkel $2\beta\pi$ nach aussen zu drehen. Die Construction des Hülfsvierecks aber läuft einfach darauf hinaus, durch Hineindrehen der Seiten des geradlinigen Ausgangsvierecks die Winkel c_1 und c_2' verschwinden zu lassen. Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, dass die hierzu nöthigen geometrischen Processe stets in leichter Weise ausführbar sind. Wir nehmen an, es

sei c_2' wieder rechts von der Axe der Imaginären oder auf derselben gelegen, was keine Beschränkung bedeutet. Wir denken ferner durch die Punkte a_1 und b_1 den zur Axe des Reellen senkrechten Kreis als Hülfslinie gezogen. Dann wollen wir die beiden Unterfälle neben einander betrachten, dass c_2' einerseits innerhalb dieses Kreises oder auf demselben, andererseits ausserhalb dieses Kreises gelegen ist.

Im ersten Unterfalle drehe man zunächst die Seiten $a_1 c_1$ und $b_1 c_1$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ nach innen, darauf ebenso die Seite $a_1 c_2'$ um den Winkel π. Man erhält ein Viereck, wie es Fig. 7 darstellt, in dem der Winkel c_1 bereits zu 0 geworden ist. Es ist nun leicht zu erkennen, dass wir schliesslich in Fig. 7 noch die Seite $b_1 c_2'$ ohne Schwierigkeit um den Winkel c_2' nach innen drehen können, wo immer auch der Punkt c_2' in dem für ihn umgrenzten Bereich liegen mag. Damit ist das Hülfsviereck im ersten Unterfalle construirt.

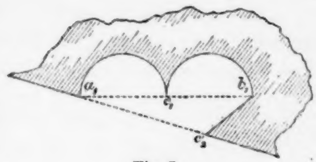


Fig. 7.

Im zweiten Unterfalle drehen wir zunächst wieder die Seiten $a_1 c_1$ und $b_1 c_1$ je um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ nach innen, darauf ebenso die Seite $a_1 c_2'$, bis Winkel a_1 zu 0 wird. Der neue Kreisbogen $a_1 c_2'$ wird dann gewiss ausserhalb des Hülfskreises, den wir durch die Punkte a_1 und b_1 senkrecht zur Axe des Reellen gelegt haben, verlaufen, so dass nichts Singuläres eintreten kann (Fig. 8). Nun drehe man noch die Seite $b_1 c_2'$ um den Winkel c_2' nach innen, was gleichfalls allemal ohne Schwierigkeit möglich ist. Hiermit haben wir wieder das gesuchte Hülfsviereck erhalten.

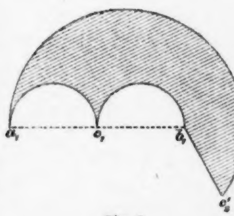


Fig. 8.

Es bleibt schliesslich noch der Fall übrig, *dass der Ausdruck* ψ *dem Intervall* $1 < \psi < 2$ *angehört.* Der Punkt c_2' ist jetzt wieder unterhalb der Axe des Reellen zu wählen; doch haben wir ein Viereck 2. Art. Die Betrachtung wird demgemäss ganz analog verlaufen, wie im ersten Falle. Um zunächst ein Ausgangsviereck zu erhalten, für welches die Bedingung $1 < \psi < 2$ erfüllt ist, ohne dass es auch schon die richtigen Winkel zu besitzen braucht, hängen wir einfach längs eines Verzweigungsschnittes von c_1 nach c_2' in dem Viereck der Figuren 7 und 8 des vorigen Falles eine Vollebene an. Hierdurch vermehren wir die Winkelsumme $c_1 + c_2'$ um 4π, d. h. die Grösse ψ des vorigen Falles wird um 2 vermehrt, so dass sie in das richtige Intervall gelangt. Es kommt nun wieder darauf an,

durch Hinein- oder Hinausdrehen der Seiten dem Viereck auch die richtigen Winkel zu geben. Wir setzen genau wie im ersten Falle:

$$\begin{aligned} \nu' &= \psi + \mu' + \lambda', \\ \mu' &= 0 + \mu', \\ \lambda' &= 0 + \lambda' \end{aligned}$$

und zeigen, dass es wieder allemal ein *brauchbares reducirtes Hülfsviereck* giebt, dessen Winkel Exponenten mit den reellen Theilen $\nu_0' = \psi$, $\mu_0' = 0$, $\lambda_0' = 0$ entsprechen. Dieses Hülfsviereck wird also an den Ecken a_1 und b_1 wieder verschwindende Winkel besitzen müssen. Von demselben hat man in ganz derselben Weise, wie im ersten Falle, zu dem gesuchten Viereck aufzusteigen. Um nun das Hülfsviereck zu construiren, wollen wir nur solche geometrischen Processe anwenden, die für die beiden durch die eingehängten Vollebenen erweiterten Figuren 7 und 8 in gleicher Weise ausführbar sind. Man drehe zunächst die Seite $a_1 c_2'$ noch weiter nach innen, bis Winkel a_1 zu 0 wird, falls es nicht schon von vorneherein der Fall ist. Der erweiterte Bereich der Fig. 7 führt in solcher Weise zu einem Viereck, wie es Figur 9 darstellt. Dann drehe man noch die Seite $b_1 c_1$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ nach innen, wodurch sie geradlinig wird und sich über das Unendliche erstreckt, und darauf ebenso die Seite $b_1 c_2'$ so weit, bis Winkel b_1 zu 0 wird. Man übersieht, dass keiner der geometrischen Processe in seiner Anwendung einer Schwierigkeit begegnet. Man erhält stets ein brauchbares reducirtes Hülfsviereck, in welchem, wie es sein soll, die Winkel a_1 und b_1 zu 0 geworden sind. —

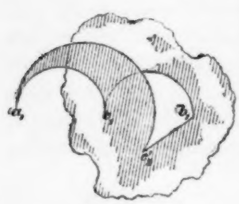


Fig. 9.

Nun noch ein Wort dem Uebergangsfall, dass das Doppelverhältniss $(a_1 b_1 c_1 c_2')$ *reell ist, d. h. dass* c_2' *gleichfalls der Axe des Reellen angehört.* Dann haben wir die zwei Unterfälle einander gegenüberzustellen, je nachdem c_2' ausserhalb oder innerhalb der Strecke $a_1 b_1$ liegt. Der Fall, dass c_2' mit einem der Punkte a_1, b_1 oder c_1 selbst zusammenfällt, ist von uns ausgeschlossen worden, da für ihn die Bedingung $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ erfüllt ist. *Im ersten Unterfalle* erhalten wir das eine reducirte Hülfsviereck, welches dem Werthe $\psi = 0$ angehört, sofort aus Figur 8, wenn wir den Punkt c_2' auf die Axe des Reellen rücken lassen. Es stellt ein Viereck, dessen sämmtliche Winkel gleich 0 sind, vor. Das zweite hierher gehörige reducirte Hülfsviereck, welches dem Werthe $\psi = + 2$ angehört, ergiebt sich unmittelbar aus diesem ersten Hülfsviereck, wenn man längs eines

Verzweigungsschnittes von c_1 nach c_2' eine Vollebene anhängt. *Im zweiten Unterfalle* stellen Fig. 10a und 10b die beiden Hülfsvierecke vor, die den Werthen $\psi = +1$ und $\psi = -1$ entsprechen. Alle Figuren der Uebergangsfälle zeigen, wie wir sie gezeichnet haben, das

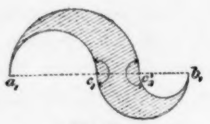


Fig. 10a.

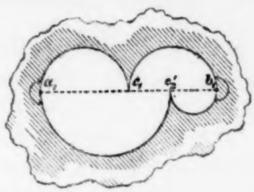


Fig. 10b.

Gemeinsame, dass ihre begrenzenden Kreisbogenseiten Halbkreise vorstellen, die auf der Axe des Reellen senkrecht stehen. Es ist überdies leicht zu sehen, wie die Figuren der drei Hauptfälle sich in diese Figuren der Uebergangsfälle continuirlich überführen lassen; die beiden Werthe der Grösse ψ, wie sie der einzelnen Lage des Punktes c_2' für die reducirten Bereiche entsprechen, gehören in der That jedesmal allen drei Intervallen von -1 bis $+2$ als Grenze an.

§ 4.

Aufsteigen zu den erweiterten Fundamentalbereichen.

Jetzt tritt die weitere Frage an uns heran, *wie wir von den reducirten Fundamentalbereichen zu den allgemeinen aufsteigen.* Wir werden zu dem Zweck in ganz entsprechender Weise vorgehen, wie im § 25 der „Beiträge", woselbst die Bedingung $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu = 2n+1$ erfüllt ist. Die sich auf einem bestimmten reducirten Viereck mit den Exponenten λ_0, μ_0, ν_0 aufbauenden verwandten Bereiche werden allgemein durch die Exponenten $\lambda = \lambda_0 + P$, $\mu = \mu_0 + Q$, $\nu = \nu_0 + R$ gekennzeichnet, woselbst P, Q, R ganze positive Zahlen von gerader Summe $2S$ bedeuten. Jetzt werden wir wieder die *beiden Fälle* zu unterscheiden haben, dass jede der Grössen P, Q, R kleiner oder gleich ist der Summe der beiden anderen, oder dass die grösste derselben grösser ist als die Summe der beiden anderen.

Im *ersten Falle* setzen wir genau wie an dem angeführten Orte:

$$P = B + C,$$
$$Q = C + A,$$
$$R = A + B.$$

Dann ist:

$$A = \frac{Q+R-P}{2} = S - P,$$
$$B = \frac{R+P-Q}{2} = S - Q,$$
$$C = \frac{P+Q-R}{2} = S - R,$$

d. h. A, B, C sind selbst wieder ganze Zahlen und *überdies sämmtlich positiv oder gleich* 0. Wir werden daher von dem vorliegenden reducirten Bereiche λ_0, μ_0, ν_0 ausgehend zu dem allgemeinen Bereiche $\lambda_0 + P, \mu_0 + Q, \nu_0 + R$ aufsteigen, *indem wir einmal die sich entsprechenden Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2B\pi$, die Seiten $b_1 c_1$ und $b_1 c_2'$ zusammen um den Winkel $2A\pi$ nach aussen drehen und dann noch längs eines Verzweigungsschnittes, der die Ecken a_1, b_1 in bekannter Weise verbindet, insgesammt C Vollebenen anhängen.* Ein Blick auf die Figuren der reducirten Bereiche zeigt sofort, dass diese geometrischen Processe niemals einer Schwierigkeit begegnen. Denn die einzelnen Seiten lassen sich stets nach aussen drehen, da niemals eine derselben sich überschlägt; andererseits lässt sich auch der Verzweigungsschnitt von a_1 nach b_1 allemal den in § 22 der „Beiträge“ aufgestellten Bedingungen gemäss ziehen.

Im zweiten Falle sei $R > Q \geqq P$ angenommen. Dann gilt zugleich die Bedingung $\nu' \geqq \mu' \geqq \lambda'$, da die Zahl R wenigstens um 2 grösser ist als jede der beiden anderen Zahlen Q, P. Jedoch braucht jetzt für das reducirte Viereck die früher stets angenommene Bedingung $\nu_0' \geqq \mu_0' \geqq \lambda_0'$ ohne weiteres nicht mehr zu gelten. Wir setzen $R = P + Q + 2m$, woselbst $m \geqq 1$ ist. Die Exponenten des erweiterten Bereiches bekommen somit die Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} \nu = \nu_0 + P + Q + 2m, \\ \mu = \mu_0 + Q, \\ \lambda = \lambda_0 + P. \end{cases}$$

Wir stellen nun zunächst eine kleine Ueberlegung an betreffs der Grösse des Ausdrucks $\psi = \nu' - \mu' - \lambda'$ für diese erweiterten Bereiche, und unterscheiden zu dem Zweck zwei Unterfälle:

Ist keine der reellen Grössen $\nu_0', \mu_0', \lambda_0'$ gleich oder grösser als 1 (d. h. ist das reducirte Viereck allgemein ein Grundviereck nach der Terminologie des § 22 der „Beiträge“), so muss der Werth des Ausdrucks $\psi = 2m + \nu_0' - \mu_0' - \lambda_0'$ nothwendig grösser als 0 sein.

Ist aber die grösste der reellen Grössen $\nu_0', \mu_0', \lambda_0'$ grösser oder auch gleich 1, (d. h. ist das reducirte Viereck allgemein ein Aussenviereck), so können wir die Bedingung hinzufügen, dass gerade ν_0' gleich oder auch grösser als 1 sei, so dass $\nu_0' \geqq \mu_0' \geqq \lambda_0'$ ist. Denn angenommen nicht ν_0', sondern etwa λ_0' wäre grösser oder gleich 1,

so construiren wir zunächst das reducirte Aussenviereck für die reellen Theile $\bar{\nu}_0' = \nu_0' + 1$, $\bar{\mu}_0' = \mu_0'$, $\bar{\lambda}_0' = \lambda_0' - 1$ der Exponenten, für welches dann sicher $\bar{\nu}_0'$ gleich oder grösser als 1 ist, und stellen uns die Aufgabe, von ihm aus zu dem erweiterten Viereck für die Exponenten λ, μ, ν aufzusteigen. Wir setzen dann einfach:

$$(2)\qquad \begin{cases} \nu' = \bar{\nu}_0' + 2(m-1) + P' + Q, \\ \mu' = \bar{\mu}_0' + Q, \\ \lambda' = \bar{\lambda}_0' + P', \end{cases}$$

woselbst $P' = P + 1$ ist.

Ist jetzt aber $m = 1$, so wird dieser zweite Anzatz, vermöge dessen das Viereck ν', μ', λ' sich auf dem Viereck $\bar{\nu}_0'$, $\bar{\mu}_0'$, $\bar{\lambda}_0'$ aufbauen lässt, zu dem bereits soeben absolvirten ersten Fall zurückzuführen und damit bereits als erledigt anzusehen sein.

Ist aber $m \geq 2$, so hat der Ansatz 2 genau die Form, wie der Ansatz 1, nur gilt jetzt auch $\nu_0' \geqq \mu_0' \geqq \lambda_0'$, so dass wir in der That die Berechtigung erkennen, von vorneherein diese Annahme für unseren zweiten Unterfall zum Ansatz 1 hinzufügen zu dürfen. Dann zeigt aber eine einfache Ueberlegung, dass der Werth des Ausdrucks ψ für diese noch nicht erledigten erweiterten Vierecke nothwendig gleich oder grösser als 1 sein muss. Wir fassen unsere bisherige Ueberlegung der beiden Unterfälle in den Satz zusammen: *Alle noch nicht erledigten Vierecke des zweiten Falles stellen Vierecke zweiter Art dar.*

Ihre Construction erledigt sich dann aber genau in derselben Weise, wie die Construction der reducirten Vierecke zweiter Art. In welchem Intervall auch die Grösse ψ gelegen sein mag, man kann stets ein *Hülfsviereck* construiren, in welchem die Winkel an den Ecken a_1 und b_1 gleich 0 sind, während die Summe der Winkel an den Ecken c_1 und c_2' $2\psi\pi$ beträgt.

Man gelangt zu diesem Hülfsviereck der einzelnen Bereiche sehr einfach, indem man in den reducirten Hülfsvierecken der beiden ersten Intervalle von 0 *bis* $+1$ *und von* $+1$ *bis* $+2$ *längs eines Verzweigungsschnittes, der die Ecken* c_1 *und* c_2' *verbindet, die richtige Zahl Vollebenen anhängt.* Und zwar ergeben sich in solcher Weise die Hülfsvierecke der Intervalle von $2n$ bis $2n+1$ aus den Hülfsvierecken des Intervalles von 0 bis 1 und die Hülfsvierecke der Intervalle von $2n-1$ bis $2n$ aus den Hülfsvierecken des Intervalles von 1 bis 2. Die Zahl der anzuhängenden Vollebenen aber wird durch das Symbol $E\left(\frac{\nu'-\mu'-\lambda'}{2}\right)$ angegeben, woselbst E die grösste ganze Zahl bezeichnet, welche von dem beigesetzten Klammerausdruck überschritten wird.

Wir sind hiermit mit unseren Betrachtungen zu Ende gekommen. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die zur Construction des Funda-

mentalbereiches angewandten Methoden sich unmittelbar auf den Fall übertragen lassen, dass einer oder mehrere der Exponenten rein imaginär sind. Ich gedenke dies demnächst in einer zweiten Arbeit auszuführen; dieselbe wird insbesondere zugleich den Fall ganzzahliger Exponenten, sowie die allgemeine Theorie der Verwandtschaft besprechen. Das in der vorliegenden Arbeit erreichte Resultat fassen wir nochmals in dem Satze zusammen:

Für jedes beliebige Werthetripel der Exponenten λ, μ, ν, *mag der einzelne unter ihnen reell oder complex sein (mit vorläufigem Ausschluss rein imaginärer Werthe) lässt sich allemal der Fundamentalbereich der zugehörigen Schwarz'schen s-Function in der Gestalt eines Kreisbogenvierecks wirklich construiren.*

Göttingen, Anfang August 1894.

Autographirte Vorlesungshefte, II.

Von

Felix Klein in Göttingen.

[Ueber lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, Sommer 1894]*).

In Fortsetzung des unter gleichem Titel in Band 45 der Annalen gegebenen ersten Referates berichte ich nachfolgend über die damals bereits angekündigte Vorlesung über lineare homogene totale Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Dieselbe war von vorneherein als Fortsetzung der früher besprochenen Vorlesung über die hypergeometrische Function gedacht, so dass ich den Leser in erster Linie bitten muss, sich den Inhalt der letzteren wieder vergegenwärtigen zu wollen. Uebrigens aber kann ich die Gesichtspunkte, welche ich bei der Vorlesung verfolgte, nicht besser bezeichnen als durch Voranstellung einiger Bemerkungen über die Theorie der Abel'schen Integrale:

1) In der Theorie der Abel'schen Integrale ist es zweifellos eine wichtige Aufgabe, die Integrale durch möglichst einfache und symmetrische algebraische Formeln darzustellen. Dieser Aufgabe habe ich in Band 36 der Annalen dadurch entsprochen, dass ich mir das algebraische Gebilde in Gestalt einer *kanonischen Fläche* gegeben dachte und übrigens statt der unabhängigen Veränderlichen x homogene Veränderliche x_1, x_2 einführte. Die kanonischen Flächen sind Riemann'sche Flächen, deren Blätterzahl m ein Theiler von $2p-2$ ist, so dass $2p-2=m\delta$ gesetzt werden kann, und die insbesondere so beschaffen sind, dass die $2m+2p-2$ Verzweigungspunkte die Nullstellen einer ganzen algebraischen Form der x_1, x_2 vom Grade $(\delta+2)$, der sogenannten *Verzweigungsform* sind, die ich mit σ bezeichne**).

---

*) Die Versendung geschieht wieder durch Herrn Dr. Schilling, der jetzt Assistent für darstellende Geometrie an der technischen Hochschule in Aachen ist.

**) Ich benutze diese Gelegenheit, um im Anschlusse an die im vorigen Artikel gegebene Fussnote betr. Riemann'sche Flächen im Raume folgende Mittheilung zur Publication zu bringen, welche mir Herr Schering „im Interesse der bestehenden selbständigen Autorenrechte des Herrn Tonelli" zugehen lässt: „Herr Tonelli hatte die Verwendung der in Rede stehenden Flächen durchaus selbst erdacht und das Resultat seiner Untersuchung erreicht, bevor ich über diese Flächen mit ihm sprach. Man kann also durchaus nicht sagen, dass

Die geeignete algebraische Darstellung eines Integrales u ergiebt sich von hier aus, indem man den Quotienten $\frac{\sigma . du}{|x\,dx|}$ als eine algebraische Function der x_1, x_2 vom Grade δ anschreibt.

2) Des Weiteren aber wird man die transcendente Natur des Integrals studiren, die in seiner *Periodicität* ihren prägnanten Ausdruck findet. In dieser Hinsicht kann man fragen:

a) ob man, bez. wann man ein Abel'sches Integral auf niedere Transcendenten, wie Logarithmen oder elliptische Integrale etc., zu reduciren vermag,

weiter aber:

b) wie man ein Integral auf dem als gegeben vorausgesetzten Gebilde durch seine Unendlichkeitsstellen und irgendwelche Eigenschaften seiner Periodicität festlegen kann. — Ich erinnere in dieser Hinsicht insbesondere an den Riemann'schen Satz, demzufolge das Integral bis auf eine additive Constante bestimmt ist, wenn man neben der Art seines Unendlichwerdens an verschiedenen Stellen die reellen Theile seiner Periodicitätsmoduln kennt.

Eben diese Fragen kann man nun in der Theorie der linearen Differentialgleichungen wiederholen, und ich erlaube mir dementsprechend die einzelnen Theile des folgenden Referates zu ordnen, womit ich ziemlich genau dem in der Vorlesung selbst eingehaltenen Gedankengange folge. Ich bemerke vorweg, dass es keine principielle Schwierigkeiten hat, die Betrachtungen ad 1) sowie die ad 2a) auf lineare Differentialgleichungen der n^{ten} Ordnung auszudehnen, oder jedenfalls die dahin gehenden Ansätze zu machen; die Beschränkung auf lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, an die ich mich in der Vorlesung von vorneherein gebunden habe, ist wesentlich durch die zu 2b) gehörigen Ueberlegungen bedingt gewesen.

I. Algebraische Normirung der Differentialgleichungen*).

Die allgemeine invariantentheoretische Gestalt, die man einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten ertheilen kann, indem man die unabhängige Variable x durch den Quotienten $x_1 : x_2$ ersetzt, ist aus verschiedenen neueren Arbeiten bekannt; ich will hier namentlich auf einen Aufsatz von Herrn Wälsch verweisen (Schriften der deutschen Prager mathematischen Gesellschaft, 1892), in welchem man eine Reihe einschlägiger Citate beisammen findet.

Herrn Tonelli's Arbeit sich auf eine von mir gegebene Andeutung über diese Art von Riemann'schen Flächen gründe, noch dass dieselbe unter meiner Leitung ausgeführt sei."

*) Ich habe über die hier zu gebenden Entwickelungen in der mathematischen Section der Wiener Naturforscherversammlung gesprochen, doch ist im Texte ein Punkt corrigirt, auf den mich Herr Pick aufmerksam gemacht hat (Nov. 1894).

Das Resultat ist, dass man einfach die Summe der zweiten, ersten und nullten Ueberschiebung einer unbekannten Form Π von x_1, x_2 von irgend welchem beliebig anzunehmenden Grade über drei gegebene rationale, ganze Formen φ, ψ, χ der Grade n, $(n-2)$ und $(n-4)$ gleich Null zu setzen hat. In Formel (indem ich die nullte Ueberschiebung der Deutlichkeit halber als Product schreibe):

$$(1) \qquad (\Pi, \varphi)_2 + (\Pi, \psi)_1 + \Pi . \chi = 0.$$

Nimmt man hier die Wurzeln von $\varphi = 0$ (welche die singulären Punkte der Differentialgleichung abgeben) sämmtlich als einfach an, so hat man den „regulären" Fall, in welchem jedem singulären Punkte in bekannter Weise zwei Exponenten zugehören. Und zwar ist die Differentialgleichung in der Art normirt, dass für jeden singulären Punkt der eine dieser Exponenten gleich Null ist. Der andere Exponent hängt in einfacher Weise von den Formen φ und ψ ab. Nimmt man ψ identisch Null und setzt den Grad von Π gleich k, so erhält man für den zweiten Exponenten gleichförmig den Werth $1 + \frac{2(k-1)}{n}$. Diese zweiten Exponenten werden also sämmtlich gleich $\frac{1}{2}$, wenn man $k = \frac{4-n}{4}$ setzt, in Uebereinstimmung mit meiner Angabe in Bd. 38 dieser Annalen, p. 147. (Vergl. auch die ebenda abgedruckte Note des Herrn Pick).

Es ist nun leicht, wie ich ebenfalls bereits in Bd. 38 angab, von hier aus zu einer Darstellung der auf einem *hyperelliptischen* Gebilde existirenden linearen Differentialgleichungen weiter zu schreiten. Ich betrachte der Kürze halber hier nur diejenigen ∞^{3p-3} Differentialgleichungen dieser Art, welche (auf dem hyperelliptischen Gebilde) keinerlei singulären Punkt besitzen. Es sei $\varphi_{2p+2} = 0$ die Gleichung für die Verzweigungspunkte der zweiblättrigen hyperelliptischen Fläche. Es sei ferner Ω_{2p-2} die allgemeinste auf der Fläche existirende ganze algebraische Form vom $(2p-2)^{\text{ten}}$ Grade, also gleich $\chi_{2p-2} + \psi_{p-3}\sqrt{\varphi_{2p+2}}$, unter χ, ψ rationale ganze Formen von x_1, x_2 von dem als Index beigesetzten Grade verstanden. Endlich nehme man Π vom Grade $\frac{1-p}{2}$. Man hat dann einfach:

$$(2) \qquad (\Pi, \varphi)_2 + \Omega . \Pi = 0.$$

In der That: das so definirte Π hat als Function von x keine anderen singulären Punkte als die Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes und in diesen die Exponenten 0 und $\frac{1}{2}$, etc. etc.

Um dieses Resultat auf höhere algebraische Gebilde auszudehnen, beachte man, dass die zweiblättrige hyperelliptische Fläche eine kanonische Fläche ist und dass $\sqrt{\varphi}$ die zugehörige Verzweigungsform vorstellt. Sei jetzt irgend eine m-blättrige kanonische Fläche gegeben;

mit σ bezeichnen wir wieder die zugehörige Verzweigungsform vom Grade $(\delta + 2)$. Man nehme Π vom Grade $\frac{-\delta}{2}$, normire dasselbe in geeigneter Weise und betrachte den Quotienten $(\Pi, \sigma^2)_2 : \Pi$. Die Entwickelung zeigt, dass derselbe in den Verzweigungspunkten der Fläche, allgemein zu reden, zwar nicht endlich bleibt aber in bestimmter Weise unendlich wird und zwar in nicht höherem Grade als $\frac{1}{\sigma}$. Bezeichnet man also mit Σ eine geeignete algebraische ganze Form der Fläche vom Grade $3\delta + 2$ und mit Ω die allgemeinste ganze Form vom Grade 2δ, so kommt als Differentialgleichung:

$$(3) \qquad (\Pi, \sigma^2)_2 + \left(\frac{\Sigma}{\sigma} + \Omega\right) \cdot \Pi = 0.$$

Um ein Beispiel anzuführen: sei $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ eine ebene Curve der vierten Ordnung. Wir projiciren diese Curve auf das Gebiet $x_1 : x_2$, d. h. wir sehen x_3 als eine Function von x_1 und x_2 an und haben also Differentiationen nach x_1, x_2 in der Folge so auszuführen, dass wir setzen:

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_1}, \text{ etc.}$$

Bei der Projection wird das Gebiet $x_1 : x_2$ vierfach überdeckt, d. h. wir erhalten eine vierblättrige Riemann'sche Fläche. Dieselbe ist eine kanonische Fläche; die zugehörige Verzweigungsform ist die Polare $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, die wir der Kürze halber mit f_3 bezeichnen. Der Grad von Ω wird gleich 2. Wir werden daher unter Ω in bekannter Weise die allgemeinste rationale ganze Function zweiten Grades von x_1, x_2, x_3 (den allgemeinsten Kegelschnitt) verstehen müssen; dieselbe hat in der That $3p - 3 = 6$ Constanten. Andererseits berechnet man für Σ den Werth $\frac{-1}{6} H_3$, unter H die Hesse'sche Form von f verstanden. Die Differentialgleichung wird also:

$$(4) \qquad (\Pi, f_3^2)_2 + \left(\frac{-H_3}{6 f_3} + \Omega\right) \cdot \Pi = 0,$$

wo Π vom Grade $-\frac{1}{2}$ anzunehmen ist*).

Der Beweis für (3) und (4) ergiebt sich sofort, wenn man in den Verzweigungspunkten der kanonischen Fläche die Reihenentwickelungen in Ansatz bringt.

II_a. Lösung der Differentialgleichung durch niedere Functionen.

Die besonderen Fälle, welche hier zu berücksichtigen sind, werden in systematischer Vollständigkeit durch den Picard-Vessiot'schen

*) Bei der so geschriebenen Gleichung erscheint das x_3 gegenüber den x_1, x_2 benachtheiligt; kann man eine symmetrische Form finden, in der die drei Coordinaten gleichmässig berücksichtigt werden?

Ansatz geliefert, von welchem bereits in dem vorigen Referate an zwei Stellen die Rede war. Die Sachlage ist in dem einfachen Falle der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung natürlich die, dass man auf keine anderen besonderen Gleichungen kommt, als auf solche, welche man nach ihrem individuellen Interesse auch früher bereits in Betracht gezogen hatte. Es handelt sich, wenn wir die sämmtlichen Specialfälle unter zwei Categorien zusammenfassen dürfen:

1) um diejenigen linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, welche durchaus algebraische Integrale besitzen,

2) um solche Differentialgleichungen, bei denen eine einzelne Lösung algebraisch wird (sofern man von einem vielleicht vortretenden irrationalen Factor gegebenenfalls absieht).

Ich habe diese beiden Fälle in meiner Vorlesung ausführlich be handelt, indem ich mich dabei (was nicht nothwendig wäre) auf Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten beschränkte. Die ad 2) auftretenden algebraischen Functionen stellen dann rationale ganze Functionen vor, welche ich ganz allgemein als *Lamé'sche Polynome* bezeichne.

Ad 1) habe ich vor allen Dingen die Annahme, dass ikosaedrische Integrirbarkeit vorliegen soll, ins einzelne verfolgt. Ich greife dabei auf meine alte Darstellung in Bd. 12 der Annalen zurück (1877), vereinfache jetzt aber die Betrachtung wesentlich durch Einführung der homogenen Normirung der Differentialgleichung und meine damit bis zum einfachsten Ausdruck der Bedingungen vorgedrungen zu sein. Selbstverständlich handelt es sich in letzter Linie um die Verträglichkeit eines überzähligen Systems linearer Gleichungen.

Ad 2) darf ich an die traditionelle Aufgabestellung erinnern, welche ursprünglich aus der mathematischen Physik stammt und dann in allgemeiner Gestalt von Heine formulirt worden ist. Dieselbe verlangt nicht sowohl eine *vorgelegte* Differentialgleichung auf ihre Integrirbarkeit zu untersuchen, als vielmehr die noch freien Parameter in einer nur erst durch ihre singulären Punkte und Exponenten gegebenen Differentialgleichung so *festzulegen*, dass eine bestimmte Art der Integrirbarkeit eintritt. Nimmt man die Differentialgleichung (1) als Ausgangspunkt (wie dies u. a. bei Wälsch geschieht), so erhält man dafür die besonders einfache Formulirung: es sind φ, ψ gegeben, man soll χ so bestimmen, dass Π gleich einem Polynom von irgend welchem vorgegebenen Grade (welches dann eben das „Lamé'sche" Polynom ist) gesetzt werden kann. Der so getroffene Ansatz dehnt sich ohne weiteres auf lineare Differentialgleichungen der n^{ten} Ordnung aus, worüber man wieder den Aufsatz von Herrn Wälsch vergleichen mag. Aber daneben concentrirt sich, was lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung angeht, das Interesse auf die merkwürdigen Realitäts-

theoreme, welche hier stattfinden. Ich will dieselben hier in aller Kürze bezeichnen:

Man denke sich die Differentialgleichung in der Gestalt (1) gegeben und übrigens der Bequemlichkeit halber einen singulären Punkt ins Unendliche geworfen. Die $(n-1)$ im Endlichen gelegenen singulären Punkte mögen sämmtlich als reell vorausgesetzt werden. Sie begränzen dann $(n-2)$ Intervalle der X-Axe und auf diese kann man irgend k reelle Punkte rein combinatorisch auf $\frac{(k+1)\ldots(k+n-3)}{1.2\ldots(n-3)}$ Weisen vertheilen. *Dies ist nun genau die Zahl der zugehörigen Lamé'schen Polynome k^{ten} Grades.* An dieser Thatsache setzen die Realitätstheoreme in ihrer modernen Form ein. Ich habe in Bd. 18 der Math. Annalen (1881) mit Rücksicht hierauf nur erst den Fall der mathematischen Physik in Betracht gezogen, wo die zweiten Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte, die Gleichungsform (1) vorausgesetzt, gleich $\pm\frac{1}{2}$ sind. Die Uebereinstimmung der beiden Zahlen ruht hier darauf, dass die sämmtlichen existirenden Lamé'schen Polynome k^{ten} Grades reell sind, ferner, gleich Null gesetzt, lauter reelle Wurzeln ergeben, die in den $(n-2)$ Intervallen liegen, und endlich durch die Vertheilungsweise auf die $(n-2)$ Intervalle individuell unterschieden sind. Es hat dann Herr Stieltjes 1884 in Band VI der Acta Mathematica gezeigt, dass der so formulirte Satz allgemein richtig ist, *so lange nur die zweiten Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte kleiner als $+1$ bleiben.*

Ich habe es in meiner Vorlesung als meine besondere Aufgabe betrachtet, dem hier gewonnenen Resultate auf alle Weisen nachzugehen. Insbesondere betrachte ich dabei die conforme Abbildung der Halbebene x, welche der Quotient η zweier Particularlösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung (1) ergiebt. Wählt man als den Nenner y_2 von η im Lamé'schen Falle das zugehörige Polynom, so geht η in bekannter Weise in das Integral einer multiplicativen Function über; die conforme Abbildung auf die η-Ebene ergiebt daher geradlinige Polygone, deren Gestalt ich untersuche*). Es zeigt sich, dass die Gränze von Stieltjes eine genaue Gränze ist, indem einige der Lamé'schen Polynome imaginär werden können oder doch imaginäre Wurzeln erhalten oder auch in der Vertheilungsweise ihrer reellen Wurzeln auf die $(n-2)$ Intervalle übereinstimmen können, sobald auch nur einer der zweiten Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte über den Werth $+1$ hinauswächst. Ich habe diese

*) Man vergleiche hierzu die allgemeinen gestaltlichen Untersuchungen über geradlinige Polygone, welche Herr Schönflies in Bd. 42 dieser Annalen pag. 377ff. (1892) giebt.

Untersuchungen in meiner Vorlesung mit einer gewissen Ausführlichkeit durchgeführt, um dadurch für die sogleich zu besprechenden allgemeinen Probleme zuverlässige Beispiele zu erhalten. Uebrigens muss ich anführen, dass sich Herr Van Vleck bereits vor drei Jahren in meinem Seminare mit der Discussion der Realitätstheoreme für Fälle jenseits der Stieltjes'schen Gränze erfolgreich beschäftigt hat.

II_b. Allgemeine Inbetrachtnahme der Periodicitätssubstitutionen der linearen Differentialgleichungen.

Hier werde ich zunächst Einiges über die Riemann'schen Fragmente vom Jahre 1857 sagen dürfen. Riemann geht dort geradezu von den Periodicitätssubstitutionen aus, welche die Lösungen einer linearen Differentialgleichung bei den Umläufen auf der Riemann'schen Fläche erleiden, und fasst alle Differentialgleichungen, welche dieselben Substitutionen liefern, zu einer *Classe* von Differentialgleichungen zusammen. Man wolle dabei beachten, dass Riemann seiner allgemeinen Denkweise entsprechend die eigentliche Definition der betreffenden Functionen in den Periodicitätssubstitutionen selbst sucht, dass für ihn also die lineare Differentialgleichung etwas Beiläufiges ist, eine von den linearen Relationen, welche zwischen verwandten Functionen, d. h. eben Functionen derselben Classe, bestehen. Hierin ist eine doppelte Fragestellung eingeschlossen. Einmal wird man verlangen, wenn eine lineare Differentialgleichung oder irgend eine Relation zwischen verwandten Functionen vorgelegt ist, die Gesammtheit der verwandten Functionen in einfachster Weise darzustellen. Dies ist eine algebraische Aufgabe, deren Durchführung, wie es scheint, keinerlei principielle Schwierigkeiten bietet, wenn selbige auch bislang noch nicht in systematischer Form vorliegen dürfte. Zweitens aber muss das Problem sein, ob man die Periodicitätssubstitutionen ganz willkürlich geben kann, d. h. ob allemal auf gegebener Riemann'scher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten zu gegebenen Substitutionen eine zugehörige Classe verwandter Functionen existirt. Die von Riemann selbst begonnene Constantenzählung zeigt, dass man zu dem Zwecke auf der Riemann'schen Fläche eine gewisse Zahl beweglicher Nebenpunkte einführen muss, d. h. solcher singulärer Punkte, deren Umkreisung die identische Substitution ergiebt, die also bei Aufstellung der Periodicitätssubstitutionen nicht mitzählen. Damit aber ist der Existenzbeweis nur erst vorbereitet. Ich habe meinen Zuhörern seit lange vorgeschlagen, den Beweis bei den linearen Differentialgleichungen der *zweiten* Ordnung in der Weise zu führen, dass man zunächst, den gegebenen Periodicitätssubstitutionen entsprechend, einen η-Bereich construirt (der den Nebenpunkten entsprechend bewegliche

6*

innere Verzweigungspunkte enthalten muss), und dann zeigt, dass dieser Bereich (eben vermöge der beweglichen Verzweigungspunkte) allgemein genug ist, um jede mit einer bestimmten Zahl beliebig anzunehmender Verzweigungspunkte versehene Riemann'sche Fläche darzustellen. Doch scheint es fast, dass dieser Weg in übergrosse Complicationen hineinführt. Wenigstens haben die jetzt glücklich zu Ende geführten Untersuchungen von Herrn Schilling*) ergeben, dass die wirkliche Gestalt des η-Bereichs schon im Falle $p = 0$, $n = 3$, sobald man ganz allgemeine Exponentendifferenzen zulässt, verwickelt genug ist.

Man vergleiche auch hier die Theorie der Abel'schen Integrale. Der soeben an erster Stelle formulirten Aufgabe würde entsprechen, dass man verlangt, innerhalb noch näher vorzuschreibender Gränzen neben ein erstes gegebenes Integral alle anderen zu stellen, die sich von ihm nur um eine algebraische Function unterscheiden. Hier rubriciren also beispielsweise die Untersuchungen über die Kettenbruchentwickelungen hyperelliptischer Integrale, welche Herr Van Vleck neuerdings eben unter den hier vorliegenden Gesichtspunkten zusammenfassend behandelt hat**). Bei der zweiten Aufgabe würde man von einem Integrale auf gegebener Riemann'scher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten (d. h. logarithmischen Unstetigkeitspunkten) eine nach Willkür vorgegebene Periodicität verlangen müssen. Die Abzählung zeigt, dass man zu dem Zwecke dem Integral von vorneherein p algebraische Unstetigkeitspunkte beilegen muss. Von da aus erfolgt dann die Constantenbestimmung in einfachster Weise auf analytischem Wege, und es ist nicht nöthig, auf die Hülfsmittel der geometrischen Functionentheorie zu recurriren.

Wie dem auch sei, jedenfalls sieht der auf Abel'sche Integrale bezügliche Riemann'sche Satz, von welchem in der Einleitung gesprochen wurde, den Gegenstand unter einem anderen Gesichtspunkte. Bei ihm gelten neben der Riemann'schen Fläche die sämmtlichen Unstetigkeitspunkte des Integrals als gegeben, und es wird dann, um das Integral festzulegen, nur ein *Theil* der Periodicitätseigenschaften vorgeschrieben. Diesem letzteren Ansatze entspricht nun, was ich selbst bei den linearen Differentialgleichungen versucht und bis zu einem gewissen Grade in der vorliegenden Vorlesung durchgeführt habe. Gegeben ist die Riemann'sche Fläche mit sämmtlichen auf ihr befindlichen singulären Punkten; in der Differentialgleichung sind also nur noch die sogenannten accessorischen Parameter willkürlich; *man*

---

*) Geometrische Studien zur Theorie der Schwarz'schen s-Function; Theil I, diese Annalen Bd. 44 (1893), Theil II, Bd. 46 (1894).

**) American Journal, t. 16 (1893).

soll diese accessorischen Parameter dadurch eindeutig festlegen, dass man die Periodicitätssubstitutionen bestimmten Bedingungen unterwirft. Es sind zweierlei Bedingungssysteme, mit denen ich in der hiermit gegebenen allgemeinen Richtung bisher Erfolg gehabt habe. Leider ergeben beide nur ganz particuläre Arten von Differentialgleichungen. Es handelt sich erstens um das *Fundamentaltheorem der automorphen Functionen*, zweitens um das sogenannte *Oscillationstheorem*.

1. Von dem Fundamentaltheoreme der automorphen Functionen.

Wir werden statt der Particularlösungen y_1, y_2 der linearen Differentialgleichung wieder deren Quotienten η in Betracht ziehen. Dann besagt das Fundamentaltheorem, kurz ausgedrückt: dass man die accessorischen Parameter der Differentialgleichung jedesmal auf eine und nur eine Weise so festlegen kann, dass bei der Umkehr des Functionsverhältnisses *eindeutige* automorphe Functionen eines bestimmten „Typus" entstehen (vergl. Bd. 21 dieser Annalen, pag. 206). Ich bin auf dieses Theorem in der gegenwärtigen Vorlesung nur beiläufig eingegangen, da eine zusammenhängende Darstellung der automorphen Functionen einer anderen Gelegenheit vorbehalten werden muss. Der Deutlichkeit halber will ich zufügen, dass der einzige Fall dieses Theorems, welcher von Poincaré und Anderen behandelt worden ist, den „Haupttypus" betrifft, in welchem ein einzelner Gränzkreis und keinerlei sonstige Gränzgebilde auftreten.

2. Das Oscillationstheorem.

Das Oscillationstheorem betrachtet Differentialgleichungen mit *reellen* Coefficienten und studirt den allgemeinen Verlauf ihrer *reellen* Lösungen y bei *reell* veränderlichem x. Man fragt, ob sich die y in einem Segmente der x-Axe oscillatorisch verhalten, bez. wie viele Oscillationen sie in demselben ausführen. In dieser Hinsicht hat zuerst Sturm bemerkt (in den Bänden 1 und 2 von Liouville's Journal, 1836 – 37), dass man unter geeigneten Verhältnissen einen in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter eindeutig durch die Forderung festlegen kann, es solle in einem gegebenen Segmente der X-Axe eine gewisse Stärke der Oscillation stattfinden. Dieses ist der einfachste Fall des Oscillationstheorems; derselbe ist in neuerer Zeit bekanntlich von Picard einer genaueren analytischen Untersuchung unterworfen worden. Ich selbst bin in Band 18 dieser Annalen (1881) zu einem weiteren Falle fortgeschritten, indem ich die gewöhnliche Lamé'sche Gleichung studirte:

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = (Ax + B)\,y, \quad \text{wo} \quad t = \int \frac{dx}{2\sqrt{\overline{x-a}\cdot\overline{x-b}\cdot\overline{x-c}}},$$

und bemerkte, dass man hier die *beiden* Parameter A, B gleichzeitig eindeutig dadurch festlegen kann, dass man in zwei verschiedenen Segmenten der X-Axe bestimmte Oscillationsstärken verlangt. Ich bin beim Beweise von einfachen geometrisch-mechanischen Betrachtungen ausgegangen. Andererseits hatte ich bei Aufstellung des Theorems, ebenso wie Sturm, ursprünglich mathematisch-physikalische Fragen im Auge, nämlich das Gesetz gewisser in der Potentialtheorie auftretender Reihenentwickelungen. Alle diese Betrachtungen sind seitdem von Hrn. Bôcher in seinem bereits im vorigen Referate genannten und nunmehr erschienenen Werke weitgehend verfolgt*). *Aber man kann das Theorem ebensowohl als ein rein functionentheoretisches gelten lassen.* Es hat dann besonderes Interesse, die Oscillationsbetrachtungen mit der geometrischen Gestalt desjenigen Kreisbogenpolygons in Verbindung zu bringen, auf welches der Quotient η zweier Particularlösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung die Halbebene x abbildet.

Von den ausführlichen Betrachtungen, die ich in meiner Vorlesung betreffend das Oscillationstheorem gegeben habe, sollen hier nur solche hervorgehoben werden, welche sich in der Bôcher'schen Darstellung nicht finden.

a) Ich betrachte allgemeine Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, die ich mir wieder der Formel (1) entsprechend normirt denken will. Die singulären Punkte der Differentialgleichung seien, wenigstens zum Theil, selber reell. Ich habe dann untersucht, unter welchen Bedingungen man die Segmente, für welche man die Oscillationsbedingungen vorschreiben will, bis an die singulären Stellen heranerstrecken kann. Hier zeigt sich die principielle Bedeutung der Stieltjes'schen Gränze. Ueberschreitet man die Gränze, d. h. nimmt man den zweiten Exponenten eines zu (1) gehörigen singulären Punktes $> +1$, so versagen für ein bis an den singulären Punkt heranerstrecktes Segment die geometrisch-mechanischen Betrachtungen, auf denen der Beweis des Oscillationstheorems ruht.

b) Die Kreisbogenpolygone habe ich ganz besonders für diejenigen Fälle untersucht, in denen die zweiten Exponenten der in Betracht kommenden singulären Punkte gleich $+\frac{1}{2}$ sind, d. h. das Polygon in den betreffenden Ecken rechte Winkel aufweist. Nehmen wir beispielsweise die Differentialgleichung (5). Hier werden wir als Polygon der η-Ebene ein Kreisbogenviereck haben, welches bei $x = a, b, c$ drei rechtwinkelige Ecken besitzt. Dagegen hängt der Winkel bei $x = \infty$ von dem Parameter A ab; setzt man $A = n(n+1)$, so wird der

*) Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Teubner 1894.

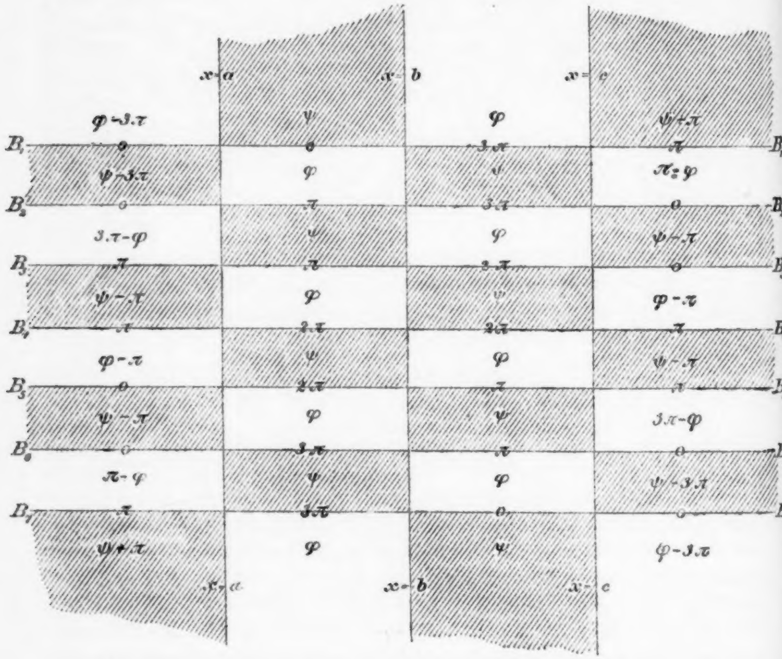
betreffende Winkel $= \frac{2n+1}{2}\pi$. Man übertrage dieses Kreisbogenviereck durch stereographische Projection auf eine Kugel und definire nun die *Länge* oder *Amplitude* der einzelnen von zwei rechten Winkeln begränzten Kreisbogenseite ganz ähnlich, wie man es beim sphärischen Dreiecke macht. Zu dem Zwecke wird man vor allen Dingen die η-Kugel selbst als Fundamentalfläche der zu benutzenden projectiven Maassbestimmung einführen. Handelt es sich dann um die Länge der Kreisbogenseite $\overline{ab}$, so bestimme man vorab den Winkel, den die beiden Ebenen, welche die an $\overline{ab}$ angränzenden Kreisbogenstücke da und bc, im Sinne der Maassbestimmung mit einander bilden. Dieser Winkel hat ∞ viele Werthe, welche sich aus einem, φ_0, in der Gestalt $m\pi + \varphi_0$ ergeben, unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden. *Als Amplitude von $\overline{ab}$ werde ich denjenigen dieser unendlich vielen Winkel bezeichnen, welcher der Art und Weise entspricht, wie sich die Seite $\overline{ab}$ zwischen den begränzenden Ebenen hinerstreckt.* Zeichnet man eine Figur, so ist sofort klar, was hiermit gemeint ist. Wir müssen dabei ersichtlich drei Fälle unterscheiden, jenachdem die Schnittlinie der beiden begränzenden Ebenen die η-Kugel trifft, berührt, oder nicht trifft. Im ersten Falle wird φ_0 eine nicht verschwindende reelle Grösse vorstellen, im zweiten Falle gleich Null und im dritten rein imaginär anzunehmen sein. Ich bezeichne dementsprechend die Amplitude der Kreisbogenseite $\overline{ab}$ beziehungsweise als elliptisch, parabolisch, hyperbolisch. — Die weitere Untersuchung zeigt schliesslich, dass die Oscillationsbedingung, welche dem Intervall $\overline{ab}$ der X-Axe im Sinne des Oscillationstheorems auferlegt werden soll, dahin umgesetzt werden kann, *dass man für die Kreisbogenseite $\overline{ab}$ eine bestimmte elliptische Amplitude vorschreibt.*

c) Ich will jetzt annehmen, dass die Differentialgleichung (5) dadurch festgelegt sei, dass man für die Intervalle $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ zwei bestimmte elliptische Amplituden vorgibt. Die Betrachtung des zugehörigen Kreisbogenpolygons lehrt dann noch ein Weiteres; sie lässt nämlich erkennen, wie die anderen Kreisbogenseiten des Polygons verlaufen und gestattet von da aus einen Schluss auf das Verhalten der Differentialgleichung in den anderen Intervallen der X-Axe. Die solcherweise entstehenden Beziehungen entsprechen genau den Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie, deren Bedeutung für die hypergeometrische Function im vorigen Referate hervorgehoben wurde. —

Als ein besonderes Beispiel, bei welchem alle diese Ansätze a), b), c) zur Geltung gelangen, habe ich schliesslich *den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Gleichung* gewählt, d. h. eben die Gleichung (5), mit der besonderen Massnahme, dass wir für A den Werth $n(n+1)$

eintragen, unter n eine irgendwie vorzugebende ganze Zahl verstanden. Wir haben dann nur den einen Parameter B zur freien Verfügung.

Die Resultate, welche betreffs dieser Gleichung in meiner Vorlesung ausführlich abgeleitet werden, finden sich zum Theil bereits in einem kleinen Aufsatze, den ich in Bd. 41 dieser Annalen (1891) publicirte, nur dass ich dort nicht direct die „Amplituden" der einzelnen Kreisbogenseiten betrachte, sondern nur die „Charakteristiken" derselben, d. h. die ganzzahligen Multipla von 2π, welche in den Amplituden enthalten sind. Führt man die Amplituden selbst ein, so vervollständigen sich die damaligen Figuren. Man nehme folgende Figur für $n = 3$:



Die Ebene (x, B) ist hier — den damaligen Erläuterungen entsprechend — durch die fünf horizontalen Geraden $B = B_1, \ldots B_7$ und die drei verticalen Linien $x = a, b, c$ in 24 Felder zerlegt, von denen die schraffirten hyperbolischen, die anderen elliptischen Charakter haben, d. h. solche Stücke der X-Axe enthalten, welche für die zugehörigen Werthe von B hyperbolische, bez. elliptische Amplituden aufweisen. Die einzelnen Stücke der horizontalen Gränzlinien $B_1, \ldots B_7$

{welch' letztere den hier auftretenden Fällen Lamé'scher Polygone entsprechen} haben natürlich parabolischen Charakter. Derselbe ist dadurch näher bezeichnet, dass in der Figur jedem einzelnen Stücke dieser Gränzlinien seine parabolische Amplitude, also ein bestimmtes Multiplum von π, beigesetzt ist. In die verschiedenen Felder der beiden verticalen Mittelstreifen sind jetzt zur Bezeichnung der zugehörigen elliptischen und hyperbolischen Amplituden die Buchstaben φ und ψ eingetragen. Unter φ hat man sich dabei eine reelle Grösse zu denken, welche ihrem Betrage nach zwischen den parabolischen Amplituden liegt, die das jeweilige Feld horizontal eingränzen. In dem obersten Felde des rechtsseitigen und dem untersten Felde des linksseitigen Mittelstreifens (die sich beide in's Unendliche ziehen), ist dies so zu verstehen, dass φ in ihnen von dem parabolischen Gränzwerthe 3π beginnend unbegränzt in's Unendliche zunimmt. — Das ψ hinwieder ist eine complexe Grösse, deren reeller Bestandtheil in dem einzelnen hyperbolischen Felde einen constanten Betrag hat, — denselben, den die parabolischen Amplituden der begränzenden horizontalen Linien besitzen. — Aus diesen φ, ψ der einzelnen Felder der beiden Mittelstreifen berechnen sich dann die elliptischen und hyperbolischen Amplituden der entsprechenden Felder der beiden Seitenstreifen so, wie es in der Figur eingetragen ist. *Man sieht, dass für jeden Werth von B zwei der Amplituden durch die beiden anderen bestimmt sind.* Dies ist, im vorliegenden Falle, das Analogon der Ergänzungsformeln der sphärischen Trigonometrie*).

Ich habe noch hervorzuheben, in welcher Beziehung das hier mitgetheilte Schema zum *Oscillationstheorem* steht. Die Hermite'sche Gleichung enthält, wie wir schon sagten, bei festgehaltenem n nur den einen Parameter B; es handelt sich bei ihr also um ein Beispiel, das sich neben die von Sturm untersuchten Fälle stellt. Wir werden für dieses Beispiel das Oscillationstheorem insbesondere dahin aussprechen können: *dass das B eindeutig gegeben ist, sobald man für eines der beiden mittleren Intervalle der X-Axe, $\overline{ab}$ oder $\overline{bc}$, eine bestimmte elliptische Amplitude vorschreibt.* Diese Aussage ist mit unserer Figur verträglich; sie vervollständigt dieselbe aber noch durch die Angabe, dass innerhalb der elliptischen Felder des Streifens $\overline{ab}$ das φ bei wachsendem B stetig *abnimmt,* innerhalb der elliptischen Felder des Streifens $\overline{bc}$ aber stetig *zunimmt.* B wird eine eindeutige Function des auf den einzelnen Mittelstreifen treffenden φ sein, die allemal, wenn ein hyperbolisches Feld übersprungen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Man beachte, dass die gleiche Behauptung für

*) Vergl. hierzu die allgemeinen Untersuchungen von Herrn Schönflies über Kreisbogenvierecke in Bd. 44 dieser Annalen (1893).

die elliptischen Amplituden der beiden äusseren Streifen unserer Figur keineswegs aufgestellt werden kann. Vielmehr hat z. B. im Streifen linker Hand das φ Werthe zwischen 0 und π, sowohl wenn B zwischen B_4 und B_5 als wenn es zwischen B_6 und B_7 liegt. *Das Oscillationstheorem gilt also nicht mehr für die elliptischen Amplituden der äusseren Intervalle.* Es stimmt dies damit, dass bei dem singulären Punkte $x = \infty$ die Stieltjes'sche Gränze überschritten ist. —

Zum Schlusse darf ich noch bemerken, dass die im vorliegenden Referate berührten Entwickelungen, welche im Vorlesungshefte mit aller erforderlichen Ausführlichkeit gegeben werden, zum Theil bereits in einer Vorlesung über Lamé'sche Functionen enthalten waren, die ich im Winter 1889—90 gehalten habe*), dann aber zum ersten Male im Zusammenhange in den Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen entwickelt wurden, die ich von Herbst 1890—1891 gegeben habe. Diese letzteren Vorlesungen sind, wie ich in meinem vorigen Referate bemerkte, in einer kleineren Zahl von Exemplaren ebenfalls autographirt verbreitet. Der Vergleich wird zeigen, dass ich damals mit meinen Behauptungen sogar wesentlich weiter gegangen bin, als dieses Mal. Ich habe dann freilich gleich gegen Schluss der Vorlesung bemerkt, dass die sämmtlichen Angaben der erneuten Controle bedürfen. Ich hatte den Gegenstand zu Anfang für einfacher gehalten, als er in Wirklichkeit ist. Insbesondere habe ich jetzt einige Aussagen berichtigen müssen, die mit der Gränze von Stieltjes zusammenhängen, deren fundamentale Bedeutung ich damals noch nicht erkannt hatte.

Göttingen, den 16. September 1894.

*) Vergl. die Mittheilung in den Göttinger Nachrichten vom März 1890 (die nur zum Theil in Band 38 dieser Annalen abgedruckt ist).

Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.

(Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe).

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Nehmen wir die Punkte, die Geraden und die Ebenen als Elemente, so können zur Begründung der Geometrie die folgenden Axiome dienen:

1. *Die Axiome, welche die Verknüpfung dieser Elemente untereinander betreffen*; kurz zusammengefasst, lauten dieselben, wie folgt:

Irgend 2 Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade a. — Irgend 3 nicht auf einer Geraden gelegenen Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene α. — Wenn 2 Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt die Gerade a vollständig in der Ebene α. — Wenn 2 Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein. — Auf jeder Geraden giebt es wenigstens 2 Punkte, in jeder Ebene wenigstens 3, nicht auf einer Geraden gelegene Punkte, und im Raume giebt es wenigstens 4 nicht in einer Ebene gelegene Punkte. —

2. *Die Axiome, durch welche der Begriff der Strecke und der Begriff der Reihenfolge von Punkten einer Geraden eingeführt wird.* Diese Axiome sind von M. Pasch*) zuerst aufgestellt und systematisch untersucht worden; dieselben sind im wesentlichen folgende:

Zwischen 2 Punkten A, B einer Geraden giebt es stets wenigstens einen dritten Punkt C der Geraden. — Unter 3 Punkten einer Geraden giebt es stets einen und nur einen, welcher zwischen den beiden anderen liegt. — Wenn A, B auf der Geraden a liegen, so giebt es stets einen Punkt C der nämlichen Geraden a, so dass B zwischen A und C liegt. — Irgend 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 einer Geraden a

---

*) Vgl. Vorlesungen über neuere Geometrie. Teubner 1882.

können stets in der Weise angeordnet werden, dass allgemein A_i zwischen A_h und A_k liegt, sobald der Index h kleiner und k grösser als i oder umgekehrt der Index k kleiner und h grösser als i ist. — Jede Gerade a, welche in einer Ebene α liegt trennt die Punkte dieser Ebene α in 2 Gebiete von folgender Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt A' des anderen Gebietes zusammen eine Strecke AA', innerhalb welcher ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen irgend 2 Punkte A und B des nämlichen Gebietes eine Strecke AB, welche keinen Punkt der Geraden a enthält.

3. Das Axiom der Stetigkeit, welchem ich folgende Fassung gebe:

Wenn $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten einer Geraden a sind und B ein weiterer Punkt auf a ist, von der Art, dass allgemein A_i zwischen A_h und B liegt, sobald der Index h kleiner als i ist, so giebt es einen Punkt C, welcher folgende Eigenschaft besitzt: sämmtliche Punkte der unendlichen Reihe $A_2, A_3, A_4, \ldots$ liegen zwischen A_1 und C und jeder andere Punkt C', für welchen dies ebenfalls zutrifft, liegt zwischen C und B.

Auf diese Axiome lässt sich in vollkommener Strenge die Theorie der harmonischen Punkte gründen, und wenn wir uns derselben in ähnlicher Weise bedienen, wie dies F. Lindemann*) thut, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Jedem Punkte kann man 3 endliche reelle Zahlen x, y, z und jeder Ebene eine lineare Relation zwischen diesen 3 Zahlen x, y, z zuordnen, derart, dass alle Punkte, für welche die 3 Zahlen x, y, z die lineare Relation erfüllen, in der betreffenden Ebene liegen und dass umgekehrt allen in dieser Ebene gelegenen Punkten Zahlen x, y, z entsprechen, welche der linearen Relation genügen. Werden ferner x, y, z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im gewöhnlichen Euklidischen Raume gedeutet, so entsprechen den Punkten des ursprünglichen Raumes Punkte im Inneren eines gewissen nirgends concaven Körpers des Euklidischen Raumes und umgekehrt entsprechen allen Punkten im Innern dieses nirgends concaven Körpers Punkte unseres ursprünglichen Raumes: *unser ursprünglicher Raum ist mithin auf das Innere eines nirgends concaven Körpers des Euklidischen Raumes abgebildet.*

Hierbei ist unter einem nirgends concaven Körper ein Körper von der Beschaffenheit verstanden, dass, wenn man 2 im Inneren des Körpers gelegene Punkte miteinander durch eine Gerade verbindet, der zwischen diesen beiden Punkten gelegene Theil der Geraden ganz

---

*) Vgl. Vorlesungen über Geometrie Bd. II. Theil 1, S. 433 u. f.

in das Innere des Körpers fällt. Ich erlaube mir, Sie darauf aufmerksam zu machen, dass diesen hier auftretenden nirgends concaven Körpern auch in den zahlentheoretischen Untersuchungen von H. Minkowski*) eine wichtige Rolle zukommt, und dass H. Minkowski für dieselben eine einfache analytische Definition gefunden hat.

Wenn umgekehrt im Euklidischen Raume ein beliebiger nirgends concaver Körper gegeben ist, so definirt derselbe eine bestimmte Geometrie, in welcher die genannten Axiome sämmtlich gültig sind: jedem Punkt im Inneren des nirgends concaven Körpers entspricht ein Punkt in jener Geometrie; jeder durch das Innere des Körpers gehenden Geraden und Ebene des Euklidischen Raumes entspricht eine Gerade bezüglich Ebene der allgemeinen Geometrie; den auf der Grenze oder ausserhalb des nirgends concaven Körpers gelegenen Punkten und den ganz ausserhalb des Körpers verlaufenden Geraden und Ebenen des Euklidischen Raumes entsprechen keine Elemente der allgemeinen Geometrie. Der obige Satz über die Abbildung der Punkte in der allgemeinen Geometrie auf das Innere des nirgends concaven Körpers im Euklidischen Raume drückt somit eine Eigenschaft der Elemente der allgemeinen Geometrie aus, welche inhaltlich mit den anfangs aufgestellten Axiomen vollkommen gleichbedeutend ist.

Wir definiren nun den Begriff der Länge einer Strecke AB in unserer allgemeinen Geometrie und bezeichnen zu dem Zwecke diejenigen beiden Punkte des Euklidischen Raumes, welche den Punkten A und B des ursprünglichen Raumes entsprechen, ebenfalls mit A und B; wir verlängern dann die Gerade AB im Euklidischen Raume über A und B hinaus, bis dieselbe die Begrenzung des nirgends concaven Körpers in den Punkten X bezüglich Y trifft und bezeichnen allgemein die Euklidische Entfernung zwischen irgend 2 Punkten P und Q des Euklidischen Raumes kurz mit $\overline{PQ}$; dann heisst der reelle Werth

$$\widehat{AB} = l\left\{\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right\}$$

die *Länge* der Strecke AB in unserer allgemeinen Geometrie. Wegen

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} > 1, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} > 1$$

ist diese Länge stets eine positive Grösse.

Es lassen sich leicht die Eigenschaften des Begriffs der Länge aufzählen, welche mit Nothwendigkeit auf einen Ausdruck der angegebenen Art für $\widehat{AB}$ führen; doch unterlasse ich dies, damit ich durch diesen Brief nicht allzusehr Ihre Aufmerksamkeit ermüde.

---

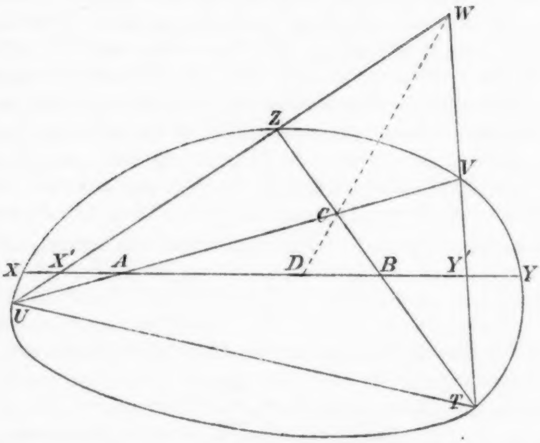
*) Vgl. Geometrie der Zahlen. Teubner 1895.

Die aufgestellte Formel für $\widehat{AB}$ lehrt zugleich, in welcher Weise diese Grösse von der Gestalt des nirgends concaven Körpers abhängt. Halten wir nämlich die Punkte A und B im Inneren des Körpers fest und ändern nur die Begrenzung des Körpers derart, dass der Grenzpunkt X sich nach A hinbewegt und Y sich dem Punkte B nähert, so ist klar, dass jeder der beiden Quotienten

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

und folglich auch der Werth von $\widehat{AB}$ sich vergrössert.

Es sei jetzt im Inneren des nirgends concaven Körpers ein Dreieck ABC gegeben. Die Ebene α desselben schneidet aus dem Körper ein nirgends concaves Oval aus. Wir denken uns ferner jede der 3 Seiten AB, AC, BC des Dreieckes über beide Endpunkte hinaus verlängert, bis sie die Begrenzung des Ovals bezüglich in den Punkten X und Y, U und V, T und Z schneiden; dann construiren wir die geraden Verbindungslinien UZ und TV und verlängern dieselben bis zu ihrem Durchschnitt W; ihre Schnittpunkte mit der Geraden XY bezeichnen



wir mit X' bezüglich Y'. Wir legen nunmehr statt des ursprünglichen nirgends concaven Ovals in der Ebene α das Dreieck UWT zu Grunde und erkennen leicht, dass in der durch dieses Dreieck bestimmten ebenen Geometrie die Längen $\widehat{AC}$ und $\widehat{BC}$ die gleichen sind, wie in der ursprünglichen Geometrie, während die Länge der Seite AB durch die vorgenommene Aenderung vergrössert worden ist. Wir bezeichnen

die neue Länge der Seite AB zum Unterschiede von der ursprünglichen Länge $\widehat{AB}$ mit $\widehat{\widehat{AB}}$; dann ist $\widehat{\widehat{AB}} > \widehat{AB}$.

Es gilt nun für die Längen der Seiten des Dreiecks ABC die einfache Beziehung

$$\widehat{\widehat{AB}} = \widehat{AC} + \widehat{BC}.$$

Zum Beweise verbinden wir W mit C und verlängern diese Gerade bis zum Durchschnitt D mit AB. Nach dem bekannten Satze vom Doppelverhältniss ist dann wegen der perspectiven Lage der beiden Punktreihen X', A, D, Y' und U, A, C, V

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}}\,\frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\,\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}$$

und wegen der perspectiven Lage der beiden Punktreihen Y', B, D, X und T, B, C, Z ist

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}}\,\frac{\overline{Y'D}}{\overline{Y'B}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\,\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.$$

Die Multiplication beider Gleichungen ergiebt

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}}\,\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\,\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}\cdot\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\,\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}$$

und diese neue Gleichung beweist meine Behauptung.

Aus obiger Untersuchung erkennen Sie, dass lediglich auf Grund der zu Anfang meines Briefes aufgezählten Axiome der allgemeine Satz gilt:

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser oder gleich der dritten Seite.

Zugleich ist klar, dass der Fall der Gleichheit dann und nur dann vorkommt, wenn die Ebene α aus der Begrenzung des nirgends concaven Körpers zwei gerade Linienstücke UZ und TV ausschneidet. Die letztere Bedingung lässt sich auch ohne Zuhilfenahme des nirgends concaven Körpers ausdrücken. Sind nämlich irgend 2 in einer Ebene α gelegene und in einem Punkte C sich schneidende Geraden a und b der ursprünglichen Geometrie gegeben, so werden im Allgemeinen in jedem der 4 in α um C herum entstehenden ebenen Winkelräume solche gerade Linien vorhanden sein, welche keine der beiden Geraden a und b schneiden; sind jedoch insbesondere in 2 sich gegenüberliegenden ebenen Winkelräumen keine solchen geraden Linien vorhanden, so ist die fragliche Bedingung erfüllt, und *es giebt dann stets Dreiecke, für welche die Summe zweier Seiten gleich der dritten ist.* In dem betrachteten Falle ist also zwischen gewissen Punkten A und B ein aus 2 geradlinigen Stücken zusammengesetzter

Weg möglich, deren Gesammtlänge gleich der directen Entfernung der beiden Punkte A und B ist; es lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass *alle Wege zwischen den beiden Punkten A und B von derselben Eigenschaft sich aus den construirten Wegen zusammensetzen lassen und dass die übrigen Verbindungswege von grösserer Gesammtlänge sind.* Die nähere Untersuchung dieser Frage nach den kürzesten Wegen ist leicht ausführbar und bietet ein besonderes Interesse in dem Falle, dass für die Begrenzung des nirgends concaven Körpers ein Tetraeder zu Grunde gelegt wird.

Zum Schluss erlaube ich mir, darauf hinzuweisen, dass ich bei der vorstehenden Entwicklung stets den nirgends concaven Körper als ganz im Endlichen gelegen angenommen habe. Wenn jedoch in der durch die ursprünglichen Axiome definirten Geometrie eine Gerade und ein Punkt vorhanden ist von der Eigenschaft, dass durch diesen Punkt zu der Geraden nur eine einzige Parallele möglich ist, so ist jene Annahme nicht gerechtfertigt. Es wird leicht erkannt, welche Abänderungen meine Betrachtung dann zu erfahren hat.

Kleinteich bei Ostseebad Rauschen, den 14. August 1894.

Ueber isometrische Flächen.

Von

A. Voss in Würzburg.

Man pflegt zwei Flächen, welche in correspondirenden Punkten dasselbe Längenelement besitzen, auf einander abwickelbar zu nennen. Diese Bezeichnung scheint indessen die Voraussetzung einer continuirlichen Deformation durch Biegung einzuschliessen, durch welche die eine Fläche auf der anderen ausgebreitet wird. Es scheint mir daher, so lange man nicht speciell mit der Frage sich beschäftigt, wie die Abwickelung wirklich *realisirt* werden könne, zweckmässiger, zwei Flächen mit gleichem Längenelement als *isometrisch auf einander bezogen* oder kurz *isometrisch* zu nennen. Auf zwei solchen Flächen existirt nun — von dem Falle der mit ihren Erzeugenden auf einander bezogenen Developpabelen abgesehen — immer mindestens ein *reelles Coordinatensystem*, für welches nicht allein die Fundamentalgrössen erster Ordnung e, f, g einander gleich, sondern auch die der zweiten Ordnung E, F, G nur durch ihre Vorzeichen von einander abweichen. Ein solches Coordinatensystem bezeichne ich in § 2 als ein *charakteristisches Coordinatensystem*. Die Aufsuchung aller charakteristischen Systeme auf einer gegebenen Fläche schliesst natürlich die der Fundamentalgrössen aller zu dieser isometrischen ein. Im § 3 sind einige Flächengattungen besprochen, welche besonders einfache charakteristische Systeme besitzen; der letzte endlich erörtert den Zusammenhang dieser Systeme mit den kleinen Deformationen der Fläche.

§ 1.

Curven gleicher Normalkrümmung auf zwei isometrischen Flächen.

Sind für zwei Flächen die Fundamentalgrössen erster Ordnung e, f, g dieselben; d. h. sind sie *isometrisch* auf einander bezogen, während die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung durch E, F, G E', F', G' bezeichnet werden, so bleiben bekanntlich die geodätischen

Krümmungen correspondirender Curven ungeändert. Versteht man unter $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho_1}$ die Normalkrümmungen derselben, welche durch die Ausdrücke

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{ds^2},$$
$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2}{ds^2}$$

gegeben sind, so zeigt sich, dass durch jeden Punkt Richtungen gehen, für welche

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1^2}$$

wird, bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(E-E')\,du^2 + 2(F-F')\,du\,dv + (G-G')\,dv^2 = 0,\\ &(E+E')\,du^2 + 2(F+F')\,du\,dv + (G+G')\,dv^2 = 0 \end{aligned}$$

für welche also die Quadrate der Normalkrümmungen gleich sind. Da nun das Quadrat der totalen Krümmung einer Curve auf der Fläche gleich der Summe der Quadrate der normalen und der geodätischen Krümmung ist, so haben diese Richtungen die ausgezeichnete Eigenschaft, *dass alle correspondirenden Curven, welche sie berühren, die nämliche totale Krümmung (im absoluten Sinne) besitzen.*

Nach den Gleichungen (1) gehen durch jeden Punkt im allgemeinen *vier* paarweise zusammengehörende Richtungen dieser Art*), falls nicht unendlich viele vorhanden sind. In Bezug auf die *Realität* derselben scheint mir das folgende Theorem von Interesse zu sein:

Bei zwei isometrischen Flächen, welche nicht lediglich durch ihre Lage von einander verschieden sind, existiren — von dem einzigen Falle abgesehen, wo beide developpabel und mit ihren Erzeugenden auf einander bezogen sind — und ferner abgesehen von solchen Punkten, welche keinen zusammenhängenden Flächentheil erfüllen, *immer (mindestens) zwei reelle und von einander verschiedene Richtungen, für welche die Quadrate der Normalkrümmungen einander gleich sind.*

Dabei soll vorausgesetzt werden, dass die Flächen sich in der Nähe des zu betrachtenden Punktes *regulär* verhalten, also namentlich auch die Fundamentalgrössen sämmtlich endliche und bestimmte Werthe haben, ferner, *dass die Flächen nicht lediglich durch ihre Lage von einander verschieden sind,* also durch Bewegung oder Spiegelung aus einander abgeleitet worden sind, in welch' letzterem Falle offenbar je zwei correspondirende Richtungen die genannte Eigenschaft haben würden.

*) Ueber den Zusammenhang derselben mit den Indicatricen vergl. die Schlussbemerkung zu § 4.

Bezeichnet man mit Δ_1, Δ_2 die Discriminanten der beiden Gleichungen (1) so ist

$$(2)\qquad \begin{aligned}\Delta_1 &= (E'G + EG' - 2FF') - 2K,\\ \Delta_2 &= -(E'G + EG' - 2FF') - 2K,\end{aligned}$$

wenn unter K der gemeinsame Zähler

$$EG - F^2 = E'G' - F'^2$$

des Krümmungsmasses verstanden wird. Es ist also auch

$$\Delta_1 + \Delta_2 = -4K.$$

Sind nun beide Flächen *negativ* gekrümmt, also K negativ, so ist sicher eine der Grössen Δ_1, Δ_2 positiv, d. h. *es sind mindestens zwei reelle von einander verschiedene Richtungen jener Art vorhanden.* Denn selbst wenn Δ_1 gleich Null wäre, würde dann noch Δ_2 jedenfalls von Null verschieden und positiv sein.

Ist dagegen K *positiv*, so ist die Summe $\Delta_1 + \Delta_2$ negativ. Aber man kann leicht zeigen, dass *eine* der Discriminanten *positiv* sein muss, während dann selbstverständlich die andere negativ ausfällt, so dass in diesem Falle *nur* zwei reelle Richtungen vorhanden sind. Denn die Gleichung

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} E - \varrho E' & F - \varrho F' \\ F - \varrho F' & G - \varrho G' \end{vmatrix} = 0$$

hat bei positivem K nur *reelle* Wurzeln.*)

Es ist also auch ihre Discriminante

$$\Delta = (E'G + G'E - 2FF')^2 - 4K^2 = -\Delta_1\Delta_2$$

immer positiv. Mithin sind Δ_1 und Δ_2 von entgegengesetztem Zeichen, wie zu zeigen war.

Eine besondere Ueberlegung aber erfordert hier die Möglichkeit, dass auch Δ gleich Null sein könnte, in welchem Falle nicht mehr

---

*) Auf der Betrachtung einer ähnlichen quadratischen Gleichung beruht auch der Beweis des Tissot'schen Satzes über zwei auf einander bezogene Flächen. Von den reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung (3) hängt übrigens auch ab, ob das gemeinsame conjugirte Coordinatensystem zweier solchen Flächen reell oder imaginär ist.

Sieht man von der Voraussetzung, dass die beiden Flächen isometrisch sind, ab, und bezeichnet die beiden Zähler ihrer Krümmungsmasse mit K_1 und K_2, so treten, wenn man zur Abkürzung

$$EG' + GE' - 2FF' = S$$

setzt, an Stelle der beiden Gleichungen des Textes die folgenden

$$\Delta_1 + \Delta_2 = -2(K_1 + K_2),$$
$$-\Delta_1\Delta_2 = \Delta - (K_1 - K_2)^2, \qquad \Delta = S^2 - 4K_1K_2,$$

aus denen sich nur zum Theil einfache Schlüsse hinsichtlich der Realität ziehen lassen.

zwei von einander *verschiedene* Richtungen vorhanden wären. Wenn aber jene Richtungen für jede Stelle eines zweidimensionalen Gebietes coincidirten, so könnte man die aus ihnen gebildeten Curven zu Curven $v =$ Const. wählen. Dann wäre jedenfalls $E = E'$, falls man die Richtung der Normale der zweiten Fläche in geeigneter Weise bestimmt, wie man aus dem Ausdrucke

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

in dem p, q, r die Richtungscosinus der Normale bedeuten, erkennt. Unter dieser Voraussetzung ist nun

$$\begin{aligned} EG &= F^2 + K, \\ EG' &= F'^2 + K \end{aligned}$$

und zugleich wird nach (2)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \quad (F-F')^2, \\ \Delta_2 &= -(F-F')^2 - 4K. \end{aligned}$$

Könnte aber Δ_1 verschwinden — bei Δ_2 ist dies wegen des positiven K ohnehin ausgeschlossen — so wäre $F=F'$, woraus dann auch $G=G'$ folgen würde. Dann aber sind die beiden Flächen nach dem bekannten Bonnet'schen Fundamentalsatze der Flächentheorie*) nur durch ihre Lage verschieden. Dieser Schluss würde nur dann nicht zutreffend sein, wenn E selbst Null sein könnte; dies ist bei einer positiv gekrümmten Fläche aber ebenfalls ausgeschlossen. Daher können Punkte, in denen eine der Discriminanten beständig Null ist, nur vereinzelt liegen oder auf einzelnen Curven angeordnet sein.

Wenn endlich beide Flächen die Krümmung *Null* haben, so würde ein Verschwinden der Discriminanten nur dann stattfinden können, wenn

$$E'G + EG' - 2FF' = 0 \tag{4}$$

ist, während andernfalls eine derselben positiv sein muss. Hier kann man nun der Voraussetzung zufolge den Fall ausschliessen, dass E, F, G überhaupt Null sind. Denn die erstere Fläche ist dann nothwendig eine Ebene, auf welche die zweite mit ihren Erzeugenden abgebildet ist. Wäre dagegen E gleich Null, so ist zufolge der Gleichungen

$$EG - F^2 = E'G' - F'^2 = 0$$

auch F Null, mithin nach (4) $E'G = 0$. Hieraus folgt dann, da G nicht Null sein kann, dass auch E' gleich Null sein muss, was wieder

*) Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, Deuxième partie, Journal de l'École polytechnique, Tome XXV, Cah. 42, pag. 34 (1867).

$F' = 0$ nach sich zieht. In diesem Falle sind also alle *vier* Richtungen reell, sie fallen aber in *eine einzige* zusammen, nämlich in die Richtung $dv = 0$ der Erzeugenden.

Ist dagegen E nicht Null, so kann man jedenfalls in jedem Punkte solche Richtungen angeben, für welche entsprechende Fundamentalgrössen gleich werden. Setzt man dann diese Richtungen für die der Curven $v = \text{Const.}$ voraus, so ist demnach $E = E'$, wo nun E nicht Null sein möge. Dann aber folgt aus (4)

$$E(G + G') - 2FF' = 0$$

und zugleich ist

$$EG = F^2, \quad EG' = F'^2,$$

wodurch die erste Gleichung in

$$(F - F')^2 = 0$$

übergeht. Wiederum würden also die beiden Flächen nicht wesentlich von einander verschieden sein.

Die Gleichung (3) entscheidet übrigens auch, wann im Falle eines *negativen K vier* reelle Richtungen vorhanden sind. Hat nämlich jene Gleichung zwei reelle Wurzeln, so haben die beiden Discriminanten Δ_1 und Δ_2 entgegengesetzte Zeichen. Fallen die beiden Wurzeln zusammen, so ist eine der Grössen Δ_1 und Δ_2 sicher positiv; sind endlich die Wurzeln imaginär, so sind Δ_1 und Δ_2 beide positiv, also alle Richtungen reell. —

Wählt man nun jene Richtungen zu Tangenten eines Curvensystems auf der Fläche und bestimmt die Richtung der Normalen in geeigneter Weise, so ergiebt sich der folgende Satz:

Zwei isometrische Flächen können — abgesehen von dem Falle zweier durch ihre Erzeugenden auf einander bezogenen Developpabelen — *immer auch so reell auf einander bezogen werden, dass die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung in der Beziehung*

$$E' = E, \quad G' = G, \quad F' = -F$$

oder auch

$$E' = -E, \quad G' = -G, \quad F' = F$$

stehen. Bei positiv gekrümmten Flächen kann diese Darstellung über gewisse Punkte, die entweder vereinzelt liegen oder ein eindimensionales Gebiet erfüllen, indess nicht reell fortgesetzt werden. Bei negativ gekrümmten Theilen ist zwar jene Darstellung immer reell möglich, indess kann es auch hier erforderlich sein, einen Wechsel in der analytischen Auffassung eintreten zu lassen.

§ 2.

Das charakteristische Coordinatensystem auf zwei isometrischen Flächen.

Ich bezeichne nun ein Coordinatensystem auf einer Fläche, vermöge dessen sie auf eine zweite isometrische in der im vorigen Paragraphen besprochenen Weise bezogen ist, als ein *charakteristisches Coordinatensystem.*

Hiermit sei zunächst auf die nach bekannten Methoden zu behandelnde Aufgabe hingewiesen, auf zwei isometrischen Flächen diese Coordinatensysteme zu bestimmen. Hier kann auf dieselbe nicht eingegangen werden.

Von grösserem Interesse scheint es, die *allgemeinen Eigenschaften aufzusuchen, welche sämmtliche charakteristische Coordinatensysteme auf einer gegebenen Fläche besitzen.*

Bekanntlich befriedigen die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung E, F, G ausser der Gleichung

$$EG - F^2 = \Omega \tag{1}$$

in welcher Ω durch die ersten und zweiten Differentialquotienten der Coefficienten e, f, g des Längenelementes ausgedrückt ist, noch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} B\,F + B_1 G - C\,E - C_1 F + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} &= 0, \\ B_1 F + B\,E - A_1 G - A\,F + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei hängen die A, A_1, B, B_1, C, C_1 in folgender Weise mit den e, f, g zusammen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} = Ae + A_1 f, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = Bf + B_1 g, \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = Be + B_1 f, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = Cf + C_1 g, \\ &\frac{\partial f}{\partial v} = Ce + (C_1 + B) f + B_1 g, \\ &\frac{\partial f}{\partial u} = A_1 g + (A + B_1) f + Be, \end{aligned} \tag{3}$$

während die Coordinaten x, y, z den drei partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} &= A\frac{\partial}{\partial u} + A_1\frac{\partial}{\partial v} + pE, \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} &= B\frac{\partial}{\partial u} + B_1\frac{\partial}{\partial v} + pF, \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} &= C\frac{\partial}{\partial u} + C_1\frac{\partial}{\partial v} + pG, \end{aligned} \tag{4}$$

in denen p den entsprechenden Cosinus der Normale bedeutet, und die Gleichungen (1), (2) sind die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (4). Bildet man diese Letzteren direct, so erhält man auch

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&BB_1 + \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} - A_1 C = fk,\\
&BB_1 + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial C_1}{\partial u} - CA_1 = fk,\\
&AB_1 + A_1 C_1 + \frac{\partial A_1}{\partial v} - BA_1 - B_1^2 - \frac{\partial B_1}{\partial u} = ek,\\
&C_1 B + CA + \frac{\partial C}{\partial u} - B_1 C - B_1^2 - \frac{\partial B}{\partial v} = gk,
\end{aligned}
$$

in denen k das Krümmungsmass der Fläche bedeutet. Die Gleichungen (5) sind übrigens vermöge der (3) sämmtlich identisch mit der Gleichung (1); es sind zugleich die Relationen, welche die *unbeschränkte Integrabilität der* 6 *Differentialgleichungen erster Ordnung* (3) *für die Grössen* e, f, g aussprechen, wie man leicht bestätigen kann.*)

Ist nun das zu Grunde gelegte Coordinatensystem ein charakteristisches, so müssen die Gleichungen (2) für entgegengesetzt gleiche, von Null verschiedene Werthe von F erfüllt sein. Darnach zerfallen die Gleichungen (2) in die folgenden

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
-\frac{\partial G}{\partial u} + B_1 G - CE &= 0,\\
-\frac{\partial E}{\partial v} + BE - A_1 G &= 0,\\
\frac{\partial \log F}{\partial v} + B - C_1 &= 0,\\
\frac{\partial \log F}{\partial u} + B_1 - A &= 0.
\end{aligned}
$$

Wird

$$H = eg - f^2$$

*) Die Gleichungen (5) geben zu folgender *allgemeinen* Bemerkung Veranlassung. Man kann aus ihnen mit Hülfe der $A, A_1, B, B_1, C, C_1, E, F, G$ sofort auch $H = eg - f^2$ also auch e, f, g selbst berechnen. Sind also die Differentialgleichungen (4) einer Fläche gegeben, so hat man nicht nöthig, die e, f, g aus den Gleichungen (3) durch Integration zu bestimmen. *Andererseits liefern die Gleichungen* (5) *die Möglichkeit, die Bedingungen für die Integrabilität der Gleichungen* (4) *aufstellen zu können.*

Sie ergeben sich, wenn man, unter Hinzuziehung der beiden nothwendigen Gleichungen (2) die für e, f, g aus (5) folgenden Werthe in die Gleichungen (3) einträgt. Diese Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (4), zu denen auch die aus den beiden ersten Gleichungen (5) folgende

$$\frac{\partial B + C_1}{\partial u} = \frac{\partial A + B_1}{\partial v}$$

gehört, scheinen bisher nicht aufgestellt zu sein.

gesetzt, so ergiebt sich vermöge der Relationen

$$B + C_1 = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial v},$$

$$B_1 + A = \frac{\partial \log \sqrt{H}}{\partial u}$$

aus den beiden letzten Gleichungen (6)

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \log \frac{F}{\sqrt{H}}}{\partial v} + 2B &= 0, \\ \frac{\partial \log \frac{F}{\sqrt{H}}}{\partial u} + 2B_1 &= 0. \end{aligned}$$

Es sind also die Grössen

$$(8) \qquad \begin{aligned} 2B &= \frac{g \frac{\partial e}{\partial v} - f \frac{\partial g}{\partial u}}{H}, \\ 2B_1 &= \frac{e \frac{\partial g}{\partial u} - f \frac{\partial e}{\partial v}}{H} \end{aligned}$$

partielle Differentialquotienten einer bis auf eine Constante bestimmten Function. Setzt man

$$(9) \qquad \begin{aligned} B &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi}{\partial v}, \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} \end{aligned}$$

so wird aus (7)

$$(10) \qquad F = \varphi \sqrt{H} \,^{*}),$$

wobei die Integrationsconstante in die Function φ hineingezogen ist. Zugleich treten an Stelle der Gleichungen (5) die folgenden:

$$(5a) \qquad \begin{aligned} BB_1 - A_1 C &= fk + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}, \\ B_1 \frac{\partial \log \frac{F}{B_1}}{\partial u} + A_1 \frac{\partial \log F A_1}{\partial v} &= ek, \\ B \frac{\partial \log \frac{F}{B}}{\partial v} + C \frac{\partial \log F C}{\partial u} &= gk, \end{aligned}$$

von denen insbesondere die erste weitere Verwendung finden wird.

*) Zugleich werden die beiden ersten Gleichungen (6) die Form

$$\frac{\partial G \sqrt{\varphi}}{\partial u} + C \, E \sqrt{\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial E \sqrt{\varphi}}{\partial v} + A_1 G \sqrt{\varphi} = 0$$

annehmen.

Ein charakteristisches Coordinatensystem kann also an keiner Stelle zu Tangenten der Coordinatenlinien conjugirte Richtungen besitzen. Wäre nämlich F an irgend einer Stelle gleich Null, so würden nach (7) auch die beiden partiellen Differentiale daselbst verschwinden, d. h. F wäre überhaupt gleich Null, und die Flächen würden nicht wesentlich von einander verschieden sein.

Ebenso kann die *eine* Schaar der Curven eines solchen Systems *nie aus Krümmungslinien gebildet sein.* Denn wenn z. B. die Curven $v =$ Const. auf beiden Flächen Krümmungslinien wären, so müsste zufolge der Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$du^2(Ef - eF) - (Ge - Eg)\,du\,dv + dv^2(Fg - Gf) = 0$$

sowohl $Ef - eF$ als auch $Ef + eF$ gleich Null sein, was nur möglich ist, wenn F selbst gleich Null ist.

In Bezug auf ein charakteristisches Coordinatensystem müssen nun die drei Coordinaten jeder der beiden Flächen sämmtlich drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass die mittlere Fundamentalgrösse zweiter Ordnung das einemal mit positivem das anderemal mit negativem Zeichen eingesetzt wird.

Insbesondere müssen also die drei Coordinaten jeder der beiden Flächen auch der Differentialgleichung

$$(11)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = p\varphi\sqrt{H}$$

genügen. Anstatt in Bezug auf die zweite Fläche einen Wechsel des Vorzeichens der Wurzelgrösse rechter Hand vorzunehmen, kann man, indem man nöthigenfalls die Richtung der Flächennormale der zweiten Fläche umkehrt, oder dieselbe einer Spiegelung unterwirft, auch beidemale dasselbe Zeichen von $\sqrt{H}$ voraussetzen.

Da nun aber

$$p\sqrt{H} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \text{ etc.} \ldots$$

so ergiebt sich aus (11)

In Bezug auf ein charakteristisches Coordinatensystem genügen die Coordinaten zweier isometrisch auf einander bezogener Flächen denselben drei partiellen Differentialgleichungen, welche aus

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 2\left\{\varphi\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\varphi\frac{\partial z}{\partial v} - \varphi\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\varphi\frac{\partial y}{\partial v}\right\}$$

durch cyklische Vertauschung von x, y, z sich ergeben.

Herr Königs hat neuerdings*) wieder auf den bekannten Satz

*) Comptes Rendus tome 116, p. 596. Dieser Satz ist selbstverständlich nicht dahin zu verstehen, als ob dies nur auf zwei isometrischen Flächen möglich wäre; dagegen dürfte es auf einem Missverständniss beruhen, wenn Herr Stäckel

aufmerksam gemacht, dass zwei isometrische Flächen immer ein gemeinsames conjugirtes Coordinatensystem besitzen, in Bezug auf welches die Coordinaten sämmtlich *derselben* partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = B\frac{\partial}{\partial u} + B_1\frac{\partial}{\partial v}$$

genügen. Dieses System ist aber nicht immer reell.

Dagegen ist das charakteristische Coordinatensystem, in Bezug auf welches die Coordinaten den nur eine einzige Function φ enthaltenden Gleichungen (12) genügen, immer reell herstellbar.

In Bezug auf den Zusammenhang zwischen beiden Anschauungen mag noch bemerkt werden:

Die Richtungen des gemeinsamen conjugirten Coordinatensystems zweier isometrischen Flächen bilden das gemeinsame harmonische Paar zu den beiden reellen oder imaginären Paaren von Richtungslinien der charakteristischen Coordinatensysteme, welche durch den betrachteten Punkt hindurchgehen.

Die conjugirten Coordinatensysteme auf einer Fläche, welche auf den zu ihr isometrischen Flächen in conjugirte Systeme übergehen, scheinen sich nicht einfach definiren zu lassen; sie sind nämlich durch die Bedingung definirt, dass die Gleichungen (6)

$$-\frac{\partial G}{\partial u} + B_1 G - CE = 0,$$
$$-\frac{\partial E}{\partial v} + BE - A_1 G = 0,$$
$$EG = \Omega$$

mehrere gemeinsame Lösungen für die E, G zulassen, was die Existenz complicirter Bedingungen für die e, f, g voraussetzt.

Dagegen kann man die charakteristischen Coordinatensysteme auf einer Fläche in folgender Weise definiren:

Die charakteristischen Coordinatensysteme auf einer Fläche sind diejenigen, in Bezug auf welche die Coordinaten der partiellen Differentialgleichung (11) *oder* (12) *genügen.*

Ist nämlich diese Gleichung erfüllt, so lehrt die Vergleichung mit den allgemeinen Gleichungen (4) der Flächentheorie, dass

$$F = \varphi\sqrt{H},$$
$$B = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial v},$$
$$B_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log\varphi}{\partial u}$$

(Ueber Abbildungen, diese Annalen Bd. 44, S. 563) denselben auch für zwei beliebig auf einander bezogene Flächen als gültig ansieht. Von solchen Flächen kann der Satz nur unter gewissen Bedingungen gelten, die leicht angebbar sind; im allgemeinen werden die Coefficienten B und B_1 für beide Flächen *verschiedene* Werthe haben.

ist. Dann aber reduciren sich die Gleichungen (2), denen die Grössen E und G genügen, auf

$$-\frac{\partial G}{\partial u}+B_1 G-C\,E=0,$$
$$-\frac{\partial E}{\partial v}+B\,E-A_1 G=0,$$

die unter den angegebenen Voraussetzungen mit der Gleichung (1) verträglich sein werden. Wird diesen Gleichungen genügt, durch Werthe von E und G, von denen wenigstens *einer nicht Null ist*, so hat man ein charakteristisches Coordinatensystem. Sind aber die Werthe von E und G beide Null, so ist die Fläche auf das System ihrer *Haupttangentencurven* bezogen. Dieses Coordinatensystem ist also ein *singuläres charakteristisches*,*) in Bezug auf welches der gegebenen Fläche keine zu ihr isometrische und wesentlich von ihr verschiedene entspricht, während zu jedem anderen eine von der gegebenen wesentlich verschiedene Fläche gehört, falls nur F nicht selbst gleich Null war. Hierbei mag daran erinnert werden, dass in Bezug auf die Haupttangentencurven, wie aus den Gleichungen (2) unmittelbar hervorgeht, die Coordinaten der Fläche *immer* der Differentialgleichung (11) genügen.

Die Aufgabe, alle zu einer Fläche isometrischen Flächen hinsichtlich ihrer Fundamentalgrössen zu bestimmen, kann man daher als ein Transformationsproblem jener Differentialgleichung in sich selbst bezeichnen, und folgendermassen formuliren:

Eine Fläche ist auf ihre Haupttangentencurven bezogen, in Bezug auf welche ihre Coordinaten der Gleichung

$$(11)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}=p\varphi\sqrt{H}$$

genügen; man soll durch Uebergang zu neuen Variabeln u', v', deren Functionaldeterminante

$$k=\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}-\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

nicht verschwindet, bewirken, dass jene Differentialgleichung invariant bleibt, also die Gestalt

$$(12)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u'\,\partial v'}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\varphi_1}{\partial v'}\frac{\partial}{\partial u'}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\varphi_1}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial v'}=p\,\varphi_1\sqrt{H_1}$$

annimmt, wo $\sqrt{H_1}$ der Coefficient des entsprechenden Flächenelements ist, der mit $\sqrt{H}$ durch die Gleichung

*) Eine *zweite Art singulärer charakteristischer Coordinatensysteme* ist in § 4 angegeben. Sie werden von den conjugirten Coordinatensystemen mit gleichen Invarianten gebildet, und gehen aus den eigentlichen dadurch hervor, dass die in F enthaltene Constante gleich Null gewählt wird.

$$k\sqrt{H_1} = \sqrt{H}$$

zusammenhängt.

Es hat keine Schwierigkeit, die Differentialgleichungen für die u', v' aufzustellen. Setzt man nämlich

$$(14)\qquad \begin{aligned} m &= \frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'} = \frac{M}{k^2},\\ M &= \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{\partial}{\partial u'} = \frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u'\partial v'} = \frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + m\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Trägt man hier für die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten ihre aus (4) unter der Voraussetzung $E = G = 0$ folgenden Werthe ein, so ergiebt sich:

$$(15)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u'\partial v'} = P\frac{\partial}{\partial u'} + Q\frac{\partial}{\partial v'} + p\frac{M}{k^2}\varphi\sqrt{H},$$

wobei zufolge der Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial v'} &= \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{1}{k}, & \frac{\partial v}{\partial u'} &= -\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{1}{k},\\ \frac{\partial u}{\partial u'} &= \frac{\partial v'}{\partial v}\frac{1}{k}, & \frac{\partial u}{\partial v'} &= -\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

die Grössen P, Q durch die Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} k^2 P &= -A\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} + B\,M - C\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}k^2,\\ k^2 Q &= -A_1\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} + B_1 M - C_1\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}k^2 \end{aligned}$$

bestimmt sind. Setzt man in (15) noch

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v'},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v'},$$

so sind die zu erfüllenden Gleichungen

$$(18)\qquad \begin{aligned} P\frac{\partial u'}{\partial u} + Q\frac{\partial u'}{\partial v} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\log\varphi'}{\partial v'} = \frac{1}{2}k\left[\frac{\partial\log\varphi'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} - \frac{\partial\log\varphi'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}\right],\\ P\frac{\partial v'}{\partial u} + Q\frac{\partial v'}{\partial v} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\log\varphi'}{\partial u'} = -\frac{1}{2}k\left[\frac{\partial\log\varphi'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial\log\varphi'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right] \end{aligned}$$

während φ' durch die Gleichung

$$\varphi_1 \sqrt{H_1} = \frac{M}{k^2} \varphi \sqrt{H}$$

oder

$$\varphi_1 = \frac{M}{k} \tag{18}$$

zu bestimmen ist. Setzt man noch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u' \partial v'} = \frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right) = \frac{\partial \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{1}{k}}{\partial v'},$$

so ergiebt sich nach (16)

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial u' \partial v'} = -\frac{\partial^2 v'}{\partial u \partial v} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial^2 v'}{\partial v^2} \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial v}\left(\frac{\partial \log k}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} - \frac{\partial \log k}{\partial v} \frac{\partial k'}{\partial u}\right). \tag{20}$$

Ferner folgt aus (18)

$$k^2 P = \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial v} M,$$

$$k^2 Q = \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial u} M.$$

Trägt man in der ersten dieser Gleichungen aus (19) den Werth von φ_1 ein, setzt man linker Hand in dem Ausdrucke für $k^2 P$ (17) den aus (20) folgenden Werth des zweiten Differentialquotienten von u nach u', v' ein, und benutzt man endlich die Gleichungen

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi}{\partial v}, \qquad B_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi}{\partial u},$$

$$A = \frac{\partial \log \sqrt{H\varphi}}{\partial u}, \qquad C_1 = \frac{\partial \log \sqrt{H\varphi}}{\partial v},$$

so ergiebt sich

$$-\frac{\partial \log\left(\varphi \sqrt{H\varphi} \frac{M}{k^2}\right)}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} - C \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{\partial^2 v'}{\partial u \partial v} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial^2 v'}{\partial v^2} \frac{\partial u'}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial \log k}{\partial v}\left\{\frac{M}{2} + \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v}\right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial v}.$$

Giebt man der rechten Seite die Form

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (k + M)}{\partial v} + M \frac{\partial \log \frac{k}{M}}{\partial v},$$

so lässt sich die vorstehende Gleichung in die Form

$$-\frac{\partial \log\left(\varphi \sqrt{H\varphi} \frac{M}{k^2}\right)}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} - C \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial u'}{\partial v}\right) = M \frac{\partial \log \frac{k}{M}}{\partial v}$$

bringen. Setzt man jetzt

$$z = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial u'}{\partial v}}, \qquad z' = \frac{\frac{\partial v'}{\partial v}}{\frac{\partial v'}{\partial u}},$$

so ergiebt sich nach einfacher Reduction, indem man durch $\frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial v}$ dividirt:

$$(21) \qquad -\frac{\partial \log\left(\frac{\varphi\sqrt{H\varphi}\,z'}{(1+zz')\Theta^2}\right)}{\partial u} - C\frac{z}{z'} = \frac{1+zz'}{z'}\,\frac{\partial \log \Theta}{\partial v}$$

und durch Vertauschung von u mit v, z mit z'

$$(21') \qquad -\frac{\partial \log\left(\frac{\varphi\sqrt{H\varphi}\,z}{(1+zz')\Theta^2}\right)}{\partial v} - A_1\frac{z'}{z} = \frac{1+zz'}{z}\,\frac{\partial \log \Theta}{du},$$

wo zur Abkürzung

$$\Theta = \frac{zz'-1}{zz'+1}$$

gesetzt ist. Setzt man noch

$$\lambda = \frac{2z'}{1+zz'}, \quad \mu = \frac{2z}{1+zz'}, \quad \lambda\mu - 1 = -\Theta^2,$$

so erhält man zur Bestimmung von λ und μ die Gleichungen

$$\frac{\partial \log \frac{\varphi\sqrt{H\varphi}\,\lambda}{\lambda\mu-1}}{\partial u} + C\,\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \log(\lambda\mu-1)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \log \frac{\varphi\sqrt{H\varphi}\,\mu}{\lambda\mu-1}}{\partial v} + A_1\,\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \log(\lambda\mu-1)}{\partial u}.$$

Integrirt man dann noch die Gleichungen

$$\frac{\partial u'}{\partial u} - z\,\frac{\partial u'}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} - z'\,\frac{\partial v'}{\partial u} = 0$$

d. h. bestimmt man die Multiplicatoren m, m_1, welche die Gleichungen

$$z\,du + \quad dv = m\,du',$$
$$du + z'\,dv = m_1\,dv'$$

zu Identitäten machen, so hat man die Functionen u', v' gefunden.

Um die zuletzt gefundenen Gleichungen auf eine einfachere Form zu bringen, setze man

$$S = \varphi\sqrt{H\varphi}, \quad \xi = \frac{S\lambda}{\lambda\mu-1}, \quad \eta = \frac{S\mu}{\lambda\mu-1},$$

$$1 + \frac{2}{\lambda\mu-1} = \sqrt{1+\frac{4\xi\eta}{S^2}} = W,$$

so entsteht, wenn man dieselben mit λ resp. μ multiplicirt, und durch $\lambda\mu - 1$ dividirt,

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + C\eta = \frac{1}{2} S \frac{\partial W}{\partial v},$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial v} + A_1 \xi = \frac{1}{2} S \frac{\partial W}{\partial u}.$$

Diese Gleichungen aber sind dieselben, auf welche man durch die Aufgabe geführt wird, die Fundamentalgrössen E, F, G aller zu der gegebenen Fläche isometrischen zu bestimmen. Führt man nämlich in die Gleichungen (2) die Werthe von B, B_1, A, C_1 ein und setzt

$$EG - F^2 = - H\varphi^2,$$

so nehmen dieselben die Gestalt an

$$\frac{\partial G\sqrt{\varphi}}{\partial u} + C\, E\sqrt{\varphi} = S\,\frac{\partial \dfrac{F}{\varphi\sqrt{H}}}{\partial v},$$
$$\frac{\partial E\sqrt{\varphi}}{\partial v} + A_1 G\sqrt{\varphi} = S\,\frac{\partial \dfrac{F}{\varphi\sqrt{H}}}{\partial u}$$

und gehen vermöge der Substitutionen

$$G\sqrt{\varphi} = 2\xi, \qquad E\sqrt{\varphi} = 2\eta,$$
$$\frac{F}{\varphi\sqrt{H}} = \sqrt{1 + \frac{4\xi\eta}{S^2}} = W$$

in die vorhin angegebenen über, wie übrigens vorauszusehen war.

In speciellen Fällen kann natürlich die Lösung der Gleichungen (21) sich unmittelbar darbieten. Soll denselben z. B. durch constante Werthe $z = \alpha$, $z' = \beta$ genügt werden, so folgt sofort aus jenen Gleichungen die Bedingung

$$\frac{\partial \log S}{\partial u} + C\frac{\alpha}{\beta} = 0, \qquad \frac{\partial \log S}{\partial v} + A_1\frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Dieselbe ist z. B. erfüllt bei den Minimalflächen, deren Bogenelement in Bezug auf die Haupttangentencurven von der Form $e(du^2 + dv^2)$ ist; man erhält hier unmittelbar, indem man $\alpha = -\beta$ setzt, das einfach unendliche System charakteristischer Curven

$$u' = \alpha u + v,$$
$$v' = u - \alpha v.$$

Eine besonders einfache Form erhalten die Gleichungen bei den Flächen zweiten Grades, bei denen die Haupttangentencurven zugleich geodätisch, also A_1 und C gleich Null sind. Ich gehe nicht darauf ein, da auch hier nur diejenigen einfach unendlich vielen isometrischen Flächen entstehen, die auch sonst als Biegungen der Flächen zweiten Grades bekannt sind.

§ 3.

Charakteristische Coordinatensysteme auf verschiedenen Flächengattungen.

Während im vorigen Paragraphen die charakteristischen Coordinatensysteme auf einer gegebenen Fläche allgemein durch die invariante Natur einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung definirt wurden, soll jetzt umgekehrt vorausgesetzt werden, dass auf zwei wesentlich verschiedenen isometrisch auf einander bezogenen Flächen ein gemeinsames Coordinatensystem dieser Art durch die Curven u, v gebildet wird. Alsdann entsteht die Frage, *welche besonderen Eigenschaften den Flächen zukommen, wenn das Coordinatensystem durch gewisse Eigenschaften ausgezeichnet wird, oder auch welche Eigenschaften das Coordinatensystem aufweist, wenn über die beiden Flächen gewisse Voraussetzungen gemacht werden.*

Bei derartigen Fragen kann man sich zunächst das zu Grunde gelegte charakteristische System reell denken. Sollen indessen dieselben allgemein sein, so wird man auch complex conjugirte Systeme zulassen müssen. Denn es kann sehr wohl stattfinden, dass gewisse Eigenschaften nur dem *einen* der beiden möglichen Systeme, welches ja auch imaginär sein kann, zukommen, während sie bei dem anderen keineswegs erfüllt sind.*)

Nr. 1. *Die eine Schaar von Curven eines charakteristischen Systems werde von Haupttangentencurven der Fläche gebildet.* Besteht diese Schaar aus den Curven $v = \text{Const.}$, so ist $E = 0$. Dann folgt aber nach § 2, (2) auch $A_1 = 0$, d. h. diese Haupttangentencurven sind auch geodätisch, mithin geradlinig.

Es kann daher nur auf den *Regelflächen* die eine Schaar der Curven des Systems von Haupttangentencurven gebildet werden. Zugleich erhält man aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen unter der Annahme

$$v' = v$$

oder

$$\frac{\partial v'}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = 1$$

zur Bestimmung von u' die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\log \varphi \sqrt{H\varphi}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial u'}{\partial v} = \varphi V \sqrt{H\varphi}$$

wo V nur von v abhängt. Wählt man diese Function gleich Eins, so folgt

*) Vgl. die unter Nr. 2 gegebenen Beispiele.

$$u' = U + \int dv\, \varphi \sqrt{H\varphi}$$

wo U eine willkürliche Function von u ist. Diese Gleichung liefert alle diejenigen charakteristischen Systeme der Regelflächen, bei denen die eine Schaar der Coordinatenlinien aus den Erzeugenden $v = \text{Const.}$ gebildet wird; sie entspricht dem Falle, wo die Regelfläche so gebogen wird, dass die Erzeugenden wieder in Erzeugende übergehen.

Nr. 2. Herr Bonnet*) hat zuerst diejenigen *Flächen* untersucht, *welche isometrisch sind und in correspondirenden Punkten gleiche Hauptkrümmungshalbmesser besitzen.* Bei der Beziehung auf ein charakteristisches Coordinatensystem, für das gleiche E und G, aber entgegengesetzte F vorausgesetzt werden, muss nun

$$\frac{Eg + Ge - 2fF}{H} = \frac{Eg + Ge + 2fF}{H},$$

also f gleich Null sein, und umgekehrt sind zwei isometrische Flächen von der Bonnet'schen Eigenschaft dadurch charakterisirt, dass jenes charakteristische Coordinatensystem *orthogonal* ist.

Da aber die Ausdrücke B und B_1 partielle Differentialquotienten einer Function sind, so folgt

$$\frac{\partial^2 \log \frac{e}{g}}{\partial u\, \partial v} = 0$$

und hieraus:

Jenes charakteristische Coordinatensystem zweier isometrischen Flächen von der Bonnet'schen Gattung ist isotherm und orthogonal, und umgekehrt.

Setzt man jetzt $e = g$, indem man die Variabeln u und v in geeigneter Weise ändert, so folgt

$$2B = \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial v}, \quad 2B_1 = \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial u}$$

also

$$\varphi = \frac{c}{e} \quad \text{und} \quad \sqrt{H} = e$$

wo c eine willkürliche Constante. *Hiernach wird die Fundamentalgrösse F gleich der Constanten c.*

Die Differentialgleichungen für die beiden anderen Fundamentalgrössen E und G werden nun

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial E}{\partial v} - \left(\frac{E+G}{e}\right)\frac{\partial e}{\partial v} &= 0, \\ 2\frac{\partial G}{\partial u} - \left(\frac{E+G}{e}\right)\frac{\partial e}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

*) Vgl. Bonnet a. a. O. S. 73 u. ff.

Unter der Voraussetzung, dass $E+G$ eine Function von e allein ist, lassen sich diese Gleichungen leicht lösen. Setzt man nämlich

$$E+G=e\psi'(e)$$

wo $\psi'(e)$ die Derivirte einer Function $\psi(e)$ nach e ist, so wird nach (1) durch Integration

$$2E=\psi(e)+2U,$$
$$2G=\psi(e)+2V,$$

wo $U(V)$ nur von $u(v)$ allein abhängen, und

$$e\psi'(e)=\psi(e)+U+V$$

sein muss, also e eine Function von $U+V$ sein wird, deren besondere Natur durch die noch zu betrachtende Gleichung (1) § 2 zu bestimmen ist.

Hierbei ist nur der Fall ausgeschlossen, wo

$$e\psi'(e)-\psi(e)$$

gleich einer Constanten $-2c_1$ oder

$$\psi(e)=2ae+2c_1$$

ist, unter a eine neue Constante verstanden. Alsdann ergiebt sich aus der soeben erhaltenen Gleichung

$$U=-c_1+c_2,$$
$$V=-c_1-c_2$$

wo c_2 wieder eine Constante, mithin

$$(2)\qquad \begin{aligned} E&=ae+c_2,\\ G&=ae-c_2,\\ F&=c. \end{aligned}$$

Und die Differentialgleichung §2, (1), welcher e genügen muss, wird jetzt

$$(3)\qquad a^2e^2-(c_2^2+c^2)=-\frac{e}{2}\left(\frac{\partial^2\log e}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log e}{\partial v^2}\right).$$

Die so erhaltenen Flächen selbst sind wegen

$$E+G=2ae$$

die *Flächen mit der mittleren constanten Krümmung a.* Da die Gleichung (3) nur von der Summe $c_2^2+c^2$ abhängig ist, so erhält man, wie dies Bonnet übrigens schon bemerkt hat, der auf diese Flächen durch ganz andere Untersuchungen geführt wurde, den Satz, *dass zu einem und demselben Längenelemente*

$$e(du^2+dv^2)$$

∞^1 *Flächenpaare der genannten Art gehören.* Und da umgekehrt jede Fläche constanter mittlerer Krümmung nach Bonnet auf ∞^1 Arten zu Flächen derselben mittleren Krümmung isometrisch ist, so sind die hier betrachteten Eigenschaften solche, welche *allen* Flächen mittlerer constanter Krümmung zukommen.

Die Differentialgleichung (3) hat aber noch eine andere Eigenschaft, die hier erwähnt zu werden verdient. *Sie geht durch Vertauschung von e mit* $\frac{1}{e}$ *in sich über, wenn man gleichzeitig die Constanten a und* $\sqrt{c^2+c_2^2}$ *unter sich vertauscht.* Aus jeder Lösung derselben folgt mithin eine zweite, welche sich auf ein anderes Paar von Flächen constanter mittlerer Krümmung bezieht, welches zu dem ersten nicht isometrisch ist.

Diese zweite Fläche entspringt durch Abbildung der ersten vermittelst paralleler Normalen. Aus den Gleichungen (3) des § 2, welche jetzt die Form annehmen

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} + p(ae+c_2),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + pc,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} = -\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} + p(ae-c_2)$$

ergiebt sich nämlich durch geeignete Combination die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{c_2}{ec}\frac{\partial}{\partial v}\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{c_2}{ec}\frac{\partial}{\partial u}\right]$$

welche für alle drei Coordinaten x, y, z erfüllt ist. Man kann daher die Coordinaten ξ, η, ζ einer zweiten, durch parallele Normalen auf die erste bezogenen, Fläche durch die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\sqrt{c^2+c_2^2}}{c}\frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{1}{e}\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{c_2}{c}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ \frac{\sqrt{c^2+c_2^2}}{c}\frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{1}{e}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{c_2}{c}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

definiren. Das Längenelement dieser neuen Fläche ist

$$d\sigma^2 = \frac{1}{e}(du^2+dv^2)$$

und die entsprechenden Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind

$$E' = \frac{1}{e}\sqrt{c^2+c_2^2} + \frac{ac_2}{\sqrt{c^2+c_2^2}},$$
$$F' = \frac{ac}{\sqrt{c^2+c_2^2}},$$
$$G' = \frac{1}{e}\sqrt{c^2+c_2^2} - \frac{ac_2}{\sqrt{c^2+c_2^2}}.$$

Das Coordinatensystem, auf welches dieselbe bezogen ist, ist wieder ein charakteristisches, da es isotherm und orthogonal und der Werth von F' einer Constanten gleich ist. Und dass diese Fläche wirklich

gerade zu denjenigen gehört, welche der obigen Vertauschung entspricht, zeigt sich, wenn man

$$\frac{ac}{\sqrt{c^2+c_2^2}} = (c), \quad \frac{ac_2}{\sqrt{c^2+c_2^2}} = (c_2)$$

setzt, womit

$$(c)^2 + (c_2)^2 = a^2$$

und

$$E' = \frac{\sqrt{c^2+c_2^2}}{e} + (c_2),$$

$$F' = (c),$$

$$G' = \frac{\sqrt{c^2+c_2^2}}{e} - (c_2)$$

wird.

Es mögen nun noch zwei specielle Annahmen folgen.

Nimmt man die Constante a gleich *Null* an, so wird nach (2)

$$E = -G = c_2, \quad F = c.$$

Umgekehrt erhält man aber auch *alle Minimalflächen* durch die Annahme $E + G = 0$. Denn wegen der Gleichheit der Hauptkrümmungshalbmesser zweier isometrischen Minimalflächen muss zunächst f gleich Null, also auch $e = g$ sein, u. s. w.

Man hat also den Satz:

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zweier isometrisch aufeinander bezogenen Minimalflächen in Bezug auf jenes gemeinsame charakteristische Coordinatensystem sind constant.

Nur sind die durch parallele Normalen zugeordneten Flächen nicht mehr durch ein eigentliches charakteristisches System auf einander bezogen, da jetzt nach (4) $F' = 0$ wird. Man erkennt sofort, dass diese Flächen hier das constante Krümmungsmass $c^2 + c_2^2$ besitzen, und erhält so die bekannte Abbildung auf die Kugelfläche.

Die Eigenschaft, constante Fundamentalgrössen in Bezug auf ein charakteristisches System zu besitzen, ist für die Minimalflächen charakteristisch. Man kann mit Hülfe der Formeln § 2, leicht den allgemeinen Satz beweisen:

Sind die Fundamentalgrössen E, F, G in Bezug auf ein charakteristisches System von der Form

$$U, \quad U_1 V_1, \quad V,$$

so ist die Fläche entweder eine Minimalfläche oder eine Developpabele.

Sind nämlich E (G) Functionen von u (v) allein, so kann man, vorausgesetzt, dass keine derselben Null ist, durch geeignete Wahl der Variabeln erreichen, dass

$$E = +1, \quad G = -1,$$

oder

$$E = +1, \quad G = +1$$

wird. Im ersten Falle ist dann auch nothwendig

$$C = -B_1, \quad A_1 = -B;$$

demnach folgt nach § 2

$$fk + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} = 0$$

also zufolge der Voraussetzung über F

$$fk = 0.$$

Ist aber das Krümmungsmass nicht gleich Null, so muss f gleich Null sein. Dann aber kann man bewirken, dass bei geeigneter Aenderung der Variabeln $e = g$ wird. Dabei gehen nun E und G wieder in Functionen von u und v über, und hieraus folgt dann in Rücksicht auf die Gleichungen dieses Paragraphen, dass $E + G$ gleich Null ist.

Aber auch im zweiten Falle ist fk gleich Null, womit sich im wesentlichen dieselben Schlüsse ergeben.

Auf zwei isometrischen Minimalflächen sind übrigens immer die beiden charakteristischen Coordinatensysteme reell. Wählt man nämlich auf der einen Fläche das System der Haupttangenten zu Curven u, v so ist

$$E = G = 0, \quad f = 0,$$

während für die zweite

$$E'g + G'e = 0$$

und

$$E'G' - F'^2 = -F^2$$

ist. Demzufolge wird die Discriminante der Gleichung (3) des § 1

$$\Delta = 4(F^2F'^2 - F^4) = 4F^2(F'^2 - F^2) = 4F^2E'G'$$

also *negativ*. Das eine System wird von den winkelhalbirenden Linien des anderen gebildet.*)

Macht man zweitens die Annahme $c_2 = 0$, so erhält man isometrische Flächen constanter mittlerer Krümmung, welche die Eigenschaft haben, sich gleichzeitig mit ihren Krümmungslinien zu entsprechen.**)

---

*) Im allgemeinen wird der Cosinus des Winkels der Tangentenrichtungen des anderen Systems charakteristischer Coordinatenlinien bei den Flächen der Bonnet'schen Gattung gleich

$$\frac{E+G}{E-G}.$$

Er wird also nur dann gleich Null, wenn die Fläche eine Minimalfläche ist. Nur auf diesen sind also die beiden charakteristischen Systeme gleichwerthig.

**) Bei diesen Flächen wird das zweite System charakteristischer Coordinatenlinien von den *Minimalcurven* gebildet. Soll umgekehrt ein solches aus den Minimallinien einer Fläche gebildet werden, so ist in den Formeln (3) des § 2

$$e = g = 0$$

Selbstverständlich werden dabei die Hauptkrümmungshalbmesser unter sich vertauscht, die vermöge der Abbildung durch parallele Normalen entspringende Fläche ist hier von derselben Art, denn es wird

$$E' = \frac{c}{e}, \quad F' = a, \quad G' = \frac{c}{e}.$$

Nr. 3. Man kann die vorstehenden Betrachtungen zum Beweise bekannter Sätze über isometrische Minimalflächen benutzen. Sind überhaupt zwei Flächen durch parallele Normalen aufeinander isometrisch bezogen, so haben sie dasselbe sphärische Bild. Bezeichnet man die Fundamentalgrössen wie früher, das Krümmungsmass mit k, und setzt man

$$Eg + Ge - 2fF = LH, \quad E'g + G'e - 2fF' = L'H,$$

so müssen die beiden Längenelemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ auf der Gauss'schen Kugel identisch sein.

Daher ist

$$L[Edu^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2] - k\,ds^2$$
$$= L'[E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2] - k\,ds^2$$

oder

$$LE = L_1 E_1,$$
$$LF = L_1 F_1,$$
$$LG = L_1 G_1.$$

Hieraus folgt $L^2 = L_1^2$. Aber aus $L = \pm L'$ würde folgen, dass die Flächen nicht wesentlich verschieden sind. *Zwei isometrische Flächen mit demselben sphärischen Bilde sind also nothwendig Minimalflächen.* Bezieht man diese beiden Flächen nun auf eines der gemeinsamen *reellen* charakteristischen Systeme, so folgt der isotherme und orthogonale Charakter desselben, die Constanz der Fundamentalgrössen

$$E = -G = c_2, \quad F = c$$

und für e die Differentialgleichung

$$2e[c^2 + c_2^2] = \frac{\partial^2 \log e}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log e}{\partial v^2}$$

welcher eine ∞^1 Schaar von (paarweise einander zugeordneten) isometrischen Minimalflächen entspricht, wenn man

---

zu setzen. Dann ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial v} = C_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = Af,$$
$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 0,$$
$$F = f \text{ const.}$$

also eine Fläche mittlerer constanter Krümmung von der im Text betrachteten speciellen Art.

$$c = a \cos \alpha,$$
$$c_2 = a \sin \alpha$$

oder

$$E = -G = a \sin \alpha, \quad F = a \cos \alpha$$

setzt. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt also

$$F = a, \quad E = -G = 0,$$
$$F = 0, \quad E = -G = a$$

und, wenn man die Coordinaten der entsprechenden Flächen durch x, y, z; ξ, η, ζ bezeichnet

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A \frac{\partial x}{\partial u} + A_1 \frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial x}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x}{\partial v} + ap,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = C \frac{\partial x}{\partial u} + C_1 \frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = A \frac{\partial \xi}{\partial u} + A_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} + ap,$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \xi}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \xi}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = C \frac{\partial \xi}{\partial u} + C_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - ap.$$

Multiplicirt man die ersten drei Gleichungen mit $\cos \alpha$, die letzten drei mit $\sin \alpha$, und addirt, setzt man ferner

$$x \cos \alpha + \xi \sin \alpha = X,$$
$$y \cos \alpha + \eta \sin \alpha = Y,$$
$$z \cos \alpha + \zeta \sin \alpha = Z,$$

so wird

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = A \frac{\partial X}{\partial u} + A_1 \frac{\partial X}{\partial v} + ap \sin \alpha,$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial X}{\partial u} + B_1 \frac{\partial X}{\partial v} + ap \cos \alpha,$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = C \frac{\partial X}{\partial u} + C_1 \frac{\partial X}{\partial v} - ap \sin \alpha$$

aus welchen Gleichungen hervorgeht, *dass X, Y, Z die Coordinaten irgend einer der isometrischen Minimalflächen sind, welche aus den beiden adjungirten Minimalflächen x und ξ hervorgehen.**)

*) Man vergl. z. B. die Herleitung dieser Sätze bei Darboux, Théorie générale des surfaces I, S. 324—328, oder auch bei Herrn H. Stahl, Grundformeln der Flächentheorie S. 73.

Nr. 4. *Flächen constanter positiver Krümmung.* Sollen auf zwei isometrischen Flächen die *Krümmungslinien entsprechende Curven* sein, so muss bei der Beziehung auf ein gemeinsames charakteristisches Coordinatensystem

$$Eg - Ge$$

gleich Null sein. Denn die Gleichungen der Krümmungslinien auf den beiden Flächen

$$du^2[Ef - eF] - (Ge - Eg)\,du\,dv + dv^2\,(Fg - Gf) = 0,$$
$$du^2[Ef + eF] - (Ge - Eg)\,du\,dv - dv^2\,(Fg + Gf) = 0$$

können nur dann übereinstimmen, wenn die folgenden

$$du^2\,Ef - du\,dv(Ge - Eg) - dv^2 Gf = 0,$$
$$e\,du^2 - g\,dv^2 = 0$$

für dieselben Verhältnisse der du, dv bestehen, da F nicht verschwinden darf, woraus die angegebene Bedingung folgt.

Setzt man insbesondere eine Kugel mit dem Radius Eins voraus, auf welche eine Fläche constanter positiver Krümmung isometrisch bezogen ist, so müssen, falls ein charakteristisches Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird, die Gleichungen

$$E = e, \quad F = f, \quad G = g$$

bestehen. Es gelten demnach zufolge § 2, 2 die Gleichungen

$$-\frac{f}{eg}\frac{\partial e}{\partial v} + \frac{\partial \log g}{\partial u} + \frac{\partial \log \frac{f}{\sqrt{eg}}}{\partial u} = 0,$$

$$-\frac{f}{eg}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial \log e}{\partial v} + \frac{\partial \log \frac{f}{\sqrt{eg}}}{\partial v} = 0$$

für die Coefficienten des Längenelementes auf der Kugel. Da der Coordinatenwinkel, wie man leicht erkennt, nicht constant sein kann, so möge, um wenigstens einen vielleicht Interesse besitzenden Fall anzudeuten, e gleich g vorausgesetzt werden. Man findet dann

$$\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial u} = \frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial v}$$

oder

$$\frac{1}{e} = F - \Phi, \quad \frac{1}{f} = F + \Phi$$

wo F nur von $u + v$, Φ nur von $u - v$ abhängig ist. Demnach wird das Längenelement

$$ds^2 = \frac{(du^2+dv^2)(F+\Phi)+2\,du\,dv\,(F-\Phi)}{F^2-\Phi^2}$$
$$= \frac{(du+dv)^2 F + (du-dv)^2 \Phi}{F^2-\Phi^2}.$$

Die Winkelhalbirenden des charakteristischen Systems auf der Kugel sind also orthogonale und isotherme Curven eines Systems, in Bezug auf welches das Längenelement die Form

$$ds^2 = \frac{du'^2+dv'^2}{U'^2-V'^2}$$

annimmt. Nach Herrn Dini*) kommt die Aufgabe, der Kugel dieses Bogenelement zu verleihen, überein mit der Aufsuchung derjenigen Minimalflächen, auf denen die Haupttangentencurven aus geodätischen Ellipsen und Hyperbeln bestehen.

Nr. 5. *Flächen, auf denen beide Schaaren der Curven eines charakteristischen Systems aus geodätischen Linien bestehen.* Nimmt man der Voraussetzung gemäss

$$C = A_1 = 0$$

an, so wird

$$B_1 = \frac{\partial \log \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u}, \qquad B = \frac{\partial \log \sqrt{\frac{H}{g}}}{\partial v}$$

also:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{g}{e}}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Die Curven bilden also jetzt ein geodätisches isometrisches (aber nicht orthogonales) System. Setzt man demgemäss $e = g$, so folgt aus den Bedingungen $A_1 = C = 0$

$$\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{\sqrt{e}}\right),$$
$$\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{\sqrt{e}}\right)$$

oder

$$\frac{\partial^2\sqrt{e}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\sqrt{e}}{\partial v^2}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$e = (\Phi+\Psi)^2 = g,$$
$$f = \Phi^2 - \Psi^2$$

wo Φ nur von $u+v$, Ψ nur von $u-v$ abhängt. Und zugleich wird die früher mit φ bezeichnete Function gleich $\frac{e}{H}$, also

*) Dini, Sulla teoria delle superficie, Ann. di math. ser. II, IV, p. 186. 1871.

$$F = \frac{ce}{\sqrt{H}},$$
$$E = 2U\sqrt{\Phi\Psi},$$
$$G = 2V\sqrt{\Phi\Psi}.$$

Demnach wird

$$H = 4\Phi\Psi(\Phi + \Psi)^2,$$
$$\frac{EG - F^2}{H} = \frac{UV\Phi\Psi - \frac{c^2(\Phi+\Psi)^2}{16\Phi\Psi}}{\Psi\Phi(\Psi+\Phi)^2}$$

und für das Bogenelement ds findet man die Liouville'sche Form

$$ds^2 = (\Phi + \Psi)\,[\Phi(du + dv)^2 + \Psi(du - dv)^2].$$

Die winkelhalbirenden Curven des charakteristischen Systems bilden also ein Orthogonalsystem, in Bezug auf welches der Fläche die Liouville'sche Form des Bogenelementes zukommt.

Die Functionen u, v, Φ, Ψ können nicht beliebig angenommen werden, da noch die Gleichung (1) des § 2 zu erfüllen bleibt. Man kann dieselbe leicht bilden, wenn man von der Liouville'schen Form ausgeht, aber an Stelle der Coordinaten u, v die neuen

$$u' = u + v, \quad v' = u - v$$

einführt und nun die Incremente $\frac{EG - F^2}{H}$ durch die Coefficienten des isothermen und orthogonalen Längenelements ausdrückt. Hieraus erkennt man auch sofort, dass Flächen der genannten Art existiren, da die entsprechende Differentialgleichung jedenfalls einfache Lösungen besitzt, wenn man U und V als willkürliche Constanten, und etwa auch Ψ constant annimmt. Allerdings erhält man so nur Flächen, welche zu Rotationsflächen isometrisch sind; ob auch allgemeinere Lösungen vorhanden sind, soll hier nicht untersucht werden.*)

Nr. 6. *Flächen, bei denen die Fundamentalgrössen E und G in Bezug auf ein charakteristisches Coordinatensystem unter einander gleich sind.*

Unter der Voraussetzung $E = G$ hat man nach § 2, 2)

$$\frac{\partial \log E}{\partial u} = B_1 - C; \quad \frac{\partial \log E}{\partial v} = B - A_1.$$

Es sind also auch C und A_1 partielle Differentialquotienten einer Function. Setzt man daher

*) Hat man irgend ein System von Functionen U, V, Φ, Ψ gefunden, welches der Bedingung § 2, (1) genügt, so kann man U und V auch durch $U\alpha$, $\frac{V}{\alpha}$ ersetzen, wo α eine beliebige Constante. Es gehört also zu demselben Längenelemente eine einfach unendliche Schaar von Flächenpaaren.

$$B_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}, \quad B = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial v},$$
$$C = \frac{\partial \log \psi}{\partial u}, \quad A_1 = \frac{\partial \log \psi}{\partial v},$$
$$C_1 = \frac{\partial \log \sqrt{H\varphi}}{\partial v}, \quad A = \frac{\partial \log \sqrt{H\varphi}}{\partial u},$$

so wird

$$E = G = \frac{c_1}{\psi\sqrt{\varphi}} \quad F = \varphi\sqrt{H},$$

wo c_1 eine Constante. Jede Fläche dieser Art lässt sich durch parallele Normalen wieder auf eine Fläche derselben Art abbilden. Aus den Gleichungen des § 2

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial \log \sqrt{H\varphi}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \log \psi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + pE,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial \log \psi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{H\varphi}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + pE$$

folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\psi}{\sqrt{H\varphi}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi}{\sqrt{H\varphi}}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

so dass man die Coordinaten ξ, η, ζ einer zweiten Fläche durch

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\psi}{\sqrt{H\varphi}}\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\psi}{\sqrt{H\varphi}}\frac{\partial x}{\partial u}$$

definiren kann. Man findet für die Grössen

$[A]$, $[A_1]$, $[B]$, $[B_1]$, $[C]$, $[C_1]$, $[E]$, $[F]$, $[G]$, $[H]$

derselben leicht die Werthe

$$[A] = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\psi}{\varphi\sqrt{H}}, \quad [A_1] = -\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\varphi},$$
$$[C] = -\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\varphi}, \quad [C_1] = \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\psi}{\varphi\sqrt{H}},$$
$$[B] = \frac{\partial \log \psi}{\partial v}, \quad [B_1] = \frac{\partial \log \psi}{\partial u},$$
$$[E] = \psi\sqrt{\varphi} = [G], \quad [F] = c_1\frac{\sqrt{H}}{\psi^2}, \quad [H] = \frac{\psi^4}{\varphi^2 H},$$

aus denen hervorgeht, dass wieder $[E] = [G]$ ist und ausserdem die Bedingungen für ein charakteristisches System erfüllt sind.

In dem besonderen Falle, wo bei den Flächen der Nr. 5

$$U = V = \text{const.}$$

gesetzt wird, hat man den hier betrachteten, wo $E = G$ wird. Die Flächen, welche sich unter dieser Voraussetzung durch Abbildung

vermöge paralleler Normalen ergeben, haben eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Da nämlich jetzt

$$\sqrt{\varphi} = \sqrt{\frac{e}{H}} \quad \text{und} \quad \psi = 1$$

wird, so folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u},$$

mithin werden die Coefficienten e', f', g' des Längenelementes dieser Fläche

$$e' = g' = 1, \quad f' = \frac{f}{e},$$

auf derselben entsteht demnach ein charakteristisches *äquidistantes* Curvensystem.*)

Die unter Nr. 1 bis 6 angedeuteten Betrachtungen dürften geeignet sein zu zeigen, dass die Benutzung der charakteristischen Coordinatensysteme sich für verschiedene Untersuchungen nützlich erweist. Auf eine nähere Ausführung kann hier nicht eingegangen werden.

§ 4.

Kleine Deformationen einer Fläche.

Es möge jetzt angenommen werden, dass zwei isometrische auf einander bezogene Flächen sich so verhalten, dass die Fundamentalgrössen E', F', G' der zweiten von denen der ersten E, F, G um Grössen abweichen, welche gegen Null convergiren können, so dass man die zweite Fläche als eine *kleine Deformation* der ersten bezeichnen kann. Setzt man demgemäss

$$E' = E + \Delta E,$$
$$G' = G + \Delta G,$$
$$F' = F + \Delta F$$

und untersucht man unter dieser Voraussetzung die beiden Discriminanten

$$\Delta_1 = E'G + EG' - 2FF' - 2K = \Delta F^2 - \Delta E \Delta G,$$
$$\Delta_2 = -(E'G + EG' - 2FF') - 2K = -[4K + \Delta F^2 - \Delta E \Delta G]$$

des § 1, so ergiebt sich folgendes:

Die Grösse

$$E'G + EG' - 2FF' = 2K + G\Delta E + E\Delta G - 2F\Delta F$$

*) Vgl. über äquidistante Curvensysteme meine Bemerkungen: diese Annalen Bd. 19, S. 1, 1881, sowie im Katalog mathematischer Modelle, München 1892, S. 16—26.

ist bei positivem K für alle genügend kleinen Werthe der ΔE, ΔF, ΔG immer positiv. Mithin ist Δ_2 unter diesen Umständen immer negativ, also Δ_1 positiv. Da nun die Discriminante Δ_1 der Gleichung entspricht, welche ausdrückt, dass die beiden Flächen gleiche Fundamentalgrössen E und G erhalten sollen — man bemerke, dass ein Wechsel im Vorzeichen der Normale oder eine Vertauschung der Vorzeichen der sämmtlichen Coordinaten jetzt nicht mehr zulässig ist, da die Stetigkeit der Beziehungen nicht verletzt werden darf, — so folgt:

Bei zwei positiv gekrümmten isometrischen Flächen, von denen die eine eine kleine Deformation der anderen ist, sind in Bezug auf das reelle charakteristische Coordinatensystem immer die Grössen E und G dieselben, dagegen die F entgegengesetzt gleich.

Lässt man nun die Grössen Δ gegen Null convergiren, so wird das gemeinsame reelle charakteristische Coordinatensystem einer Grenzlage zustreben, für welche die entgegengesetzt gleichen Grössen F gleichfalls gegen Null convergiren müssen, während die Eigenschaft der B und B_1, partielle Differentialquotienten einer Function φ zu sein, dabei erhalten bleibt. Man hat also den Satz:

Die Grenze der charakteristischen Coordinatensysteme einer positiv gekrümmten Fläche ist ein reelles conjugirtes Coordinatensystem derselben, in Bezug auf welches ihre drei Coordinaten derselben partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial l\varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial l\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = 0$$

genügen.

Es sei zweitens K negativ. Dann ist für genügend kleine Werthe der Δ der Ausdruck $E'G + G'E - 2FF'$ immer negativ, also Δ_2 sicher positiv. Es existirt also immer ein *reelles* charakteristisches Coordinatensystem, für das die Fundamentalgrössen E, sowie auch G *entgegengesetzt* gleich sind, während F seinen Werth nicht ändert. Die Grenze dieser Coordinatensysteme wird daher von den *Haupttangentencurven* der negativ gekrümmten Fläche gebildet, denn die Fundamentalgrössen E und G, welche auf beiden Flächen stets entgegengesetzte gleiche Werthe besitzen, müssen jetzt gegen Null convergiren.

Ob auch ein *reelles* Coordinatensystem der andern Art vorhanden ist, in Bezug auf welches im Grenzfalle die Gleichung (1) erfüllt ist, hängt davon ab, ob sich den Grössen Δ solche Werthe beilegen lassen, dass der Ausdruck

$$\Delta F^2 - \Delta E \Delta G$$

für genügend kleine Werthe derselben immer positiv bleibt. Man hat also *zweierlei kleine Deformationen eines negativ gekrümmten Flächen-*

stückes zu unterscheiden. Bei den Deformationen der *ersten Art* wird die Grenze der zugehörigen charakteristischen Coordinatensysteme immer von den Haupttangentencurven der Fläche gebildet. Bei den Deformationen der *zweiten Art* kann die Grenze auch von den Curven eines conjugirten Systemes gebildet werden. Handelt es sich um ein Flächenstück, dessen Ausdehnung sich in hinreichender Nähe einer regulären Stelle befindet, so wird man es, wie aus dem Folgenden hervorgeht, immer so einrichten können, dass auch Deformationen der zweiten Art möglich sind.

Bei den positiv gekrümmten Flächen sind nur Deformationen der *zweiten Art* möglich. — Die Eigenschaften der besonderen conjugirten Coordinatensysteme auf einer Fläche, welche der Gleichung (1) genügen, habe ich zuerst untersucht in meiner Arbeit über die Krümmung der Flächen (diese Annalen Band 39). Die vorstehenden Betrachtungen führen nun unmittelbar zu einem von Herrn Cosserat*) aufgestellten Satze, den ich in etwas anderer Form so ausspreche:

Die Bestimmung der sämmtlichen conjugirten Coordinatensysteme mit gleichen Invarianten hängt ab von der Bestimmung der Fundamentalgrössen der infinitesimalen Deformationen der Fläche, einer Quadratur, und der Lösung zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Es sei mir gestattet, diesen Satz im Anschluss an das Vorige etwas weiter auszuführen. Dabei soll nicht, wie bisher von kleinen Deformationen gesprochen werden, welche continuirlich in die Identität übergehen, sondern von infinitesimalen Deformationen überhaupt**).

Es möge das System der Haupttangentencurven der Betrachtung zu Grunde gelegt werden. Alsdann sind die Grössen E und G gleich Null, und

$$B = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial v}, \quad B_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial u},$$

das Krümmungsmass ist $-\frac{F^2}{H}\cdot$ Bei einer infinitesimalen Deformation gehen nun E, F, G über in

$$\varepsilon E', \quad F + \varepsilon F', \quad \varepsilon G',$$

wobei ε als eine unendlich kleine Grösse zu betrachten ist. Aus der nothwendigen Gleichung

*) Vgl. die reichhaltige Abhandlung von Herrn Cosserat, Sur les congruences des droites et sur la théorie des surfaces, Ann. de la faculté de Toulouse, tom. VI, S. 60 (1893).

**) Auf den merkwürdigen Umstand, dass der Begriff der kleinen Deformation sich nicht immer mit dem der infinitesimalen Deformationen eines Flächenstückes deckt, hat zuerst Herr Weingarten aufmerksam gemacht: Ueber die Deformation einer biegsamen unausdehnsamen Fläche, Journal von Kronecker Bd. 100, S. 297 u. 310, (1887).

$$-F^2 = \varepsilon^2 E' G' - (F + \varepsilon F')^2$$

folgt jetzt $F' = 0$. Mithin müssen die $E'G'$ nach § 2 den Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial G'}{\partial u} + B_1 G' - CE' = 0, \\ -\frac{\partial E'}{\partial v} + BE_1 - A_1 G' = 0 \end{aligned}$$

genügen. Setzt man $G' = \lambda E'$, so folgt aus denselben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log E'}{\partial u} + \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} &= B_1 - C\lambda^{-1}, \\ \frac{\partial \log E'}{\partial v} &= B - A_1 \lambda, \end{aligned}$$

oder zur Bestimmung von λ die Gleichung

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial v}(C\lambda^{-1}) - \frac{\partial}{\partial u}(A_1 \lambda) = 0.$$

Hat man dieselbe gelöst, so ist E' durch die Quadratur

$$\log E' = -\tfrac{1}{2} \log \varphi - \int \left\{ du \left[C\lambda^{-1} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \right] + A_1 \lambda\, dv \right\}$$

und damit auch G' bestimmt. Um nun ein Coordinatensystem der Art (1) zu gewinnen, wird man die Gleichung

$$2F\, du\, dv = \varepsilon E' du^2 + 2F\, du\, dv + \varepsilon G' dv^2$$

oder

$$E' du^2 + G' dv^2 = 0$$

zu lösen haben. So lange also, wie der Gleichung (3) durch eine Function λ genügt werden kann, welche für die in Betracht kommenden Werthe von u und v *negativ* ist, was offenbar in der Umgebung jeder Stelle möglich ist, in der sich C und A_1 nicht singulär verhalten, indem man λ daselbst einen hinreichend grossen Anfangswerth ertheilt, sind dann auch E' und G' von entgegengesetztem Zeichen, so dass man

$$E' = \alpha^2, \quad G' = -\beta^2$$

setzen kann. Hierbei sind reelle Verhältnisse vorausgesetzt; bei imaginären Haupttangentencurven wird ja ohnehin das betreffende Coordinatensystem immer reell. Setzt man nun

$$(4)\qquad \begin{aligned} \alpha du + \beta dv = 2m\, du', \\ \alpha du - \beta dv = 2n\, dv', \end{aligned}$$

wo m und n die integrirenden Divisoren der Differentialausdrücke linker Hand bedeuten, so werden die Curven u', v' die Grenzlage eines charakteristischen Coordinatensystems bestimmen. Dass in der That in Bezug auf dasselbe die Differentialgleichung (1) erfüllt ist, lässt sich folgendermassen nachweisen.

Aus den Gleichungen (2) hat man:

$$\frac{C}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{2}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u} - B_1\right),$$

$$\frac{A_1}{\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v} - B\right)$$

und nach (4)

$$\frac{\partial}{\partial u'} = \frac{m}{\alpha}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{m}{\beta}\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial v'} = \frac{n}{\alpha}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{u}{\beta}\frac{\partial}{\partial v},$$

oder

(5)
$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial u'} + \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial v'} = \frac{2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial u'} - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial v'} = \frac{2}{\beta}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Man erhält also durch Bildung der zweiten Differentialquotienten nach den u', v'

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2}{\partial u'\,\partial v'} = \frac{\partial}{\partial u'}\Bigg[&\frac{n}{\alpha}(A + B_1) + \frac{\partial \log\frac{m}{\alpha}}{\partial v_1} - \frac{2n}{\alpha\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u} - \frac{n}{\beta}(B + C_1) \\ &+ \frac{\partial\log\frac{m}{\beta}}{\partial v'} + \frac{2n}{\alpha\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\Bigg] \\ + \frac{\partial}{\partial v'}\Bigg[&\frac{n}{\alpha}(A + B_1) + \frac{\partial\log\frac{n}{\alpha}}{\partial u'} - \frac{2m}{\alpha\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{m}{\beta}(B + C_1) \\ &+ \frac{\partial\log\frac{n}{\beta}}{\partial u'} - \frac{2n}{\alpha\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\Bigg]. \end{aligned}$$

Nach den Formeln (6) des § 2 wird nun

$$\frac{n}{\alpha}(A + B_1) - \frac{n}{\beta}(B + C_1) = \frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial v'},$$

$$\frac{m}{\beta}(A + B_1) + \frac{m}{\beta}(B + C_1) = \frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial u'},$$

ferner, indem man die Formeln (5) auf die Functionen $\log\beta$ und $\log\alpha$ zur Anwendung bringt,

$$\frac{2n}{\alpha\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{n}{m}\frac{\partial\log\beta}{\partial u'} + \frac{\partial\log\beta}{\partial v'},$$

$$\frac{2n}{\alpha\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{n}{m}\frac{\partial\log\alpha}{\partial u'} + \frac{\partial\log\alpha}{\partial v'},$$

woraus folgt

$$\frac{2n}{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)=\frac{n}{m}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\alpha}}{\partial u'}+\frac{\partial\log\alpha\beta}{\partial v'},$$

$$\frac{2m}{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)=\frac{m}{n}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\alpha}}{\partial v'}+\frac{\partial\log\alpha\beta}{\partial u'}.$$

Demnach wird

$$(6)\quad 2\frac{\partial^2}{\partial u'\partial v'}=\frac{\partial}{\partial u'}\left[\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial v'}+\frac{\partial\log\frac{m^2}{\alpha\beta}}{\partial v'}-\frac{n}{m}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\alpha}}{\partial u'}-\frac{\partial\log\alpha\beta}{\partial v'}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial v'}\left[\frac{\partial\log\sqrt{H}}{\partial u'}+\frac{\partial\log\frac{m^2}{\alpha\beta}}{\partial u'}-\frac{m}{n}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\alpha}}{\partial v'}-\frac{\partial\log\alpha\beta}{\partial u'}\right].$$

Da nun die Ausdrücke

$$(7)\quad \begin{aligned} du&=\frac{m}{\alpha}du'+\frac{n}{\alpha}dv',\\ dv&=\frac{m}{\beta}du'-\frac{n}{\beta}dv' \end{aligned}$$

vollständige Differentiale sind, so ist ferner

$$\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{m}{\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{n}{\alpha}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{m}{\beta}\right)=-\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{n}{\beta}\right),$$

oder

$$\frac{\partial m}{\partial v'}-m\frac{\partial\log\alpha}{\partial v'}=\frac{\partial n}{\partial u'}-n\frac{\partial\log\alpha}{\partial u'},$$
$$\frac{\partial m}{\partial v'}-m\frac{\partial\log\beta}{\partial v'}=-\frac{\partial n}{\partial u'}+n\frac{\partial\log\beta}{\partial u'}.$$

Hieraus folgt durch Addition und Subtraction

$$2\frac{\partial\log m}{\partial v'}-\frac{\partial\log\alpha\beta}{\partial v'}=\frac{n}{m}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\alpha}}{\partial u'},$$

$$2\frac{\partial\log n}{\partial u'}-\frac{\partial\log\alpha\beta}{\partial u'}=\frac{m}{n}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\alpha}}{\partial v'}.$$

Demzufolge geht die Gleichung (6) über in

$$2\frac{\partial^2}{\partial u'\partial v'}=\frac{\partial\log\frac{\sqrt{H}}{\alpha\beta}}{\partial v'}\frac{\partial}{\partial u'}+\frac{\partial\log\frac{\sqrt{H}}{\alpha\beta}}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial v'},$$

oder, wenn man an Stelle der α, β jetzt wieder ihre Werthe einführt:

$$(8)\quad \frac{\partial^2}{\partial u'\partial v'}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log\sqrt{\frac{H}{-E'G'}}}{\partial v'}\frac{\partial}{\partial u'}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\sqrt{\frac{H}{-E'G'}}}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial v'}.$$

Dies ist die Gleichung, welche hergeleitet werden sollte.

Die Grenze eines charakteristischen Coordinatensystems kann man ebenso, wie das System der Haupttangentencurven, nur als ein *singuläres* System dieser Art bezeichnen, denn es giebt hier keine zweite von der ersten verschiedene Fläche, welche der letzteren isometrisch zugeordnet ist. Dies ergiebt sich auch bei einer näheren Betrachtung der infinitesimal deformirten Fläche. Die Haupttangentencurven der ersteren gehen dabei über in Curven, denen die Fundamentalgrössen $\varepsilon E'$, $\varepsilon G'$, F zukommen. In der That genügt also die unendlich wenig deformirte Fläche in Bezug auf das System dieser Curven der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = Fp',$$

wo $F = \sqrt{H}\varphi$ ist, aber die Fundamentalgrössen $\varepsilon E'$ und $\varepsilon G'$ sind nicht mehr Null, wie für das System auf der ursprünglichen Fläche.

Betrachtet man dagegen die Curven u', v', so ergiebt sich folgendes. Die zu ihnen gehörigen Fundamentalgrössen der ursprünglichen Fläche $[E]$, $[F]$, $[G]$ sind

$$[E] = 2F\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial u'},$$

$$[F] = F\left[\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right],$$

$$[G] = 2F\frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial v'},$$

oder nach (7)

$$[E] = 2F\frac{m^2}{\alpha\beta}, \quad [F] = 0, \quad [G] = -\frac{2Fn^2}{\alpha\beta}.$$

Für die Fundamentalgrössen $[E]'$, $[F]'$, $[G]'$ der deformirten Fläche findet man dagegen

$$[E]' = \frac{2Fm^2}{\alpha\beta}, \quad [F]' = 2\varepsilon mn, \quad [G]' = -\frac{2Fn^2}{\alpha\beta},$$

und zugleich wird

$$[H] = H\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2$$

oder

$$\sqrt{[H]} = 2H\frac{mn}{\alpha\beta}.$$

Nach der Formel (8) wird aber der Ausdruck φ für die Curven u', v', welcher ebenso durch $[\varphi]$ bezeichnet werden soll,

$$[\varphi] = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{H}}.$$

In der That ist nun

$$[F]' = \varepsilon\sqrt{[H]}\,[\varphi] = 2\varepsilon mn.$$

Auch hier genügt also die deformirte Fläche in Bezug auf das System der auf ihr liegenden Curven der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u'\,\partial v'} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log[\varphi]}{\partial v'}\frac{\partial}{\partial u'} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log[\varphi]}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial v'} = p'\sqrt{[H]}\,[\varphi]\,s$$

und es ist

$$[E]' = [E], \quad [G]' = [G],$$

aber $[F]'$ ist nicht Null, wie auf der ursprünglichen Fläche. Umgekehrt hätte man diese letztere Gleichung benutzen können, um die Gleichung

$$[\varphi] = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{H}}$$

zu erkennen und so unmittelbar zu der Gleichung (8) zu gelangen.

Ich schliesse mit der folgenden Betrachtung. Sind P und P' correspondirende Punkte zweier isometrischen Flächen, deren Normalenrichtungen *bestimmt* sind, und bringt man die Tangentialebene von P' mit der von P so zur Coincidenz, dass die Berührpunkte, die Normalenrichtungen und die entsprechenden Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen, so schneiden sich die beiden Flächen in einer Curve mit Doppelpunkt, dessen reelle oder imaginäre Tangenten den Richtungen desjenigen charakteristischen Coordinatensystems entsprechen, für das

$$E = E', \quad G = G', \quad F' = -F$$

ist. Bringt man dagegen die Ebenen so zur Deckung, dass die entgegengesetzten Richtungen der Normalen sich vereinigen, so erhält man ebenso die Richtungen der Curven des anderen Systems. Hierin liegt eine neue Definition der charakteristischen Curven vermöge der *Indicatricen*.

Wendet man diese Vorstellung auf eine Flächencalotte C_1 an, welche eine infinitesimale Deformation der Flächencalotte C ist, so ergeben sich im ersteren Falle, wo sich auch die Normalen nach der Stetigkeit entsprechen, als Grenzen zwei conjugirte Richtungen auf der Fläche, im zweiten aber die beiden Haupttangenten. Man kann die zweite Deformation auch als die symmetrische der ersten gegen die Tangentialebene ansehen.

Dieser Satz findet sich bei Bour*) in der folgenden Form ausgesprochen:

Si l'on considère une *surface appuyée contre un de ses plans tangents supposé fixe; et que, laissant la surface dans cette position*, on lui fasse subir une déformation infiniment petite; la surface primitive et sa transformée se couperont suivant deux courbes tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice.

---

*) Bour, Sur la déformation des surfaces, Journal de l'École polytechnique, Tome XXII, Cah. 39, S. 28, (1862).

Diese Behauptung von Bour ist mit dem vorigen nur dann in Uebereinstimmung, wenn in dem soeben angegebenen Citate die hervorgehobenen Werthe in geeigneter Weise verstanden werden, also die *kleine Deformation eines endlichen Flächenstücks vorliegt, das in der Nähe eines seiner Punkte betrachtet wird.* Bei einer infinitesimalen Calotte wird nun, je nachdem man die kleine Deformation durch die symmetrische ersetzt, als Richtung der Schnittlinien entweder das Bour'sche System oder das der Haupttangenten erhalten.

Der Fall der Developpabelen, welcher vorhin nicht mit in Betrachtung gezogen ist, vereinigt beide Möglichkeiten. Wird eine Developpabele auf das System ihrer Krümmungslinien bezogen, und entsprechen die Erzeugenden den Curven $v = \text{const.}$, so ist

$$E = 0, \quad F = 0.$$

Bei einer infinitesimalen Deformation gehen E, F, G über in

$$\varepsilon E', \quad \varepsilon F', \quad G + \varepsilon G'.$$

Da aber

$$\varepsilon E'(G + \varepsilon G') - \varepsilon^2 F'^2$$

wieder Null werden muss, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung E' gleich Null zu setzen. Die beiden Systeme charakteristischer Richtungen sind daher gegeben durch die Gleichungen

$$G dv^2 = 2\varepsilon F' \, du \, dv + (G + \varepsilon G') \, dv^2,$$
$$2G dv^2 + 2\varepsilon F' \, du \, dv + \varepsilon G' \, dv^2 = 0,$$

von denen die erste neben $dv = 0$ noch eine im Allgemeinen von dieser verschiedene Richtung liefert, die mit ihr ein conjugirtes System bildet, während die zweite nur $dv = 0$, d. h. die doppelt gezählte Richtung der Erzeugenden giebt.

Würzburg, im Juli 1894.

Ueber conforme Abbildung.

Von

A. Voss in Würzburg.

Wenn eine Fläche F Punkt für Punkt auf eine zweite Fläche F' analytisch bezogen ist, so bleibt das Doppelverhältniss der Tangenten von irgend vier durch einen Punkt P von F verlaufenden analytischen Curven ungeändert. Bei conformer Abbildung insbesondere, wo auch die Richtungen der Minimalcurven erhalten bleiben, bleiben daher die Winkel zwischen den Tangenten irgend zweier durch P gehenden Curven ebenfalls erhalten. Man pflegt hiernach die conforme Abbildung als eine solche zu bezeichnen, bei der unendlich kleine Dreiecke auf F in ähnliche auf F' übergeführt werden.

Hierbei handelt es sich offenbar um Beziehungen zwischen den von P und dem correspondirenden Punkte P' auf der zweiten Fläche auslaufenden entsprechenden *Tangentenbüscheln*.

Auf einer anderen Auffassung scheint es mir zu beruhen, wenn man, wie es vielfach geschieht, die conforme Punkttransformation als eine Aehnlichkeitstransformation im unendlich Kleinen bezeichnet, bei welcher also die Anordnung der zu P benachbarten Punkte ähnlich derjenigen der zu P' benachbarten gedacht wird. Hier handelt es sich nicht um ein Tangentenbüschel, sondern um die Gesammtheit der *Halbstrahlen*, welche von einem Punkte P und dem correspondirenden P' in den Tangentenebenen gezogen werden. Denn unter einer Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen wird man zunächst nur verstehen können, dass zwischen den correspondirenden Paaren von Längenelementen

$$ds,\ ds_1;\ \delta s,\ \delta s_1$$

die Proportion

$$\frac{ds}{\delta s} = \frac{ds_1}{\delta s_1}$$

besteht, und dass die Winkel zwischen den Elementen

$$(ds,\ \delta s),\ (ds_1,\ \delta s_1)$$

gleich sind.

Eine Aehnlichkeit in diesem strengen Sinne kann aber auch im unendlich Kleinen nur dann bestehen, wenn sie auch für endliche Gebiete stattfindet. Denn wenn z. B. zwei Ebenen so auf einander bezogen sind, dass die um correspondirende Punkte herumliegenden Winkel *sensu rigoroso* gleich sind, so ist die Beziehung keine andere als die der Aehnlichkeit überhaupt. Unter jener Voraussetzung müssen nämlich auch zwei Elemente ds, δs, von denen das eine die Rückwärtsverlängerung des anderen bildet, in zwei ebenso beschaffene Elemente ds_1, δs_1, also gerade Linien der ersten Ebene in gerade Linien der zweiten übergehen. Und ebenso zieht die Voraussetzung der strengen Proportionalität der von correspondirenden Punkten auslaufenden Längenelemente wieder schon für sich die Aehnlichkeit überhaupt nach sich, wie man sofort erkennt, wenn man sich ein unendlich kleines reguläres Sechseck mit dem Mittelpunkte P transformirt denkt, dessen Diagonalen dann in die des entsprechenden regulären Sechsecks übergehen, womit man auf die frühere Voraussetzung zurückgeführt wird.

Die Vorstellung, dass bei conformer Beziehung in unmittelbarer Nähe der Punkte P und P' eine ähnliche Vertheilung der entsprechenden Punkte im strengen Sinne stattfinde, ist daher nicht zutreffend. Hierüber wird freilich kein Zweifel bestehen; auch liegt die analytische Erklärung auf der Hand: die Krümmungen correspondirender Curven, als abhängig von Elementen zweiter Ordnung, bleiben eben nicht erhalten.

Aber damit wird die geometrische Auffassung auf die ganz allgemeine Vorstellung reducirt, dass, je kleiner die verglichenen Bereiche angenommen werden, um so mehr eine Aehnlichkeit hervortrete, während der *Grad* dieser Annäherung unentschieden bleibt. Auch würde man zwei infinitesimale Bereiche schon dann ähnlich nennen müssen, wenn *nur an den correspondirenden Stellen* P und P' Proportionalität der Coefficienten e, f, g des Längenelementes der ersten Fläche mit den e', f', g' der zweiten stattfindet. Ist nun dieser Fall völlig *gleichwerthig* mit dem der conformen Beziehung, wo die eben erwähnte Proportionalität durchweg stattfindet, also nicht allein $e' = ke$ u. s. w. sondern namentlich auch $de' = kde + edk$ u. s. w. ist? Ferner wird man den Fall $k = 1$ als Congruenz der genannten Bereiche zu bezeichnen haben. Aber wie unterscheidet sich derselbe von der isometrischen Beziehung $e' = e$ u. s. w., wo k durchweg den Werth Eins hat?

Da die sich hieran schliessenden — wenn auch sehr elementaren — Fragen bisher nicht behandelt zu sein scheinen, hielt ich es nicht für überflüssig, eine genauere Discussion der Verhältnisse in der unmittelbaren Nähe eines Paares correspondirender Punkte zweier analytisch auf einander bezogenen Flächenstücke zu geben, bei welcher festgestellt wird, *wie sich dieselben modificiren, wenn man von dem allgemeinen*

Falle, wo nur an diesen beiden Stellen Proportionalität der Coefficienten der Längenelemente stattfindet, zu dem der Isometrie beider Flächen übergeht. Ohne eine solche genauere Erörterung dürfte die vielfach benutzte Ausdrucksweise, nach welcher bei jeder analytischen Beziehung im unendlich Kleinen zufolge des linearen Charakters der infinitesimalen Transformationen einfach die Verhältnisse der linearen Transformationen mit constanten Coefficienten vorliegen, nur eine sehr unbestimmte sein.

Den Fall der allgemeinen Punkttransformation hier mit hineinzuziehen, habe ich unterlassen, um nicht diesen an und für sich elementaren Gegenstand durch Betrachtung von Doppelverhältnissen noch weitläufiger erscheinen zu lassen.

§ 1.

Durch den Punkt P sei auf der Fläche eine beliebige (analytische) Curve gezogen, auf der ein weiterer Punkt Q heisse. Alsdann verstehe ich unter der *Entfernung PQ die Länge der Sehne PQ* und ebenso unter Θ *den Winkel QPR des geradlinigen Dreiecks QPR*, welches von den auf zwei solchen Curven gelegenen Punkten Q und R mit P gebildet wird. Zuwachse, welche sich auf Punkte der ersten Curve beziehen, sollen durch d; solche, welche der zweiten angehören, durch δ bezeichnet werden. Im Folgenden wird es sich um eine Entwickelung der Grössen PQ und $\cos\Theta$ nach den unabhängigen Variabeln u und v handeln, auf welche die Fläche bezogen ist. Dabei haben dann die Fundamentalgrössen e, f, g; E, F, G erster und zweiter Ordnung in Betracht zu kommen, sowie die folgende Gruppe von Formeln, in denen die beigefügten Indices $u, uu, v\dots$ Differentialquotienten nach den betreffenden Variabeln anzeigen und das Summationszeichen sich auf die Vereinigung der drei gleichartigen Ausdrücke für x, y und z bezieht:

$$\begin{aligned}
&\sum x_u^2 = e, \quad \sum x_u x_v = f, \quad \sum x_v^2 = g,\\
&\sum x_u x_{uu} = \tfrac{1}{2} e_u, \quad \sum x_v x_{uv} = \tfrac{1}{2} g_u,\\
&\sum x_u x_{uv} = \tfrac{1}{2} e_v, \quad \sum x_v x_{vv} = \tfrac{1}{2} g_v,\\
(1)\quad &\sum x_u x_{vv} = f_v - \tfrac{1}{2} g_u, \quad \sum x_v x_{uu} = f_u - \tfrac{1}{2} e_v,\\
&\sum x_u x_{uuu} = \tfrac{1}{2} e_{uu} - \sum x_{uu}^2,\\
&\sum x_v x_{uuu} = f_{uu} - \tfrac{1}{2} e_{uv} - \sum x_{uu} x_{uv},\\
&\sum x_u x_{uuv} = \tfrac{1}{2} e_{uv} - \sum x_{uv} x_{uu},
\end{aligned}$$

$$\sum x_v x_{uuv} = f_{uv} - \frac{1}{2} e_{vv} - \sum x_{uu} x_{vv} = \frac{1}{2} g_{uu} - \sum x_{uv}^2,$$
$$\sum x_u x_{uvv} = f_{uv} - \frac{1}{2} g_{uu} - \sum x_{uu} x_{vv} = \frac{1}{2} e_{vv} = \sum x_{uv}^2,$$
$$\sum x_v x_{uvv} = \frac{1}{2} g_{uv} - \sum x_{uv} x_{vv},$$
$$\sum x_u x_{vvv} = f_{vv} - \frac{1}{2} g_{uv} - \sum x_{uv} x_{vv},$$
$$\sum x_v x_{vvv} = \frac{1}{2} g_{vv} - \sum x_{vv}^2.$$

Unter Θ_v soll der *Grenzwerth von* Θ verstanden werden, so dass

$$\cos \Theta_0 = \frac{e\,du\,\delta u + f(du\,\delta v + dv\,\delta u) + g\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s},$$
$$\sin \Theta_0 = \frac{\sqrt{eg - f^2}(du\,\delta v - dv\,\delta u)}{ds\,\delta s}$$

zu nehmen ist.

Man erhält dann *inclusive der Grössen dritter Ordnung* aus (1) die Formel

$$(2)\quad \begin{aligned} dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = {} & e\,du\,\delta u + f(du\,\delta v + dv\,\delta u) + g\,dv\,\delta v \\ & + \tfrac{1}{4}[du\,\delta u(de + \delta e) + (dv\,\delta u + du\,\delta v)(df + \delta f) \\ & \quad + dv\,\delta v(dg + \delta g)] \\ & + \tfrac{1}{2}[e(\delta u\,d^2 u + du\,\delta^2 u) \\ & \quad + f(du\,\delta^2 v + \delta u\,d^2 v + \delta v\,d^2 u + dv\,\delta^2 u) \\ & \quad + g(dv\,\delta^2 v + \delta v\,d^2 v)] \\ & + \tfrac{1}{4}[e_v - f_u)(\delta u - du) + (f_v - g_u)(\delta v - dv)] \\ & \quad (du\,\delta u - dv\,\delta u) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

und insbesondere für $\delta = d$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + \frac{1}{2}[du^2\,de + 2\,du\,dv\,df + dv^2\,dg]$$
$$+ e\,du\,d^2 u + f(du\,d^2 v + dv\,d^2 u) + g(dv\,d^2 v) + \cdots$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$A = du^2\,de + 2\,du\,dv\,df + dv^2\,dg,$$
$$B = e\,du\,d^2 u + f(du\,d^2 v + dv\,d^2 u) + g\,dv\,d^2 v$$

gesetzt wird und die den δ entsprechenden Grössen durch A und B bezeichnet werden

$$(3)\qquad PQ^2 = ds^2 + \frac{1}{2} A + B + \cdots$$

also:

$$PQ = ds\left[1 + \frac{1}{4}\frac{A}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{B}{ds^2}\cdots\right]$$

und

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{ds}{\delta s}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{A}{ds^2} - \frac{\mathsf{A}}{\delta s^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{ds^2} - \frac{\mathsf{B}}{ds^2}\right) + \cdots\right.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass an der correspondirenden Stelle P' einer zweiten Fläche die Bedingungen

$$(4) \qquad e' = ke, \quad f' = kf, \quad g' = kg$$

bestehen, so folgt, wenn die entsprechenden Grössen wie bisher durch den beigefügten Index 1 angedeutet werden,

$$(5) \qquad P'Q' - \sqrt{k}\, PQ = \frac{\sqrt{k}}{4ds}\left(\frac{A_1}{k} - A\right) + \cdots,$$

$$(6) \qquad \frac{P'Q'}{P'R'} - \frac{PQ}{PR} = \frac{ds}{4\delta s}\left(\frac{A_1}{ds_1^2} - \frac{\mathsf{A}_1}{\delta s_1^2} - \left(\frac{A}{ds^2} - \frac{\mathsf{A}}{\delta s^2}\right)\right) + \cdots$$

und insbesondere, wenn mit den Bedingungen (4) zugleich noch die folgenden

$$(4\text{a}) \qquad de' = kde + edk, \quad df' = kdf + fdk, \quad dg' = kdg + gdk$$

erfüllt sind,

$$(5\text{a}) \qquad P'Q' - \sqrt{k}\, PQ = \frac{ds\, dk}{4\sqrt{k}} + \cdots,$$

$$(6\text{a}) \qquad \frac{P'Q'}{P'R'} - \frac{PQ}{PR} = \frac{ds}{4\delta s}\,\frac{dk - \delta k}{k} + \cdots.$$

Hieraus folgt: *Im allgemeinen, d. h. unter Voraussetzung der Bedingungen* (4) *wird die Differenz $P'Q' - \sqrt{k}\, PQ$ von der zweiten Ordnung, für drei durch die Gleichung*

$$\frac{A_1}{k} - A = 0$$

bestimmte Fortschreitungsrichtungen aber von höherer als zweiter Ordnung unendlich klein, während die Differenz correspondirender Längenverhältnisse ein unendlich kleines erster Ordnung wird.

Finden auch noch die Bedingungen (4a) statt, *so fallen zwei von den genannten drei Fortschreitungsrichtungen mit den der Minimalcurven, welche sich an der Stelle P, P' auf beiden Flächen entsprechen, zusammen, während die dritte durch $dk = 0$ gegeben ist.*

Nur dann, wenn das Differential von k an der Stelle P verschwindet, also allgemein zu reden, k ein Maximum oder Minimum ist, wird die Differenz der Verhältnisse correspondirender Längenelemente für *jede* Richtung von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein.

Um den Formeln (5a), (6a) eine geometrische Bedeutung zu geben, bezeichne man den Winkel, den die Richtung du, dv mit der aus-

gezeichneten Richtung $dk = 0$ macht, durch a und entsprechend für δu, δv durch α. Versteht man wie üblich unter $\Delta_1(k)$ den ersten Differentialparameter von k, so ist

$$dk = \sin a\, ds \sqrt{\Delta_1(k)}$$

also

$$P'Q' - \sqrt{k}\, PQ = \frac{ds^2}{4\sqrt{k}} \sqrt{\Delta_1(k)} \sin a, \tag{5a}$$

$$\frac{P'Q'}{P'R'} - \frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{\Delta_1(k)}}{4k} (\sin a\, ds - \sin\alpha\, \delta s) \cdot \frac{ds}{\delta s} \tag{6a}$$

also, wenn man festsetzt, dass die Längenelemente ds und δs als gleich betrachtet werden sollen,

$$\frac{P'Q'}{P'R'} - \frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{\Delta_1(k)}}{2k}\, ds \sin\frac{\Theta_0}{2} \cos\left(\frac{a+\alpha}{2}\right).$$

Unter dieser Voraussetzung *wird also die Differenz der Verhältnisse correspondirender Längenelemente für solche Richtungen, die symmetrisch zur Normalen von $dk = 0$ liegen, von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein.*

§ II.

Um nun auch die Beziehungen für correspondirende Winkel Θ und Θ_1 zwischen den Längenelementen PQ, PR; $P'Q'$, $P'R'$ zu erhalten, multiplicire man die Formel für die geodätische Krümmung $\frac{1}{R}$ einer durch den Punkt P gehenden Curve

$$\sqrt{eg - f^2}\, \frac{ds^3}{R} - (eg - f^2)(du\, d^2v - dv\, d^2u) \tag{1}$$

$$= \begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & du^2 \sum x_u x_{uu} + 2du\,dv \sum x_u x_{uv} + dv^2 \sum x_u x_{vv} \\ f\,du + g\,dv & du^2 \sum x_v x_{uu} + 2du\,dv \sum x_v x_{uv} + dv^2 \sum x_v x_{vv} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante $(du\,\delta v - dv\,\delta u)$. Alsdann entsteht, wenn die linke Seite von (1) durch C bezeichnet wird, die Formel

$$\begin{aligned} C(du\,\delta v - dv\,\delta u) &= \frac{ds^2}{2}[du\,\delta u\, de + df(du\,\delta v + dv\,\delta u) + dv\,\delta v\, dg] \\ &- \frac{ds\,\delta s}{2} \cos\Theta_0 [du^2\, de + 2du\,dv\, df + dv^2\, dg) \\ &- \frac{ds^2}{2}[du\,\delta v - dv\,\delta u][(e_v - f_u)\,du + (f_v - g_u)\,dv]. \end{aligned}$$

Verwendet man diese, so wie die analoge Formel für Γ, welche zu der geodätischen Krümmung $\frac{1}{\Pi}$ nach der Richtung δ gehört, zur

Vereinfachung des in § 1, (2) gegebenen Ausdruckes für $dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z$, so ergiebt sich, wenn man noch berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned}(eg - f^2)\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)\,(du\,\delta v - dv\,\delta u) \\ = ds^2\big(e\,\delta u\,d^2u + f(\delta u\,d^2v + \delta v\,d^2u) + g\,\delta v\,d^2v\big) \\ - ds\,\delta s\cos\Theta_0\,(e\,du\,d^2u + f\,(dv\,d^2u + du\,d^2v) + g\,dv\,d^2v)\end{aligned}$$

ist, durch Entwickelung von

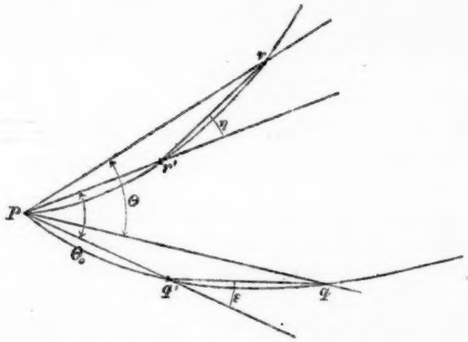
$$\cos\Theta = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{PQ.PR}$$

nach gehöriger Reduction die Formel

$$(2)\qquad \cos\Theta = \cos\Theta_0 + \tfrac{1}{2}\sin\Theta_0\left(\frac{ds}{R} - \frac{\delta s}{\Pi}\right) + \cdots$$

in welcher das zweite Glied als Factor die Differenz der geodätischen Contingenzwinkel der beiden durch P und Q gelegten Curven enthält.

Man kann diese auf etwas weitläufigem Wege gewonnene Formel leicht geometrisch veranschaulichen. Projicirt man nämlich die beiden Sehnen PQ, PR sowie die zugehörigen Curvenelemente auf die Tangentialebene in P, so entstehen — man vergleiche die beistehende Figur, in der die Projectionen der Punkte Q, R durch q, r bezeichnet sind —



die Curvenelemente $Pq'q$, $Pr'r$, welche mit den Projectionen der Sehnen Pq, Pr die halben geodätischen Contingenzwinkel $\frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{\eta}{2}$ bilden, falls man die Elemente $Pq' = q'q$, $Pr' = r'r$ annimmt. Alsdann folgt unmittelbar

$$\Theta = \Theta_0 - \frac{1}{2}(\varepsilon - \eta)$$

was mit der Formel (2) übereinstimmt.

Man erhält demnach aus (2) für die Differenz correspondirender Winkel Θ und Θ_1 die Formel

$$\Theta_1 - \Theta = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{ds}{R} - \frac{\delta s}{\Pi}\right) - \left(\frac{ds_1}{R_1} - \frac{\delta s_1}{\Pi_1}\right)\right] \tag{3}$$

falls man den beiderseitig auftretenden Factor $\sin \Theta_0$ beseitigt.

Dieselbe drückt die unendlich kleine Differenz dieser Winkel, welche beide in erster Annäherung durch Θ_0 gemessen werden, durch die geodätischen Contingenzwinkel ihrer Schenkel aus.

Hierbei ist freilich zunächst vorauszusetzen, dass Θ_0 ein von 0 oder π verschiedener Winkel ist. Denn, wenn z. B. die Incremente du, dv, d^2u, d^2v; δu, δv, $\delta^2 u$, $\delta^2 v$ ein und derselben analytischen Curve durch den Punkt P angehören, also

$$du = -\delta u\,,\quad dv = -\delta v,$$
$$d^2u = \delta^2 u,\quad dv = \delta^2 v$$

ist, so fällt das Glied dritter Ordnung in § I, (2) fort, und man erhält aus § I, (2) durch Uebergang zu den Gliedern höherer Ordnung einfach die Formel für den Halbmesser der Krümmung der Curve im Punkte P.

Andererseits folgt aus der Formel (3), dass die Differenz für die Summe zweier Winkel gleich der Summe der Differenzen für die einzelnen Summanden ist. Alsdann ergiebt sich aber für die Differenz zweier Winkel, die beide in erster Annäherung gleich π sind, und deren Schenkel den Fortschreitungsrichtungen $\delta u = -du$, $\delta v = -dv$ entsprechen, der Werth:

$$\frac{ds}{R} - \frac{ds_1}{R_1} \tag{4}$$

weil nach der zu Anfang dieses Paragraphen benutzten Formel (1) für die geodätische Krümmung der Werth von Π dem von R entgegengesetzt gleich ist.

Um dies anscheinend paradoxe Verhalten zu erklären, muss man bedenken, *dass die Gesammtheit der Halbstrahlen PQ, PR, ... einen unendlich flachen Kegelmantel bildet.* Nun kann man die Winkel zwischen den Erzeugenden eines Kegels in *zweierlei* Sinn messen, einerseits *im dreidimensionalen Raume*, andererseits *in der Mantelfläche des Kegels.*

Im *ersten* Fall gelangt man, wenn man zwei „diametral gegenüberliegende“ Kanten des Kegels als Elemente ein und derselben Curve auffasst, zu dem gewöhnlichen Contingenzwinkel, im *zweiten* dagegen gelangt man an der Gränze zu demjenigen Winkel, dessen Differenz von den ihm correspondirenden durch den Ausdruck (4) gegeben ist. Für den Fall, dass die beiden aufeinander bezogenen Flächen Ebenen sind, fällt die eine Auffassung mit der anderen zusammen; in der That geht ja auch hier die geodätische Krümmung in die totale über.

Nach der zu Anfang dieses Paragraphen angeführten Formel für $\frac{ds}{R}$ ist nun aber, unter Voraussetzung der Bedingungen (4) des § I, der Ausdruck (4) *nur abhängig von der Richtung* du, dv, nicht etwa von den *zweiten Incrementen* d^2u, d^2v. Das heisst: *die Differenz der geodätischen Contingenzwinkel zweier entsprechender Curven ist nur von der Richtung der Tangente dieser Curven abhängig. Diese für jede Richtung charakteristische Grösse mag daher als die ihr zugehörige geodätische Abweichung bezeichnet werden.* Alsdann hat man den Satz:

Die Differenz zweier correspondirender Winkel ist gleich der halben Differenz der geodätischen Abweichungen ihrer Schenkel.

Dabei giebt es im allgemeinen wieder *drei* Richtungen, deren geodätische Abweichungen gleich Null sind. Sind aber auch noch die Bedingungen (4a) des § I erfüllt, *so fallen zwei derselben mit den Richtungen der Minimalcurven durch P zusammen.* Man erhält nämlich jetzt durch Einsetzen von $de' = k\,de + e\,dk$ u. s. w. in den Ausdruck für die geodätische Krümmung aus (3)

$$(5)\quad \Theta_1 - \Theta = \frac{1}{4k}\sqrt{(eg-f^2)}\,[(ek_v - fk_u)(du - \delta u) + (fk_v - gk_u)(dv - \delta v)],$$

mithin für die geodätische Abweichung, welche zur Richtung du, dv gehört,

$$\omega = \frac{1}{2k}\sqrt{(eg-f^2)}\,[(ek_v - fk_u)\,du + (fk_v - gk_u)\,dv].$$

Bezeichnet man, wie früher, den Winkel, den die Richtung du, dv mit der von $dk = 0$ bildet, durch a, so wird

$$\omega = \frac{ds}{2k}\sqrt{\Delta_1(k)}\cos a.$$

Das Maximum ω_0 *der geodätischen Abweichung entspricht daher der Richtung* $dk = 0$, *während für die dazu senkrechte* ω *gleich Null wird.*

Endlich hat man aus (5)

$$\Theta_1 - \Theta = \frac{\omega_0}{2}(\cos a - \cos \alpha) = -\,\omega_0 \sin\frac{\Theta_0}{2}\sin\left(\frac{a+\alpha}{2}\right),$$

falls wieder α den der Richtung δ entsprechenden Winkel bedeutet und $ds = \delta s$ genommen wird. *Demnach wird für Winkel, deren Schenkel symmetrisch zu der Richtung* $dk = 0$ *liegen, die Differenz von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein*, während das analoge für die Differenz solcher Längenelementsverhältnisse stattfindet, deren Richtungen symmetrisch zu der auf $dk = 0$ senkrechten Richtung liegen.

Man veranschauliche sich diese Verhältnisse z. B. bei der Transformation durch reciproke Radien in der Ebene. Die Richtung $dk = 0$

ist hier die der Orthogonalkreise zu den Geraden durch das Centrum der Inversion. Jeder Kreis durch zwei in Bezug auf den Inversionskreis conjugirte Punkte geht dabei als Totalfigur in sich über, d. h. die Winkel correspondirender Curvenpaare durch einen Punkt bleiben ungeändert, aber die *Anordnung* der correspondirenden Punkte auf diesen Curven ist eine ganz andere und befolgt die im Vorstehenden entwickelten Gesetze.

§ III.

Unter Voraussetzung der Bedingungen (4) oder (4a) des § I kann man also zwei infinitesimalen correspondirenden Bereichen Aehnlichkeit zuschreiben, falls Grössen von der Ordnung der linearen Ausdehnung dieser Bereiche als solche erster Ordnung gegen endliche vernachlässigt werden. Eine wesentliche Aenderung findet hierin nicht statt, wenn der Modul $k = 1$ genommen wird. Nur dann, wenn für die betreffende Stelle auch noch das Differential von k verschwindet, wird die Differenz correspondirender Winkel und Längenverhältnisse eine Grösse zweiter Ordnung. Aber auch in diesem Falle liegen noch *nicht* diejenigen Verhältnisse vor, wie sie bei zwei isometrischen oder ähnlichen Flächen bestehen, wo k durchweg gleich Eins oder constant ist.

Zu einer genaueren Untersuchung derselben ist die weitere Entwickelung der Formel (2) des § I erforderlich. In der That finden sich in den Gliedern vierter Ordnung noch die zweiten Differentialquotienten von k vor, so dass selbst, wenn dk gleich Null ist, noch nicht dieselben Umstände vorliegen, als wenn k überhaupt constant ist. Von der Ausführung dieser Entwickelung muss hier abgesehen werden, da für das Folgende nur der Fall, wo k durchweg gleich Eins ist, in Betracht kommen soll.

Entwickelt man zunächst das Quadrat der Sehne PQ, so ergiebt sich, mit Weglassung aller derjenigen Glieder, welche nur von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coefficienten des Längenelementes abhängig sind, nach den Formeln (1) des § I bis zu den Grössen *vierter* Ordnung inclusive:

$$(1)\quad PQ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 + \cdots$$
$$- \frac{1}{12}\,[E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2]^2.$$

Man erhält also für zwei isometrische Flächen, wenn man die Krümmungshalbmesser der Normalkrümmung nach der Richtung du, dv durch ϱ und ϱ' bezeichnet

$$(1)\quad P'Q' - PQ = -\frac{1}{24}\left(\frac{1}{\varrho'^2} - \frac{1}{\varrho^2}\right) ds^3,$$

in welcher man hier wegen der Gleichheit der geodätischen Krümmungen

unter ϱ und ϱ' auch die totalen Krümmungen der correspondirenden Curven verstehen kann. *Die Differenz correspondirender Entfernungen ist hier also immer eine Grösse dritter Ordnung. Nur für die Richtungspaare der charakteristischen Curven der beiden isometrischen Flächen,* deren Realität in der vorhergehenden Note über isometrische Flächen genau untersucht ist, *erhöht sich diese Ordnung auf die vierte.*

Ich entwickele endlich noch die Formel, welche der des § I, (2) entspricht. Da auch $EG - F^2$ nur von den ersten und zweiten Differentialquotienten der e, f, g abhängt, so ergiebt sich, falls wieder alle Glieder fortgelassen werden, die nicht von Einfluss sind, bis inclusive der Grössen *vierter* Ordnung:

$$\begin{aligned} dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = {} & e\,du\,\delta u + f(du\,\delta v + dv\,\delta u) + q\,dv\,\delta v \\ & + \tfrac{1}{4}[E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2]\,[E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v \\ & \qquad + G\delta v^2] \\ & - \tfrac{1}{6}[E du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G dv\,\delta v] \\ & \quad [E(du^2 + \delta u^2) + 2F(du\,dv + \delta u\,\delta v) \\ & \qquad + G(dv^2 + \delta v^2)]. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt unter der Voraussetzung $ds = \delta s$

$$\begin{aligned} \cos\Theta_1 - \cos\Theta = {} & ds\cdot\delta s\left[\frac{1}{4r'\varrho'} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{\varrho'}\right)A_1 + \frac{\cos\Theta_0}{24}\left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{\varrho'^2}\right)\right] \\ & - ds\,\delta s\left[\frac{1}{4r\varrho} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right)A + \frac{\cos\Theta_0}{24}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right)\right] \end{aligned}$$

in welcher Formel r, ϱ die auf der ersten Fläche zu den Richtungen d, δ gehörigen Normalkrümmungen bedeuten, und

$$A = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}$$

zu nehmen ist. Im allgemeinen wird also hier die Differenz correspondirender Winkel eine Grösse *zweiter* Ordnung. Hierbei ist natürlich Θ_0 als ein von 0 und π verschiedener Winkel vorauszusetzen.

Für zwei isometrisch aufeinander bezogene infinitesimale Bereiche findet demnach *Congruenz* in dem besonderen Sinne statt, dass die Abweichung in den Winkeln und Längenelementsverhältnissen unendlich klein erster Ordnung gegen die lineare Ausdehnung dieser Bereiche wird, während bei conformer Beziehung an denjenigen Stellen, wo der Modul k gleich Eins ist, diese Abweichungen (im allgemeinen) von derselben Ordnung bleiben, wie jene Bereiche selbst.

Würzburg im Juli 1894.

Note über die Algebra der binären Relative.

Von

Ernst Schröder in Karlsruhe.

Über obige Disziplin wird demnächst, nahe gleichzeitig mit dem letzten Teil des zweiten Bandes von des Verfassers „Vorlesungen über die Algebra der Logik“ ein Buch als dritter Band genannten Werks erscheinen — zuvörderst mit der ersten von seinen zwei Abteilungen — welches diese Disziplin im Anschluss an Ch. S. Peirce auch unabhängig von Bd. 1 und 2 begründet. Über die Gründe, welche Ausschaltung der einschlägigen ursprünglich für Bd. 2 bestimmt gewesnen Vorlesungen aus diesem, und ihre Ausgestaltung zu einem eignen Bande nötig machten, darf ich wol auf die Mitteilungen der Teubner'schen Verlagsbuchhandlung verweisen, und sei es gestattet, über das Wesen dieses in Deutschland wol noch gänzlich unbekannten Zweiges der algebraischen Logik behufs dessen Einführung in der mathematischen Welt hier einige Mitteilungen zu machen.

Die Disziplin geht aus von der Betrachtung eines Denkbereiches 1^1 bestehend aus „*Elementen*“ $A, B, C, \ldots$ die als einander gegenseitig ausschliessend und von dem Nichts (0) verschieden vorausgesetzt werden. Als Inbegriff dieser Elemente wird der Bereich mittelst

$$1^1 = A + B + C + \cdots = \Sigma_i i$$

in Gestalt von deren „identischer Summe“ (logical aggregate) dargestellt. Doch ist sogleich zu betonen, dass diese Elemente — wie die (reellen) Zahlen, oder die Punkte einer Geraden (ev. Strecke) — auch ein Kontinuum bilden dürfen.

Irgend zwei Elemente i und j lassen sich — etwa unter dem Gesichtspunkt einer gewissen von i zu j bestehenden „*Beziehung*“ — in bestimmter Folge zu einem *Elementepaar* (oder individuellen binären Relative) $i:j$ zusammenstellen, und bildet die Gesamtheit aller erdenklichen Elementepaare:

$$1^2 = \Sigma_{ij}\, i:j$$

einen zweiten aus dem ursprünglichen abgeleiteten Denkbereich, der aus den Variationen mit Wiederholungen zur zweiten Klasse von des letztern Elementen besteht.

In diesem zweiten Denkbereiche bewegt sich unsre ganze Disziplin, und es wird unter einem *binären Relative* (a oder $b, c, \ldots$) nichts andres zu verstehen sein, als ein Inbegriff (identische Summe) von Elementenpaaren (keinen, einigen oder allen), irgendwie hervorgehoben aus genanntem Bereiche.

Die fundamentalen Festsetzungen aus denen alle Sätze unserer Disziplin (nach den Prinzipien der allgemeinen Logik, dem dictum de omni, Satz des Widerspruchs, etc.) denknotwendig folgen, lassen sich — als etwa 31 an Zahl — bequem auf einer halben Seite zusammenstellen und lauten im (nachher etwas zu erläuternden) Überblicke wie folgt:

$$(1)\qquad (a = b) = (a ⋹ b)(b ⋹ a),$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{c} 0 ⋹ 0, \quad 0 ⋹ 1, \quad 1 ⋹ 1 \\ 1 \not⋹ 0, \end{array}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{c|c} 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 & 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 0 + 0 = 0, \end{array}\right.$$

$$(4)\qquad \bar{1} = 0 \quad\Big|\quad \bar{0} = 1,$$

$$(5)\qquad a = \Sigma_{ij}\, a_{ij}\,(i:j)$$

$$(6)\qquad 1_{ij} = 1 \quad\Big|\quad 0_{ij} = 0$$

$$(7)\qquad 1'_{ij} = (i = j) \quad\Big|\quad 0'_{ij} = (i \neq j)$$

$$(8)\qquad i_{hk} = 1'_{ih}$$

$$(9)\qquad (i:j)_{hk} = 1'_{ih}\, 1'_{kj}$$

$$(10)\qquad (ab)_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad\Big|\quad (a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(11)\qquad \bar{a}_{ij} = \overline{(a_{ij})}$$

$$(12)\qquad (a ; b)_{ij} = \Sigma_h a_{ih} b_{hj} \quad\Big|\quad (a ɟ b)_{ij} = \Pi_h (a_{ih} + b_{hj})$$

$$(13)\qquad \breve{a}_{ij} = a_{ji}$$

$$(14)\qquad (a ⋹ b) = \Pi_{ij}(a_{ij} ⋹ b_{ij})$$

$$(15)\qquad (\Pi a)_{ij} = \Pi a_{ij} \quad\Big|\quad (\Sigma a)_{ij} = \Sigma a_{ij}.$$

Die Aussagenäquivalenz (1) führt für alle in unserer Disziplin vorkommenden Symbole den Begriff der Gleichheit, Gleichung auf den der Einordnung, Subsumtion zurück: für gleich soll nur gelten, was gegenseitig in einander enthalten — mithin einerlei, identisch ist.

Durch die Festsetzungen (2) werden hierauf die Einordnungsverhältnisse geregelt zunächst für einen Wertbereich, der nur die

zwei Werte 0 und 1 umfasst. Von den vier zwischen diesen Werten denkbaren Einordnungen soll nur diese eine $1 \rightleftarrows 0$ *nicht* gelten.

(3) bildet den Abacus, das Einmaleins etc. für diesen Wertbereich. Die einzige Abweichung von dem numerischen, speciell dem dyadischen Einspluseinse, welche darin zu erblicken ist, dass in unsrer Disziplin die Anerkennung der Gleichung $1 + 1 = 1$ gefordert wird, motivirt sich eben daraus, dass, weil in ihr für „gleich" nur gelten soll, was einerlei ist, auch ein wiederholtes Setzen von Gleichem nicht anders denkbar sein wird denn in Form einer tautologischen und darum belanglosen Wiederholung.

Während für unsern Wertbereich 0,1 durch die Festsetzungen (3) vollständig erklärt erscheinen: die Operationen der „*identischen*" *Multiplikation* und *Addition*, gibt (4) die Definition der (durch übergesetzten Strich anzudeutenden) *Negation*, indem sie 1 und 0 als Negate von einander hinstellt.

Die bisher besprochnen Festsetzungen gelten auch im identischen und damit zugleich im Aussagen-Kalkul; sie bilden obendrein die gesamte formale Grundlage des letztern.

Aufgrund der Deutung einer *Aussagen*subsumtion $\alpha \rightleftarrows \beta$ als die Aussage: „wann α gilt, gilt β", erklärt der Aussagenkalkul bekanntlich — gemäss (1) — alle wahren Aussagen für einander äquivalent („gleich"), und ebenso alle falschen. Die wahre Aussage wird mit 1, die falsche mit 0 bezeichnet. Und weil eine Aussage hinstellen, ihre Wahrheit behaupten heisst, muss eine Aussage α äquivalent sein mit der Behauptung: $\alpha = 1$.

Dass ein Aussagenprodukt $\alpha\beta$ die simultane Geltung der beiden Faktor-aussagen fordert, die Aussagensumme $\alpha + \beta$ deren alternative Geltung (als entweder die eine, oder die andre, oder auch beide zugleich), ist hienach mit (3) leicht in Einklang zu bringen. Ebenso: dass das Aussagennegat $\bar{\alpha}$ die Aussage α leugnet, sie als nicht-gültig hinstellt, mit (4).

Zur Erläuterung der Aussagen-Π und Σ ist dann blos noch hinzuzufügen, dass: ein $\Pi_i \alpha_i$ bedeuten solle, dass die Aussage α_i *für jedes* (Element) i gilt, ein $\Sigma_i \alpha_i$ bedeutet, dass α_i *für gewisse* i gilt, m. a. W. dass es (mindestens ein) i *gibt*, für welche(s) sie zutrifft. Nach dem Abacus muss in der That das Π verschwinden, sobald auch nur ein Factor 0 ist, die Summe gleich 1 sein, wenn das auch nur bei einem Gliede zutrifft.

Sollte indess unser Denkbereich 1^1 ein Kontinuum sein, z. B. i den allgemeinen Punkt einer Geraden vorstellen, so würden sich ohne Wortbehelf die obigen Aussagen nicht mehr explicite hinschreiben in Formeln oder in der Zeichensprache also, die Π und Σ sich nicht entbehren lassen.

Beim Operiren mit den Aussagen-Π und Σ kann man sich jederzeit stützen auf das logische „Prinzip" welches bekannt ist unter dem Namen des „dictum de omni et de nullo" (et — de aliquo oder ullo sollte man noch hinzufügen). Dergleichen Prinzipien sind keine Axiome, sondern blos Stellvertreter von, Surrogate für *Definitionen*, die als solche, regelrecht, nicht gegeben zu werden vermögen. Bekanntlich lässt sich nicht alles definiren — so auch wol nicht die Worte „jedes" oder „alle" und „keine" sowie „einige" oder „gewisse", das Wörtchen „nicht". Für deren vakant bleibende Definition treten eben die logischen „Prinzipien" ein (Peirce). —

Wenn es nun mit Vorbemerktem zulässig erschien, in (1) bis (4) die 0 und 1 aufzufassen als die beiden Wahrheitswerte der Aussagen (0 wäre eigentlich der Unwahrheitswert zu nennen) und wenn uns solche Deutung in der That jederzeit freistehen wird, so präkludirt das keineswegs die Verwendung ebendieser Symbole 0 und 1 auch zur Darstellung gewisser speziellen binären Relative — aus dem Grunde, weil die beiden Denkbereiche, nämlich derjenige der Aussagen und der Denkbereich der binären Relative, völlig auseinander liegen.

Mit der Festsetzung (5) treten wir erst aus dem elementaren Teil der algebraischen Logik heraus und in die Theorie der Relative selbst ein. Diese (5) ist für jedes binäre Relativ a getroffen zu denken mit dem Beifügen: dass dessen Relativ*koeffizienten* a_{ij} samt und sonders *auf den Bereich der beiden Werte* 0 *und* 1 *angewiesen* sein sollen, und dass der Nullwert eines Koeffizienten *den Ausfall*, dessen Wert 1 aber *das Vorhandensein* des zugehörigen *„Konstituenten"* $i:j$ als eines Glieds der Summe bewirken solle.

Das allgemeine binäre Relativ ist darnach eine Summe von Elementepaaren. Es ist völlig bestimmt durch die Angabe ob $= 0$ oder $= 1$, für einen jeden von seinen Koeffizienten, womöglich durch generelle Charakterisirung seines *„allgemeinen* Koeffizienten" (zum beliebigen Suffixe ij) a_{ij}.

Darum beziehen sich auch alle folgenden Festsetzungen blos noch auf solche Relativkoeffizienten.

Die in Reihen (Zeilen und Kolonnen) geordnete Zusammenstellung der Koeffizienten*werte* a_{ij} heisst die *Matrix* des Relativs a und sieht aus wie eine (ev. unendliche) Determinante, deren „Elemente" nur Nullen oder Einser wären. Da das Wort „Element" schon anderweitig beschlagnahmt worden, so dürfen wir hier nur von „Stellen" der Matrix reden. Die mit 1 besetzten Stellen können auch als *„Augen"* an die Gitterpunkte karrirten Papieres gesetzt, oder als *Punkte* eingetragen, die mit Nullen besetzt zu denkenden dann einfach

unbesetzt, *leer* gelassen werden, woraus erhellt, dass bei kontinuirlichem (linearen) Denkbereiche 1^1 sich jede *Figur* in der Ebene auffassen lässt als die Matrix eines durch sie bestimmten binären Relatives, und dass die Theorie der Relative durchaus einer geometrischen Deutung fähig.

Die Relativkoeffizienten a_{ij} lassen nun aber auch eine Deutung als wirkliche Aussagen zu, und zwar ist a_{ij} äquivalent mit:

$$(a_{ij} = 1), = (i \text{ ist ein } a \text{ von } j).$$

Und praktisch wird der Leser am schnellsten sich einen richtigen Begriff von einem binären Relativ verschaffen, wenn er sich nun ein wenig in den Anblick der folgenden Figur vertieft, durch welche ich für den Denkbereich der natürlichen Zahlen die Matrix des Relativs „Teiler von -“ dargestel t habe.

Behufs Konstruktion dieser Matrix hat man sich an jedem Gitterpunkte die Frage vorzulegen: ist die Zahl i, welche die Zeile markirt, Teiler von der Zahl j, welche die Kolonne markirt? — um im Bejahungsfalle ein Auge einzutragen. Umgekehrt gibt das konstruirte (oder spezifizirte) Relativ die Antwort auf die Doppelfrage: Wer ist Teiler von wem?? und veranschaulicht den Umfang des (relativen) Begriffes „Teiler von -“ im Gebiet der natürlichen Zahlen. Mein Buch bringt auch die Matrix des Relativs „relativ prim zu -“.

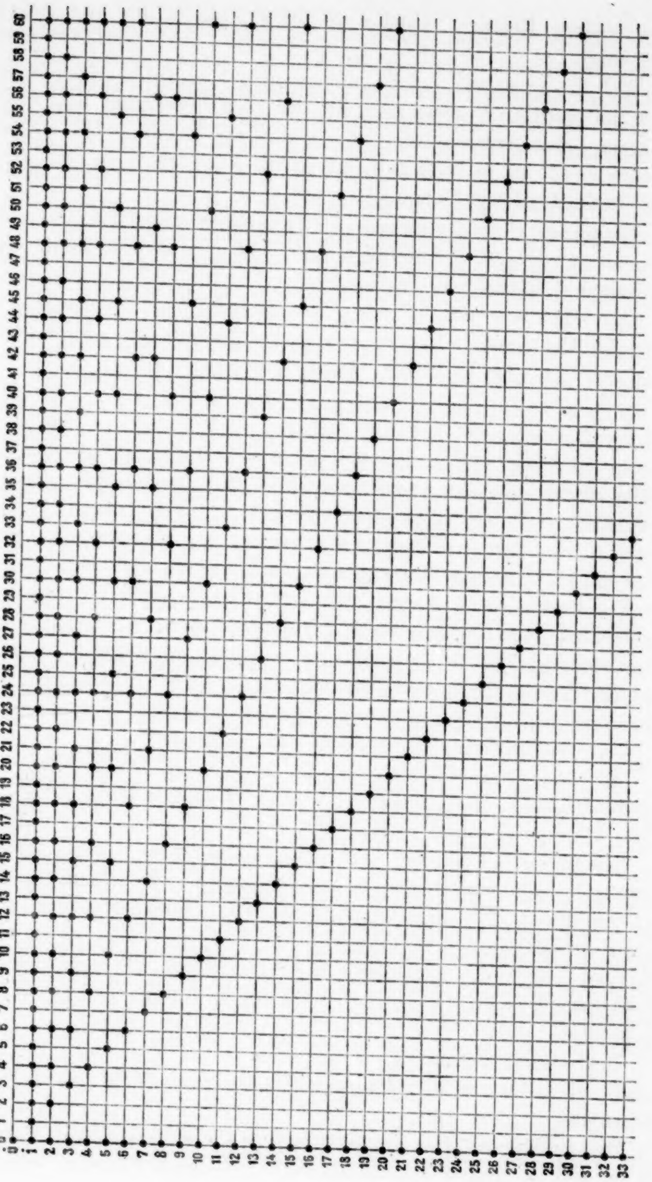
Die Festsetzungen (6) bis (9) erklären nun die sechs Symbole $1, 0, 1', 0', i$ und $i:j$ als binäre Relative mittelst Angabe ihrer allgemeinen Koeffizienten.

Die Matrix von 1 ($= 1^2$) trägt an jeder Stelle ein Auge, die von 0 an keiner. 1 und 0 heissen die absoluten Moduln, und sind cum grano salis als „etwas“ (eine Kategorie, worunter *alles* fällt) und „nichts“ zu deuten. Von den relativen Moduln 1' und 0' hat erstrer nur die Hauptdiagonale, letztrer alles ausser dieser mit Augen besetzt und ist jener als „einerlei mit -“ (oder „selbst“) dieser als „verschieden von -“ (other than) deutbar.

Das Element i des ersten Denkbereiches als binäres Relativ im zweiten 1^2 dargestellt hat in der mit i markirten Zeile alle Gitterpunkte mit Augen vollbesetzt, sonst aber lauter Leerstellen; es ist ein *Einzeiler* (= sonst leerer Einvollzeiler) oder die *„konstante* Funktion“, präsentirt sich bei kontinuirlichem Denkbereiche geometrisch (siehe oben) als eine zur x Axe parallele Gerade.

Das „individuelle“ binäre Relativ $i:j$ ist ein *Punkt* $(x = j, y = i)$, seine Matrix das *Einauge*.

... Für den Denkbereich 1^1 der [reellen] Zahlen [z. B.] deckt sich der Begriff der mathematischen *Funktion* von (*einem* Argumente — in seiner strengsten Fassung: als einer durchaus eindeutigen) mit demjenigen



eines binären Relativs, welches in jeder Kolonne ein und nur ein Auge trägt.

Und die (eventuell auch „unbegrenzte“) mathematische *Substitution* fällt begrifflich zusammen mit der auch umkehrbar eindeutigen Funktion (*eines* Argumentes), ist ein binäres Relativ, das in jeder Kolonne sowol als in jeder Zeile nur je ein Auge trägt; sie ist „Funktion“ und „Argument“ zugleich.

Die Substitutionen gleichwie die Funktionen also fallen unter den allgemeineren Begriff der Relative und werden in deren Theorie einer gemeinsamen Behandlung zugänglich.

Für einen aus den Personen der menschlichen Gesellschaft bestehenden Denkbereich 1^1 wird das binäre Relativ $c =$ „Kind von -“ (child of -) in jeder Zeile zwei Augen aufweisen. Etc. . . .

Die Formeln (10) bis (12) definiren im Hinblick auf das zu (5) gesagte die *sechs* (vollkommen eindeutigen) Grundrechnungsarten oder *Spezies* unsrer Disziplin. Diese zerfallen in zwei Hauptstufen; die erste durch (10), (11) hier eingeführt, umfasst die aus dem identischen Kalkul wohlbekannten 3 Spezies der (*identischen*) *Multiplikation*, *Addition* und der *Negation*: ab enthält ausschliesslich die den Relativen a und b gemeinsamen Augen, das identische Produkt (Dedekind's „Gemeinheit“) ist der *Schnitt* der Figuren von a und b, wogegen $a+b$ alle Augen enthält, die dem a oder auch dem b angehören; das Negat $\bar{a}$ ist die Aussenfigur von a, und wenn $a =$ amans $=$ Liebender von - bedeutet, als „Nichtliebender von -“ zu interpretiren.

Die Gesetze dieser Operationen sind bekannt.

(12) und (13) definiren, als die der zweiten Hauptstufe, die 3 relativen Spezies, als da sind: die *relative Multiplikation* oder Komposition, die *relative Addition* und die *Konversion*.

Bedeutet $a =$ Liebender von -, $b =$ benefactor $=$ Wohlthäter von -, so stellt das relative Produkt „$a;b$“ den Begriff nach seinem Umfange dar: Liebender *von* einem Wohlthäter von -, und wird darum als „a von b“ gelesen.

Sind ferner die Relative $a = f$ (von einem x) und $b = \varphi(x)$ „Funktionen“, so ist $a;b = f\{\varphi(x)\}$ die aus beiden „zusammengesetzte“ Funktion.

Die relative Summe $a \dagger b$ (ich lese: a piu b) ist für das erste Paradigma zu deuten als: Liebender *von* jedenfalls *allen ausser* Wohlthätern von -.

Die Matrix des Relativs $a;b$ resp. $a \dagger b$ wird aus den Matrizes von a und b gemäss den Schemata (12) durch Prozesse erhalten,

die an die zeilen-kolonnen-weise Multiplikation der Determinanten erinnern.

Das Konverse von a ($\breve{a} = a$-konvers) stellt, für $a =$ Liebender von-, den Begriff vor: Geliebter von-. Die Konversion verwandelt $c =$ Kind von- in $\breve{c} =$ Elter von-, verwandelt Ursache in Wirkung etc. Die Matrix von $\breve{a}$ wird aus der von a einfach durch Umklappen um die Hauptdiagonale erhalten.

Wie man sieht, sind viere von den 6 Spezies knüpfende Operationen, die beiden Negation und Konversion aber als nicht-knüpfende bereits an *einem* Argument vollziehbar.

Die knüpfenden vier Spezies sind *assoziative*, jedoch die beiden relativen nicht kommutative Operationen.

Unsre Disziplin hat auch mit (natürlichen) *Potenzen* zu thun. Da der Tautologiegesetze $aa = a$ (und $a + a = a$) halber ein identisches Produkt aus gleichen Faktoren nicht vorkommen kann, so haben wir unter einer Potenz hier immer ein relatives Produkt aus gleichen Faktoren zu verstehen, z. B. $a^3 = (a;)^3 = a;a;a$. —

Die Festsetzung (14) führt den Begriff der Einordnung (Subsumtion) zwischen Relativen zurück auf den durch (2) festgelegten zwischen ihren gleichstelligen Koeffizienten.

Die (15) endlich definirt — in Erweiterung von (10) — das Π und die Σ von Relativen.

Soviel über die Grundlagen unsrer Disziplin. Inbezug auf deren bemerkenswerteste Eigentümlichkeiten legt mir der Charakter dieser Mitteilung als einer Note natürlich grosse Beschränkung auf: ich muss mich hier begnügen ohne Begründung nur wenige Angaben zu machen.

Nach Sätzen, wie $\overline{a;b} = \bar{a} \dagger \bar{b}$, $\overset{\smile}{a;b} = \breve{b};\breve{a}$, lassen die Operationen der Negation und Konversion sich an jedem zusammengesetzten Ausdruck, „ausführen", und wie doppeltes Negiren, so hebt auch doppeltes Konvertiren sich auf, die Reihenfolge aber von Negation und Konversion ist gleichgültig.

Die Disziplin gebietet über zwei Prinzipien zur Vervielfältigung (Verdoppelung) ihrer Formeln und Sätze: *Dualismus* und *Konjugation*, jener auf beiderseitigem Negiren (Kontraposition), diese auf beiderseitigem Konvertiren wesentlich beruhend. Die Formeln treten deshalb zumeist in „Gespannen" von je vieren auf. Als Beispiel seien die angeführt, welche für die relativen Knüpfungen den Sätzen $(a - b) + b = a$, $\frac{a}{b} b = a$ der Arithmetik am nächsten entsprechen:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} (a;b \dagger \breve{\bar{b}});b = a;b & (a \dagger b);\breve{\bar{b}} \dagger b = a \dagger b \\ a;(\breve{\bar{a}} \dagger a;b) = a;b & a \dagger \breve{\bar{a}};(a \dagger b) = a \dagger b. \end{array} \right.$$

Nicht nur geht daraus eine wunderbare Symmetrie der Disziplin hervor, sondern es reduzirt sich auch die Beweisarbeit für alle Formeln auf nahe ihren vierten Teil. —

Der Doppelpunkt, mit welchem zuerst die Elementepaare $i:j$ dargestellt worden, wird durch die 6 Spezies entbehrlich, indem:

2) $$i:j = i\breve{j} = i;\breve{j}.$$

Ferner gilt die Aussagenäquivalenz:

3) $$(a_{ij} = 1) = (i \Subset a;j) = (j \Subset \breve{a};i) = (i:j \Subset a),$$

ja es lässt sich der allgemeine Relativkoeffizient selbst als ein binäres Relativ darstellen in der Gestalt:

4) $$a_{ij} = \breve{i};a;j,$$

sodass die Theorie der binären Relative sich *rein* als eine solche darstellen lässt, welche nur mit diesen und den 6 Spezies operirt.

Als „Element" i des ersten Denkbereichs kann ein binäres Relativ x charakterisirt werden durch eine jede der drei äquivalenten Forderungen:

5) $$(1' \dagger \bar{x};1 = x) = (1' \dagger \bar{x} \dagger 0 = x) = \{(1' \dagger \bar{x});1 = x\}$$

und als Elementepaar oder Punkt $i:j$ durch diese:

6) $$1' \dagger \bar{x} \dagger 1' = x;1 + 1;x$$

was beides sich mit meiner Individuumsdefinition (Bd. 2, S. 325) in Zusammenhang bringen lässt.

Eine Gleichung:

7) $$(x;1 = x), = (x \dagger 0 = x)$$

charakterisirt das Relativ x als ein *„System"* (Gebiet, Klasse) im Dedekind'schen Sinne, dazu

8) $$x;1;x = x \qquad | \qquad x \dagger 0 \dagger x = x$$

charakterisirt x als eines der wichtigen „*Quader*relative", deren Augen resp. Lücken (d. i. Leerstellen) immer nur in Quadern stehen.

Als *„Bild* von-", oder *Funktion* wird x charakterisirt durch die Doppelsubsumtion:

9) $$x;\breve{x} \Subset 1' \Subset \breve{x};x$$

und als *Substitution* durch die Doppelgleichung:

10) $$x;\breve{x} = 1' = \breve{x};x.$$

Es gilt der bemerkenswerte Satz, dass jede Substitution *zugleich* die *identische Summe* ist ihrer Cyklen und das *relative Produkt* der

zugehörigen Zirkular*substitutionen* — unter einem „Cyklus“ der dritten Ordnung (z. B.) ein Relativ der Form $A:B+B:C+C:A$ verstanden, und ein jedes von der Substitution nicht versetzte Element als „Cyklus erster Ordnung“ der Form $D:D$ miteingerechnet. Die Cyklen aus denen eine Substitution „besteht“ sind bekanntlich „elementefremde“, d. h. solche die kein kombinatorisches Element gemein haben. Der relative Modul 1' ist die „identische Substitution“ und muss die eigentliche Multiplikation der Substitutionen als eine relative, d. i. als deren Komposition aufgefasst werden.

Durch die Forderung $x;x \Subset x$ würde x als ein *transitives* Relativ charakterisirt, wie es beispielsweise das durch unsre Figur veranschaulichte $x=$ „Teiler von-“ ist, für das sogar $x;x=x$ sein muss. U. a. m.

Die Theorie gibt auch die besten Anhaltspunkte für eine rationelle *Klassifikation der Relative*, wie sie neuerdings die italienischen Mathematiker De Amicis und Vailati beschäftigt. (Rivista di Mat. 1).

Ein Relativ, welches, wie 4), nur der beiden Werte 0 und 1 fähig ist, nenne ich ein *ausgezeichnetes* Relativ. Ein solches ist z. B. $1;a;1$, indem:

11) $$(a=0)=(1;a;1=0), \quad (a \neq 0)=(1;a;1=1).$$

Peirce hat deren sechse aufgestellt, und mit Hülfe dieser lässt nicht nur jede Ungleichung sich in eine Gleichung umwandeln, sondern überhaupt jeder Komplex von Daten sich *in eine einzige Gleichung* äquivalent zusammenziehen — auch dann, wenn in ihm Alternativen (Summen) von Gleichungen, sowie Systeme (Produkte) von Ungleichungen vorkommen, wo solches im identischen Kalkul nicht mehr möglich war.

Stellt x irgend eines von den unbestimmten Relativen vor, deren ein Komplex von Data Erwähnung thut, so ist demnach die allgemeinste Aufgabe in unserer Theorie diese: einer Forderung

12) $$F(x)=0$$

zu genügen, worin F eine gegebne Relativfunktion, d. i. einen Ausdruck vorstellt, der aus x und andern Relativen lediglich vermittelst der sechs Spezies aufgebaut erscheint.

Bevor zur Auflösung, nach x, der Gleichung geschritten werden kann, muss erst der *Resultante der Elimination* von x aus ihr, durch die übrigen vorkommenden Buchstabenrelative oder „Unbekannten“ genügt werden, und so ist jedes Auflösungsproblem der Theorie mit einem Eliminationsproblem verquickt; beide Probleme aber stellen sich als unabhängig von der Anzahl der zu erfüllenden Forderungen oder Data dar. Ein andrer Gegensatz zur arithmetischen Analysis zeigt

sich darin: Kommt x immer nur in der Verbindung $\varphi(x)$ in unsrer Gleichung vor, so liefert doch die Elimination von x eine andre, nämlich eine viel weitergehende (mehr verlangende) Resultante, als wie die Elimination von $\varphi(x)$ — das y genannt werden konnte!

Die *allgemeine Wurzel* unsrer Gleichung 12) kann — sofern die Resultante erfüllt ist — immer in der Gestalt

$$13)\qquad x = f(u)$$

angegeben werden, worin der „unabhängige Parameter" u ein unbestimmtes oder arbiträres Relativ vorstellt. Die Lösung lässt sich überdies so einrichten, dass sie jede gewünschte Wurzel x bei der Annahme $u = x$ wiedergibt.

Beispielsweise geben die (beiden ersten Inversions-)Theoreme:

$$14)\qquad (x;b \Subset a) = (x \Subset a \dagger \breve{\bar{b}}) = \sum_u \{x = u(a \dagger \breve{\bar{b}})\},$$

$$15)\qquad (a \Subset x;b) = (a \Subset 1;b) \sum_u [x = u + a(\bar{u} \dagger \bar{b});\breve{b}]$$

die allgemeine Lösung der linksseitigen Subsumtion, nebst deren Resultante an, die im ersten Falle auf $0 = 0$ hinausläuft, d. h. gar nicht vorhanden ist.

Die verschiedenen Lösungen x von 15) haben alle das Relativ $a;(\breve{\bar{b}} \dagger 1')\breve{b}$ miteinander gemein, welches jedoch selber im allgemeinen keine Lösung ist.

Soll die Gleichung $x;b = a$ erfüllt werden, so muss erstens als Resultante die Relation $a = (a \dagger \breve{\bar{b}});b$ bestehen, d. h. a von der Form $c;b$ sein und zweitens ist darnach die allgemeine Wurzel dieses „dritten Inversionsproblems":

$$16)\qquad x = c\,[u + a\{(\bar{u} + \bar{c}) \dagger \bar{b}\};\breve{b}].$$

Erstaunlich ist, *wie* schwierige Probleme bereits in drei Buchstaben in unsrer Theorie gestellt werden können. Zu den schwersten unter den einfachsten gehören die beiden Aufgaben: aus der Subsumtion $a \Subset x;\bar{x}$, resp. aus der Gleichung $x;x = a$, das x zu eliminiren, hernach zu berechnen. —

In Analogie zu den „integrirenden" gibt es in unsrer Theorie *„solvirende" Faktoren* So z. B. wird die Gleichung:

$$17)\qquad ax\breve{x} + bx\breve{\bar{x}} + c\bar{x}\breve{x} + d\bar{x}\breve{\bar{x}} = 0$$

(erst) durch Multiplikation mit

$$18)\qquad \mu = \bar{a}\breve{\bar{a}} + 0'(\bar{b}\breve{\bar{c}} + \breve{\bar{b}}\bar{c}) + \bar{d}\breve{\bar{d}}$$

zu einer nach x auflösbaren, und sie war es von vornherein nur dann, wenn diese Multiplikation nichts ändert, d. h. wenn zwischen den Polynomkoeffizienten die Relation besteht:

$$a + b + c + d \mathrel{=\!\!\!\in} \mu$$

— welcher Resultante man auch die handlichere Form geben kann:

19) $$[\bar{\mu} =]\,(a + \breve{a})\{1' + (b + \breve{c})(\breve{b} + c)\}(d + \breve{d}) = 0. \text{ —}$$

Für eine grosse Klasse von Auflösungsproblemen lässt sich die allgemeine Wurzel ermitteln in Gestalt der *unbegrenzt iterirten* Funktion $f^{\infty}(u)$ eines $f(u)$, wobei in etwa der Hälfte der einfachsten Fälle jene mit dieser selbst zusammenfällt, somit die Lösung in geschlossener Form auftritt.

Es sind z. B. alle transitiven Relative x in Gestalt von

20) $$x = (u \mathbin{ɟ} \breve{\bar{u}})\,u\,(\breve{\bar{u}} \mathbin{ɟ} u)$$

mit einem Schlage und in geschlossener Form angebbar, wobei noch von den drei Faktoren rechts der erste oder letzte unterdrückbar wäre — wenngleich nicht ohne Änderung des Wertes, der aber immer ein transitives Relativ bleibt. Ein gleiches ist jedoch auch in Gestalt einer unbegrenzten Entwickelung möglich:

21) $$x = u_{00}, = u + u^2 + u^3 + u^4 + \cdots = (1' + u)^{\infty} ; u. \text{ —}$$

Es ist ferner x oder

22) $$f = u(1' \mathbin{ɟ} \bar{u}) + \{0 \mathbin{ɟ} (\bar{u} + 0' ; u)\}1'$$

die allgemeine Lösung von 9) und somit der pasigraphische Name für „Funktion von-“ (scilicet: *einem* Argumente) — in welchem sich jeder Satz, der von *allen* Funktionen (*eines* Argumentes) gilt, als eine blosse Identität in der Algebra der binären Relative nachrechnen liesse (Es kommen in ihm nicht mehr Relativsymbole als im Worte Buchstaben vor). —

Von grossem Belang für unsre Disziplin ist die Frage der Konvergenz unendlicher Entwickelungen in ihr. Sie weist auch konvergente Reihen mit divergentem allgemeinem Gliede auf; doch findet Divergenz immer nur oszillatorisch statt. —

Ein schwieriges (Summations-) Problem konnte nur dadurch zur Lösung gebracht werden, dass Verf. mit „unendlich vielfachen“ Produkten operirte, deren Π-Zeichen eventuell sogar ein Kontinuum bilden — sodass etwa jedem Punkte einer Geraden ein Π mit einem eigens benannten laufenden Zeiger entspricht. . .

Ich gestatte mir, meine Mitteilung mit einigen Angaben über Herrn Dedekind's *Theorie der Ketten* zu beschliessen, bezüglich deren

ich bei der Beachtung, welche dessen Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“ (2. Aufl., Braunschweig 1893) gebührendermassen in weitesten Kreisen gefunden hat, des Interesses der Mathematiker sicher zu sein glaube. Ich citire dessen Sätze mit D und ihrer Chiffre.

Vorweg muss auf eine kleine Abweichung in der Terminologie aufmerksam gemacht werden. Dedekind's Ausdruck „Kette von b (inbezug auf a)“, worin b ein System und a das Prinzip einer eindeutigen Abbildung vorstellt, wird hier durch $a_0 ; b$ dargestellt und die a-Kette von b genannt. Unter der „Kette von a“ oder a-Kette a_0 verstehe ich demnach etwas anderes als Herr Dedekind. Analog heisst dessen Kettenbild oder Bildkette von b (inbezug auf a) hier $a_{00} ; b$, auch sage ich für „Bild von b (inbezug auf a)“, d. i. Dedekind's b', hier: das a-Bild von b, oder $a ; b$.

Dies vorausgesetzt lässt sich z. B. die Gruppe derjenigen Sätze Dedekind's, welche auf die Begründung des Satzes D 59 der vollständigen Induktion abzielen, im Überblick wie folgt darstellen:

D 22. $(b \mathrel{=\!\!\!<} c) \mathrel{=\!\!\!<} (a;b \mathrel{=\!\!\!<} a;c)$,

D 23. $a;(b+c+\cdots) = a;b+a;c+\cdots$ ‖ D 24. $a;bc\cdots \mathrel{=\!\!\!<} a;b\cdot a;c\cdots$,

D 37. Def. $(a;b \mathrel{=\!\!\!<} b) = (b$ ist *Kette* inbezug auf $a)$, D 38. $a;1 \mathrel{=\!\!\!<} 1$,

D 39. $(a;b \mathrel{=\!\!\!<} b) \mathrel{=\!\!\!<} (a;a;b \mathrel{=\!\!\!<} a;b)$, D 40. $(a;c+b \mathrel{=\!\!\!<} c) \mathrel{=\!\!\!<} (a;b \mathrel{=\!\!\!<} c)$,

D 41. $\{a;(b+c) \mathrel{=\!\!\!<} c\} \mathrel{=\!\!\!<} \sum_u (a;u+b \mathrel{=\!\!\!<} u)(a;u \mathrel{=\!\!\!<} c)$,

D 42. $\left\{\begin{array}{c}(a;b \mathrel{=\!\!\!<} b)(a;c \mathrel{=\!\!\!<} c)\cdots \mathrel{=\!\!\!<} \\ \mathrel{=\!\!\!<} \{a;(b+c+\cdots) \mathrel{=\!\!\!<} b+c+\cdots\} \parallel \mathrel{=\!\!\!<} (a;bc\cdots \mathrel{=\!\!\!<} bc\cdots)\end{array}\right\}$ D 43.

D 44. Def. $a_0;b = \prod_u (u+\overline{a;u+b \mathrel{=\!\!\!<} u})$,

D 45. $b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;b$, D 46. $a;a_0;b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;b$,

D 47. $(a;c+b \mathrel{=\!\!\!<} c) \mathrel{=\!\!\!<} (a_0;b \mathrel{=\!\!\!<} c)$,

D 48. $(a;x+b \mathrel{=\!\!\!<} x) \prod_u \{(a;u+b \mathrel{=\!\!\!<} u) \mathrel{=\!\!\!<} (x \mathrel{=\!\!\!<} u)\} = (x = a_0;b)$,

D 49. $a;b \mathrel{=\!\!\!<} a;a_0;b$, D 50. $a;b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;b$, D 51. $(a;b \mathrel{=\!\!\!<} b) = (a_0;b = b)$,

D 52. $(b \mathrel{=\!\!\!<} c) \mathrel{=\!\!\!<} (b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c)$, D 53. $(b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c) \mathrel{=\!\!\!<} (a_0;b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c)$,

D 54. $(b \mathrel{=\!\!\!<} c) \mathrel{=\!\!\!<} (a_0;b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c)$, D 55. $(b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c) \mathrel{=\!\!\!<} (a;b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c)$,

D 56. $(b \mathrel{=\!\!\!<} a_0;c) \mathrel{=\!\!\!<} (a;a_0;b \mathrel{=\!\!\!<} a;a_0;c)$,

D 57. Satz und Def. $a;a_0;b = a_0;a;b, = a_{00};b$, D 58. $a_0;b = b+a_{00};b$,

D 59 (u. 60). $\{a;(a_0;b)\,c+b \mathrel{=\!\!\!<} c\} \mathrel{=\!\!\!<} (a_0;b \mathrel{=\!\!\!<} c)$

D 61. $a_0;(b+c+\cdots) = a_0;b+a_0;c+\cdots$ ‖ D 62. $a_0;bc\cdots \mathrel{=\!\!\!<} a_0;b\cdot a_0;c\cdots$

Den Satz D 51 gibt Dedekind nur als vorwärtige Aussagensubsumtion.

Ich will hier nicht darauf pochen, dass es unsrer Disziplin gelingt, die Sätze eines solchen Meisters knappster Darstellung dergestalt noch weiter zu komprimiren — obwohl sie dabei ausdrucksvoller werden, nämlich das Abbildungsprinzip a durchweg mit Anführung findet.

Zufolge letztern Umstands wird auch der (Pseudo-) Dualismus vermieden resp. aufgehellt, der bei den durch doppelten Mittelstrich hier getrennten Sätzen bei Dedekind obzuwalten scheint, wo z. B. die D 23, 24 lauten:

$$(b+c+\cdots)' = b'+c'+\cdots \qquad \| \qquad (bc\cdots)' \mathrel{=\!\!\!\in} b'c'\cdots$$

und es befremdlich bleibt dass links Gleichheit, rechts nur Einordnung besteht (die erst bei gegenseitig eindeutiger Zuordnung a in Gleichheit überginge).

Von der Vervielfältigung der Sätze — zu denen wir sogleich auch über die (legitim) dualen, sowie die konjugirten und die konjugirtdualen verfügen — will ich ebenfalls kein Aufhebens machen. Das aber dürfte als ein Gewinn erscheinen: dass die Sätze durch unsre Disziplin eine sehr viel *weitere* Geltung erlangen, indem sie sich nicht nur für eindeutige Abbildungen („Funktionen“) a und „Systeme“ b, c, sondern *für ganz beliebige binäre Relative* a, b, c gültig erweisen.

Die Σ und Π sind vorstehend auch über *alle* binären Relative u erstreckt zu denken. Bei der Definition D 44 der a-Kette von b gibt die als Summand unter dem Negationsstrich beigesetzte Formel blos die Erstreckungsbedingung an für den allgemeinen Faktor u des Πu, indem sie jedes Relativ u, das die Bedingung nicht erfüllt, mit dem Summanden 1 verknüpft und dadurch zu einem belanglosen Faktor stempelt (Solche Erstreckungsbedingung pflegt gemeinhin — ohne Negationsstrich — *unter* das Π zeichen geschrieben zu werden).

Insbesondere ist nun auch der Satz D 59, der die *logische Grundlage des Schlusses der vollständigen Induktion* bildet — und sich wie man sieht mit Aufwand von nur neun Relativsymbolen schreiben lässt — schon als allgemeine Formel für binäre Relative gültig.

Um den Satz ohne Zirkel (d. i. unter Vermeidung jeglichen Schlusses von n auf $n+1$) ganz im Dedekind'schen Sinne zu beweisen, vermag endlich unsre Algebra die ganze Kettentheorie auch wesentlich zu vereinfachen. Dies wird erreicht, indem man erstlich anstatt $a_0 ; b$ vielmehr (durch die für $b = 1'$ in Anspruch zu nehmende D 44) blos a_0 selbst (als ein Πu) definirt, sodann einen von mir aufgestellten Hülfssatz benutzt, welcher lautet:

23) $$(a;b \mathrel{=\!\!\!\in} b) = \{a;(b \mathrel{\dagger} \breve{b}) \mathrel{=\!\!\!\in} b \mathrel{\dagger} \breve{b}\},$$

d. h.: wenn b Kette ist inbezug auf a, so ist auch $b \mathrel{\dagger} \breve{b}$ Kette inbezug auf a, und umgekehrt.

Nachträglich wird dann für a_0 $(= 1' + a_{00})$ die Darstellung:

24) $$a_0 = (1' + a)^\infty$$

gerechtfertigt und verfügbar.

Handelt es sich nun etwa darum, aus den binären Relativen alle diejenigen hervorzuheben, welche (wie a_0) „Ketten" sind, so würden sich dieselben gemäss der Darstellung

25) $$u_0 = 1' + u_{00}, \quad \text{wo} \quad u_{00} = u + u^2 + u^3 + u^4 + \cdots$$

nur äusserst mühsam für andre und andre u berechnen, herstellen lassen. Ein Leichtes wird dies aber, wenn man für u_{00} den nach dem Schema der rechten Seite von 20) gebildeten Ausdruck $v(\bar{\breve{v}} \mathrel{\dagger} v)$ nimmt und diesen, der ja geschlossene Form hat, für andre und andre v evaluirt. —

Schon im Vorstehenden erscheint es wol von Interesse, sei es die Σ nach u, sei es den Schnitt, die Gemeinheit Π nach u aller Relative u ermitteln zu können die einer gegebenen Klasse angehören, aller derer z. B., die einem bestimmten Komplex von Bedingungen Genüge leisten. Solche Aufgabe lässt sich theoretisch wie praktisch stets leicht zurückführen auf das Problem der Ermittelung einer Σ_u, resp. des Π_u eines $f(u)$, denen die „absolute Erstreckung", nämlich über *alle* Relative u des Denkbereiches 1^2, zukommt. Diese Aufgabe aber wird vollends zu einer fundamentalen im Hinblick darauf, dass auf sie das Eliminationsproblem allgemein zurückführbar ist, indem der Ansatz

26) $$\prod_u 1 ; F(u) ; 1 = 0$$

die volle Resultante der Elimination von x aus der Gleichung 12) $F(x) = 0$ vorstellen muss.

Auch zur Evaluation eines solchen $\Pi_u f(u)$ gibt es in unsrer Disziplin Methoden die von allgemeiner Anwendbarkeit sind, wenngleich ihre (auf Grenzwertbestimmung, eine Art von Exhaustionsverfahren hinauslaufende) Anwendung grossen technischen Schwierigkeiten begegnen mag. —

Karlsruhe in Baden, September 1894.

Eine Bemerkung zur Theorie der hypergeometrischen Function.

Von

Frl. M. Winston in Göttingen.

Riemann definirt in seiner grundlegenden Abhandlung verwandte P-Functionen zunächst als solche, deren Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden; — die Exponenten unterliegen dabei nur der Bedingung, dass ihre Summe gleich 1 ist:

$$(1) \qquad \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1$$

und dass keine der Differenzen

$$\pm(\alpha' - \alpha''), \quad \pm(\beta' - \beta''), \quad \pm(\gamma' - \gamma'')$$

eine ganze Zahl sein soll. Inzwischen ist die hiermit gegebene analytische Definition nicht das Wesentliche der Verwandtschaft. Vielmehr ruhen alle folgenden Entwickelungen Riemann's über verwandte Functionen darauf, dass *verwandte Functionen dieselbe Monodromiegruppe haben sollen.* Nun hat Prof. Klein in seiner Vorlesung über die hypergeometrische Function vom Winter 1893—94*) darauf aufmerksam gemacht, dass Letzteres nur im allgemeinen eine Folge der genannten analytischen Definition ist und dass ein besonderer Fall existirt, der eine Ausnahme bildet. Es handelt sich um diejenigen Exponentensysteme, bei denen eine Relation existirt:

$$(2) \qquad \pm(\alpha' - \alpha'') \pm (\beta' - \beta'') \pm (\gamma' - \gamma'') = 2k + 1,$$

unter k eine beliebige ganze Zahl verstanden. Hier werden sich die P-Functionen

$$(3) \qquad P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha' + a' & \beta' + b' & \gamma' + c' & x \\ \alpha'' + a'' & \beta'' + b'' & \gamma'' + c'' & \end{pmatrix}$$

(unter $a', a'', b', b'', c', c''$ ganze Zahlen von der Summe Null verstanden) auf zwei getrennte Schaaren derart vertheilen, dass nur die P-Functionen der einzelnen Schaar mit einander verwandt sind, d. h. dieselbe Monodromiegruppe haben.

Ich habe mich damit beschäftigt, das analytische Kennzeichen dieser beiden Schaaren zu finden und also Riemann's anfängliche analytische Definition der Verwandtschaft so zu vervollständigen, dass sie für alle in die Riemann'sche Abhandlung eingeschlossenen Fälle passt. Mein Resultat ist dieses:

*) Vergl. das Selbstreferat in Bd. 45 dieser Annalen, pag. 151.

Findet eine Relation (2) statt, so zerlegt sich die linke Seite von (1) in zwei ganzzahlige Tripel, sagen wir

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \quad \text{und} \quad \alpha'' + \beta'' + \gamma''.$$

Eines dieser Tripel ist (wegen (1)) nothwendig positiv, das andere Null oder negativ. Wir wollen des bestimmteren Ausdrucks wegen das Tripel $(\alpha' + \beta' + \gamma')$ als positiv voraussetzen. *Die Functionen* (3) *werden nun mit der gegebenen P-Function dann und nur dann verwandt sein, wenn das entsprechende Tripel*

$$\alpha' + a' + \beta' + b' + \gamma' + c'$$

gleichfalls positiv ist.

Der Beweis ist sehr einfach. Es genügt, die zu den singulären Punkten 0, ∞, 1 gehörigen Fundamentalzweige der P-Function in Gestalt hypergeometrischer Reihen aufzustellen und dann den Vergleich zu machen. Beispielsweise haben wir bei $x = 0$:

$$P^{(\alpha')} = x^{\alpha'} \cdot (1-x)^{\gamma'} \cdot F(\alpha' + \beta' + \gamma',\ \alpha' + \beta'' + \gamma',\ 1 + \alpha' - \alpha'',\ x),$$
$$P^{(\alpha'')} = x^{\alpha''} \cdot (1-x)^{\gamma''} \cdot F(\alpha'' + \beta' + \gamma'',\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'',\ 1 + \alpha'' - \alpha',\ x)$$

und hier sieht man sofort, dass die eine oder andere der auftretenden F-Reihen abbricht (und also eine rationale ganze Function von x darstellt), jenachdem

$$(\alpha' + \beta' + \gamma') \quad \text{oder} \quad (\alpha'' + \beta'' + \gamma'')$$

Null oder eine negative ganze Zahl ist. Dies ist das Wesentliche. Auf weitere Einzelheiten gehe ich hier nicht ein.

Göttingen im Oktober 1894.

Berichtigungen zum 45. Bande.

S. 598 Z. 11 v. u. statt $\left(P : \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i\varkappa}}}{\Delta}\right)$ lies $\left(P \cdot \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i\varkappa}}}{\Delta}\right)$

S. 599 Z. 3 v. o. statt $p_1(r)$ und $p_2(r)$ lies $p_1(z)$ und $p_2(z)$

„ Z. 4 v. o. statt r lies z.

Berichtigungen zum 46. Bande.

S. 9 Anm. lies: § 3 statt § 6.

S. 15 Anm. lies: 12 u. 13 statt 27 u. 28.

S. 23 Z. 12 v. o. lies: $a_4(x+1)^3 + a_5(y+1)^3$.

S. 24 Z. 3 v. u. ist das Zeichen — zu streichen.

S. 47 Z. 9 und 11 v. o. statt Seite 7 lies Seite 37.

S. 55 Z. 5 und 13 v. u. statt Seite 17 bez. Seite 16 lies Seite 37 bez. Seite 36.

Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires*).

Par

M. Émile Picard à Paris.

«J'ai montré autrefois (*Comptes rendus*, 1883, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1887) comment on pouvait étendre aux équations différentielles linéaires la théorie célèbre de Galois relative aux équations algébriques. J'ai appelé l'attention sur la notion du *groupe de transformations* d'une équation linéaire; la proposition fondamentale à ce sujet consiste en un théorème et sa réciproque, celle-ci étant énoncée dans mon Mémoire avec une restriction inutile. Ces questions ont été approfondies récemment par M. Vessiot dans une Thèse extrêmement remarquable; mais M. Vessiot se place dans son travail à un tout autre point de vue que moi, et la marche que j'ai suivie pour poser les bases de cette théorie, marche qui se rapproche beaucoup de celle de Galois pour les équations algébriques, me parait à divers égards préférable. Je crois donc utile de reprendre complètement la question en comblant la légère lacune que j'avais laissée subsister dans la réciproque du théorème fondamental.

» 1. Plaçons-nous d'abord dans le cas, le plus simple et le plus intéressant sans doute pour les applications, d'une équation linéaire à coefficients rationnels. Soit donc

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1}$$

une telle équation, où nous supposons que les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, et soit $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales.

*) Aus den Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 119, Sitzung vom 8. Oktober 1894.

» J'envisage l'expression suivante

$$V = A_{11} y_1 + \cdots + A_{1m} y_m + A_{21} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + A_{2m} \frac{dy_m}{dx} + \cdots + A_{mm} \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}},$$

qui est, comme on voit, une expression linéaire et homogène par rapport aux y et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. Les coefficients A sont des fonctions rationnelles de x arbitrairement choisies. Cette fonction V satisfait à une équation linéaire d'ordre m^2 facile à former: désignons-la par

$$\frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}} + P_1 \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}} + \cdots + P_{m^2} V = 0. \tag{2}$$

On a, d'ailleurs, en différentiant V un nombre de fois égal à m^2-1, m^2 équations du premier degrè par rapport aux y et leurs dérivées, qui donnent

$$y_1 = \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},$$

$$y_2 = \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \beta_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \lambda_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},$$

où les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont rationnelles en x.

» A toute intégrale de l'équation (2) correspond un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de l'équation (1); ce système pourrait n'être pas fondamental. Cela arriverait si le déterminant des y et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ était nul; en écrivant ceci, on obtiendra une certaine équation en V,

$$\varphi\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \cdots; \frac{d^k V}{dx^k}\right) = 0, \tag{3}$$

k étant au plus égal à m^2-1.

» On aura donc un système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ si l'on prend pour V une intégrale de l'équation (2) ne satisfaisant pas à l'équation (3).

» Ceci posé, il arrivera en général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, que l'équation (2) n'aura aucune solution commune avec une équation différentielle (linéaire ou non linéaire) à coefficients rationnels, d'ordre inférieur à m^2, si l'on fait abstraction des solutions qui satisfont à l'équation (3). Mais il pourra, dans certains cas, en être autrement; supposons donc que l'équation différentielle d'ordre p

$$f\left(x,\, V,\, \frac{dV}{dx},\, \dots,\, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0 \tag{4}$$

(f étant un polynome) remplisse cette condition. Je suppose, de plus, l'équation précédente *irréductible*, c'est-à-dire n'ayant aucune solution commune avec une équation de même forme et d'ordre moindre; dans ces conditions *toutes* les fonctions V satisfaisant à l'équation (4) satisferont à l'équation (2), et, de plus, l'équation (4) n'aura avec l'équation (3) *aucune* solution commune; par suite à chaque solution de $f = 0$ correspond un système fondamental d'intégrales pour l'équation linéaire proposée.

» Soit donc $y_1, \dots, y_m$ le système fondamental correspondant a une certaine solution de l'équation $f = 0$ et $Y_1, \dots, Y_m$ le système correspondant à une solution quelconque de la même équation; on aura

$$(S)\qquad \begin{cases} Y_1 = a_{11}\, y_1 + \dots + a_{1m}\, y_m, \\ Y_2 = a_{21}\, y_1 + \dots + a_{2m}\, y_m, \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_m = a_{m1}\, y_1 + \dots + a_{mm}\, y_m. \end{cases}$$

Les coefficients a dépendent seulement de p paramètres arbitraires, et l'on voit très facilement qu'on peut les considérer comme des fonctions algébriques de ces paramètres; de plus, ces substitutions forment un *groupe*. Je désigne par G le groupe continu et algébrique de transformations linéaires défini par les équations (S), et je l'appelle le *groupe de transformations* relatif à l'équation linéaire (1).

» 2. On peut établir, à l'égard de ce groupe, la proposition suivante qui rappelle le théorème fondamental de Galois dans la théorie des équations algébriques:

» *Toute fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \dots, y_m$ et de leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \dots, y_m$ les substitutions du groupe G.*

» Considérons en effet une telle fonction; en y remplaçant $y_1, y_2, \dots, y_m$ par leur valeur en fonction de V, et égalant à une fonction rationnelle, on aura

$$F\left(x,\, V,\, \frac{dV}{dx},\, \dots,\, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = R(x),$$

F et R étant rationnelles. Or cette équation se trouvera vérifiée pour une certaine solution V de $f = 0$; elle le sera par suite pour toutes les solutions d'après l'irréductibilité de cette dernière équation. Ceci revient à dire que la fonction rationnelle considérée ne change pas quand on effectue sur $y_1, y_2, \dots, y_m$ la substitution S.

» 3. Ce qui précède reproduit ce que j'avais déjà dit antérieurement. Arrivons maintenant au théorème réciproque. Nous allons montrer que:

» *Toute fonction rationnelle de x, y_1, y_2, . . ., y_m et leurs dérivées qui reste invariable par les substitutions du groupe G est une fonction rationnelle de x.*

» Je ne l'ai démontré (*Annales de Toulouse*, t. I, p. 5) que si l'équation linéaire proposée a son intégrale régulière dans le voisinage de chaque point singulier (pour les autres cas, j'énonçais fonction *uniforme* de x au lieu de fonction *rationnelle* de x). Cette restriction est inutile, et nous allons facilement démontrer le théorème. Soit $\Phi(x, y_1, \ldots, y_m, \ldots)$ une fonction satisfaisant aux conditions de l'enoncé; il faut montrer que, si l'on met à la place de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un certain système fondamental, la fonction Φ sera une fonction rationnelle de x. Or remplaçons les y et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de V, nous aurons

$$\Phi = F\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right).$$

» Je dis que, si l'on prend pour V une intégrale quelconque de (4), cette expression sera une fonction rationnelle de x. Remarquons d'abord que, d'après l'hypothèse faite sur Φ, la fonction $F(x, V, \ldots)$ représentera la même fonction de x, quelle que soit la fonction V satisfaisant à l'équation (4). Or soit μ le degré en $\frac{d^p V}{dx^p}$ de cette dernière équation; pour des valeurs arbitraires données à

$$x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1} V}{dx^{p-1}},$$

l'équation $f = 0$ a μ racines distinctes. En se servant de l'équation (4), on peut supposer que dans F la dérivée d'ordre p de V ne figure qu'au degré $\mu - 1$ au plus. Cette substitution faite, F devient une function

$$F_1\left(x, V, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right),$$

rationnelle par rapport aux lettres dont elle dépend et contenant $\frac{d^p V}{dx^p}$ à la puissance $\mu - 1$ au plus dans son numérateur et son dénominateur. Comme, pour une valeur donnée de x, la fonction F_1 prend la même valeur pour toutes les valeurs de $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}$ satisfaisant à la relation

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0,$$

qui est irréductible et de degré μ en $\dfrac{d^p V}{dx^p}$, il faut que F_1 ne dépende que de x. *La fonction Φ est donc une fonction rationnelle de x*, comme nous voulions l'établir.

» On remarquera que, dans les démonstrations précédentes, on ne considère pas les fonctions rationnelles de x, y_1, y_2, ..., y_m et leurs dérivées comme contenant des fonctions indéterminées y_1, ..., y_m, mais on doit toujours entendre que $y_1, y_2, \ldots, y_m$ représente un certain système fondamental de l'équation linéaire proposée.

» 4. Nous nous sommes placé dans le cas le plus simple. Pour avoir la théorie dans toute sa généralité, on peut supposer que les coefficients $p_1, \ldots, p_m$ de l'équation linéaire sont des fonctions rationnelles de x et d'un certain nombre de fonctions *adjointes*

$$A(x),\ B(x),\ \ldots,\ L(x)$$

et de leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque. Il n'y a aucune modification essentielle à faire à ce qui précède. Seulement les coefficients de l'équation $f = 0$ ne seront pas nécessairement des fonctions rationnelles de x, mais des fonctions rationnelles de x, de $A, B, \ldots, L$ et de leurs dérivées. On a alors à considérer des fonctions rationnelles de x, de A, B, ..., L et leurs dérivées, de y_1, y_2, ..., y_m et leurs dérivées, et c'est à de telles fonctions que s'appliquent le théorème fondamental et sa réciproque; ceux-ci sont relatifs aux fonctions s'exprimant rationnellement à l'aide de x, de A, ..., L et leurs dérivées.

» 5. Pour achever de poser la notion du groupe de transformations d'une équation linéaire, il faut encore démontrer que la double propriété, dont jouissent les substitutions de ce groupe à l'égard de l'équation proposée, leur appartient exclusivement. Considérons à cet effet, en nous plaçant dans le même cas qu'au n° 1, le premier membre

$$f\left(x,\ V,\ \frac{dV}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^p V}{dx^p}\right),$$

de l'équation (4), où nous supposons d'abord que V soit une solution quelconque de (2).

» En remplaçant V par sa valeur en y_1, y_2, ..., y_m et leurs dérivées, l'expression f deviendra une fonction

$$\Phi(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ \ldots)$$

» Cette fonction est nulle, quand on prend pour y_1, y_2, ..., y_m un système fondamental correspondant à une solution V de l'équation (4). Une substitution Σ' effectuée sur y_1, ..., y_m et qui n'appartient pas au groupe G ne peut laisser à Φ une valeur invariable, car une

telle substitution revenant d'une manière générale à remplacer une solution de l'équation (2) par une autre, soit V par V', on aurait

$$f\left(x, V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^p V'}{dx^p}\right) = 0,$$

et par suite, V' satisfaisant à (4), la substitution Σ' appartiendrait au groupe G, dont les propriétés caractéristiques sont bien mises ainsi en évidence. »

Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen.

Von

C. Runge in Hannover.

Die numerische Berechnung irgend einer Lösung einer gegebenen Differentialgleichung, deren analytische Lösung man nicht kennt, hat, wie es scheint, die Aufmerksamkeit der Mathematiker bisher wenig in Anspruch genommen, wenn man von der Berechnung der speciellen Störungen absieht, wo besondere Umstände die Rechnung auf Quadraturen zurückzuführen erlauben. Es scheint nicht bekannt zu sein, dass sich die Methoden für die numerische Berechnung von Integralen verallgemeinern lassen, so dass sie mit ähnlichem Erfolge auf jede beliebige Differentialgleichung angewendet werden können. Ich habe im Folgenden eine Verallgemeinerung der bekannten Simpson'schen Regel gegeben, deren Anwendung mir besonders brauchbar scheint, womit ich aber nicht sagen will, dass nicht auch die andern Methoden mechanischer Quadratur brauchbare Verallgemeinerungen geben können.

Euler bemerkt in seiner Introductio, dass man eine Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ näherungsweise berechnen könne, indem man ausgehend von einem Werthepaar $x_0 y_0$ zunächst für eine kleine Aenderung Δx von x die zugehörige Aenderung Δy von y gleich $f(x_0 y_0)\Delta x$ nimmt. In dem neuen so gefundenen Punkte $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$ berechnet man von Neuem die einer kleinen Aenderung Δx von x entsprechende Aenderung von y, indem man sie gleich $f(x_1 y_1)\Delta x$ setzt. Indem man so fortfährt, erhält man eine gebrochene Linie, die beliebig genau mit einer Lösung der Differentialgleichung übereinstimmt, wenn nur die einzelnen Aenderungen von x und y hinreichend klein sind. Es hat später Cauchy hierfür den strengen Beweis geliefert unter gewissen Voraussetzungen, auf die ich hier nicht näher eingehen will. Dieses Euler'sche Verfahren besitzt nur einen geringen Grad von Genauigkeit, wie man sofort einsieht, wenn man es auf die Berechnung eines Integrals $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ anwendet, das ja

auch als die Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ aufgefasst werden kann. Das Euler'sche Verfahren würde nämlich den Näherungswerth

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots$$

ergeben, dessen Abweichung vom wahren Werth, wie man geometrisch unmittelbar erkennt, im Allgemeinen eine Grösse derselben Ordnung wie die Intervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots$ ist. Viel besser ist bekanntlich der Näherungswerth

$$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)(x_1 - x_0) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_2 - x_1) + \cdots$$

oder auch der Näherungswerth

$$\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \cdots,$$

deren Abweichungen vom wahren Werth von der zweiten Ordnung gegen die Grösse der Intervalle sind. Der erste stellt sich geometrisch als die Summe der Tangententrapeze dar, das heisst, der Trapeze, die oben von der über dem Mittelpunkt des Intervalls berührenden Tangente begrenzt sind. Der zweite Näherungswerth ist die Summe der Sehnentrapeze d. h. der Trapeze, die oben von den zwei benachbarte Punkte verbindenden Sehnen begrenzt sind. Bezeichnet man den ersten Näherungswerth mit N_1, den zweiten mit N_2, so stellt

$$N_1 + \frac{1}{3}(N_2 - N_1)$$

einen noch besseren Näherungswerth dar, dessen geometrische Bedeutung die Summe der Parabelstreifen ist, d. h. Streifen, oben begrenzt von Parabelbögen, die je drei Punkte mit der Curve gemein haben, die drei Punkte, deren Abscissen die beiden Endpunkte und die Mitte des Intervalls sind. Dieser Näherungswerth ist es, den die „Simpson'sche Regel" liefert, und seine Abweichung vom wahren Werth ist von der vierten Ordnung gegen die Grösse der Intervalle.

Eine ähnliche Ueberlegung führt nun auch für die Differentialgleichungen zu einer wesentlichen Verbesserung des Euler'schen Verfahrens. Ich will mich zunächst auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränken.

Statt

(1) $$\Delta y = f(x_0 y_0)\,\Delta x \text{ u. s. w.}$$

ist es schon viel besser wenn man

(2) $$\Delta y = f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y_0 + \tfrac{1}{2} f(x_0 y_0)\,\Delta x\right)\Delta x$$

u. s. w.

setzt. Diese Art der Berechnung entspricht dem aus der Summe der

Tangententrapeze gebildeten Näherungswerthe eines Integrals und deckt sich völlig damit, wenn $f(xy)$ von y unabhängig vorausgesetzt wird.

Oder man kann der Summe der Sehnentrapeze entsprechend setzen:

$$(3) \qquad \Delta y = \frac{f(x_0 y_0) + f\big(x_0 + \Delta x,\ y_0 + f(x_0 y_0)\Delta x\big)}{2} \Delta x$$

u. s. w.

Vergleicht man nämlich den wahren Werth von Δy, den man sich ja in eine nach Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickelt denken kann, mit den von den Näherungsverfahren gelieferten Werthen, die man ebenfalls nach Potenzen von Δx entwickelt, so erkennt man, dass bei dem primitiven von Euler gegebenen Verfahren der Unterschied der beiden Werthe von Δy von der zweiten Ordnung, bei den andern beiden Verfahren dagegen von der dritten Ordnung ist.

Für den wahren Werth von Δy ist nämlich

$$\Delta y = f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2!}$$
$$+ \big(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)\big)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

wo f_1 und f_2 die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von $f(xy)$, $f_{11} f_{12} f_{22}$ diejenigen zweiter Ordnung nach der bekannten Schreibweise bedeuten.

Die Näherungsverfahren dagegen liefern für Δy:

(1) $\quad f\Delta x,$

(2) $\quad f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\frac{\Delta x^3}{8} + \cdots,$

(3) $\quad f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\frac{\Delta x^3}{4} + \cdots,$

Wenn man nach der Analogie der Simpson'schen Regel die letzten beiden Näherungswerthe so combinirt, dass man zu (2) den dritten Theil des Unterschiedes zwischen (2) und (3) addirt, so erhält man den neuen Näherungswerth

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots,$$

der in dem Falle, wo $f(xy)$ von y unabhängig ist, wo also $f_2 = 0$, zwar auch in dem Gliede dritter Ordnung mit dem wahren Werthe übereinstimmt, aber in dem hier betrachteten allgemeinen Falle nicht. Die Analogie der Simpson'schen Regel kann also in dieser Form nicht festgehalten werden. Aber man kann ihr eine andere Form geben. An die Stelle des Näherungswerthes (3) soll ein anderer treten, der ebenfalls in das Sehnentrapez übergeht, wenn $f(xy)$ von y unabhängig ist.

Es sei nämlich der Näherungswerth von Δy gleich

$$\frac{\Delta' y + \Delta''' y}{2},$$

wo $\Delta' y = f(x_0 y_0)\Delta x$ und $\Delta''' y$ mit $\Delta' y$ durch die Gleichungen

$$\Delta'' y = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta' y)\,\Delta x,$$
$$\Delta''' y = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta'' y)\,\Delta x$$

zusammenhängt. Dieser Näherungswerth giebt nach Potenzen von Δx entwickelt, die Reihe

(3a) $$f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2}$$
$$+ \left(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + 2f_2(f_1 + f_2 f)\right)\frac{\Delta x^3}{4} + \cdots.$$

Der Unterschied zwischen (3a) und (2) ist nun

$$\left[\tfrac{1}{8}(f_1 + 2f_{12}f + f_{22}f^2) + \tfrac{1}{2}f_2(f_1 + f_2 f)\right]\Delta x^3 + \cdots.$$

Und wenn man nun den dritten Theil dieses Unterschiedes zu (2) hinzufügt, so erhält man einen neuen Näherungswerth

(4) $$f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2}$$
$$+ \left(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)\right)\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots,$$

der auch in den Gliedern dritter Ordnung noch mit der Entwicklung des wahren Werthes übereinstimmt.

Was sonst noch für die practische Anwendung zu bemerken ist, lässt sich besser an einem Beispiele ausführen.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

gegeben und die Lösung gesucht, die für $x = 0$ $y = 1$ ergiebt. Man kann diese Lösung analytisch angeben. Mit Polarcoordinaten geschrieben wird nämlich die Differentialgleichung die Form erhalten

$$d\varphi = -\frac{dr}{r},$$

woraus, wenn für $r = 1$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sein soll, sich ergiebt

$$r = e^{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Durch diese Formel kann man unser Verfahren controliren.

$$f(xy) = \frac{y-x}{y+x}$$

Dem Tangententrapez entsprechend		Dem Sehnentrapez entsprechend	
x	y	x	y
0	1	0	1
$\Delta x = 0.1$	$f(0, 1)\,\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.2$	$f(0, 1)\,\Delta x = 0.2$
0.1	1.1	0.2	1.2
$\Delta x = 0.2$	$f(0.1, 1.1)\,\Delta x = 0.167$		$f(0.2, 1.2)\,\Delta x = 0.143$
0.2	1.167		1.143
			$f(0.2, 1.143)\,\Delta x = 0.140$

$$\frac{f(0,1) + f(0.2, 1.143)}{2}\,\Delta x = \frac{0.2 + 0.140}{2} = 0.170.$$

Wir erhalten also dem Tangententrapez entsprechend:

$$y = 1.167,$$

dem Sehnentrapez entsprechend:

$$y = 1.170.$$

Ein Drittel der Differenz ist zu dem ersten Werth zu addiren, so dass wir demnach

$$y = 1.168$$

zu setzen haben. Wenn man sich die Reihenfolge der Operationen gemerkt hat, wird man nicht Alles so ausführlich hinzuschreiben brauchen, wie hier geschehen ist. Ich will noch zwei weitere Schritte rechnen, die nunmehr ohne Erläuterung verständlich sein werden

x	y		x	
0.2	1.168		0.2	1.168
0.15	0.106		0.3	0.212
0.35	1.274		0.5	1.380
0.3	0.170			0.140
0.5	1.338	Tangententrapez		1.308
	1.341	Sehnentrapez		0.134
	0.003			0.346
				0.173
				1 341
0.5	1.339		0.5	2.339
0.25	0.114		0.5	0.228
0.75	1.453		1	1.567
0.5	0.160			0.110
1	1.499	Tangententrapez		1.449
	1.499	Sehnentrapez		0.092
				0.320
				0,160
				1.499

Die Schritte sind grösser gemacht als der erste. Die nahe Uebereinstimmung zwischen den beiden Werthen, die dem Tangententrapez und dem Sehnentrapez entsprechen, verbürgt, dass der Fehler nicht wesentlich grösser als die Einheit der dritten Stelle sein wird.

In der That findet man aus der Formel

$$r = e^{\frac{\pi}{2} - \varphi},$$

dass für $x = 1$ y zwischen 1.498 und 1.499 liegt.

Bei allen drei Schritten ist $\frac{dy}{dx} \leq 1$. Darnach ist x als unabhängige Variable gewählt. Wird $\frac{dy}{dx} > 1$ so muss man x und y ihre Rollen vertauschen lassen. Die Genauigkeit des Verfahrens beruht nämlich darauf, dass die Entwicklung von Δy nach Potenzen von Δx convergirt. Nähert man sich nun einer Stelle, wo $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird, so wird die Convergenz schwächer und hört an der Stelle selbst ganz auf. Diese Schwierigkeit wird aber dadurch beseitigt, dass man immer die schneller sich ändernde Coordinate zur Unabhängigen macht.

Das Verfahren lässt sich ohne Schwierigkeit auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden. Ich will es nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinschreiben. Jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung kann man bekanntlich auch als ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben, indem man für die $n-1$ ersten Differentialquotienten besondere Buchstaben schreibt. Ich will mein Verfahren gleich für ein System von simultanen Differentialgleichungen aussprechen, weil dabei seine Symmetrie besser hervortritt. Es sei gegeben

$$\frac{dy}{dx} = f(xyz),$$

$$\frac{dz}{dx} = g(xyz).$$

Wir können dies System als eine Richtungsvorschrift im Raume auffassen, analog der Differentialgleichung erster Ordnung, die als eine Richtungsvorschrift in der Ebene gelten kann, und können nun ähnlich wie oben, von einem Punkte ausgehend, Näherungswerthe berechnen. Nach dem Euler'schen Verfahren würde man setzen

$$\Delta y = f(xyz)\Delta x, \quad \Delta z = g(xyz)\Delta x,$$

wenn x zur unabhängigen Veränderlichen gewählt ist. Dem Tangententrapez entsprechend würde man setzen

$$\Delta y = f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad y + \tfrac{1}{2}f\Delta x, \quad z + \tfrac{1}{2}g\Delta x\right)\Delta x,$$

$$\Delta z = g\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad y + \tfrac{1}{2}f\Delta x, \quad z + \tfrac{1}{2}g\Delta x\right)\Delta x.$$

Und dem Sehnentrapez entsprechend würde man setzen

$$\begin{aligned}
\Delta' y = f(x, y, z)\Delta x, \quad & \Delta'' y = f(x+\Delta x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z)\Delta x, \\
& \Delta''' y = f(x+\Delta x,\ y+\Delta'' y,\ z+\Delta'' z)\Delta x, \\
\Delta' z = g(x, y, z)\Delta x, \quad & \Delta'' z = g(x+\Delta x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z)\Delta x, \\
& \Delta''' z = g(x+\Delta x,\ y+\Delta'' y,\ z+\Delta'' z)\Delta x,
\end{aligned}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta' y + \Delta''' y}{2},$$

$$\Delta z = \frac{\Delta' z + \Delta''' z}{2}.$$

Wenn man diese beiden Systeme von Näherungswerthen nach der Analogie der Simpson'schen Regel combinirt, so lässt sich zeigen, dass die resultirenden Näherungswerthe von Δy und Δz nach Potenzen von Δx entwickelt in den Gliedern erster, zweiter und dritter Ordnung mit den Entwicklungen, der wahren Werthe übereinstimmen. Man kann sich davon durch directe Entwicklung überzeugen. Es ist aber wünschenswerth den Beweis so anzuordnen, dass er sich ohne Schwierigkeit auch für den Fall von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung verallgemeinern lässt.

Es ist

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f + f_1\Delta x + f_2\Delta y + f_3\Delta z \\
+\tfrac{1}{2}(f_{11}\Delta x^2 + f_{22}\Delta y^2 + f_{33}\Delta z^2 + 2f_{12}\Delta x\Delta y \\
+2f_{23}\Delta y\Delta z + 2f_{13}\Delta x\Delta z) + \cdots.
\end{aligned}$$

Wenn man hier für Δy und Δz ihre wahren Werthe, nach Potenzen von Δx entwickelt, einsetzt:

$$\Delta y = f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots,$$

$$\Delta z = g\Delta x + (g_1 + g_2 f + g_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots,$$

so erhält man eine Entwicklung von $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ nach Potenzen von Δx.

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f + (f_1+f_2 f+f_3 g)\Delta x \\
+\tfrac{1}{2}f_2(f_1+f_2 f+f_3 g)\Delta x^2 \\
+\tfrac{1}{2}f_3(g_1+g_2 f+g_3 g)\Delta x^2 \\
+\tfrac{1}{2}(f_{11}+f_{22}f^2+f_{33}g^2+2f_{12}f+2f_{23}fg \\
+2f_{13}g)\Delta x^2 \\
+ \text{Glieder höherer Ordnung.}
\end{aligned}$$

Der Einfachheit wegen mögen U und V für die beiden Ausdrücke

$$U = f_2(f_1 + f_2 f + f_3 g) + f_3(g_1 + g_2 f + g_3 g),$$
$$V = f_{11} + f_{22} f^2 + f_{33} g^2 + 2 f_{12} f + 2 f_{23} f g + 2 f_{13} g$$

geschrieben werden, so dass

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\Delta x + U\frac{\Delta x^2}{2} + V\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots.$$

Wenn man die Entwicklung für den dem Sehnentrapez entsprechenden Näherungswerth machen will, so ist

$$f\frac{\Delta x}{2} + f(x+\Delta x,\ y+\Delta'' y.\ z+\Delta'' z)\frac{\Delta x}{2}$$

zu bilden, wo

$$\Delta'' y = f(x+\Delta x, y+f\Delta x, z+g\Delta x)\Delta x = f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\Delta x^2 + \cdots,$$
$$\Delta'' z = g(x+\Delta x, y+f\Delta x, z+g\Delta x)\Delta x = g\Delta x + (g_1 + g_2 f + g_3 g)\Delta x^2 + \cdots.$$

Folglich ergiebt sich für den Näherungswerth von Δy die Entwicklung

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + U\frac{\Delta x^3}{2} + V\frac{\Delta x^3}{4} + \cdots.$$

Für den Näherungswerth der dem Tangententrapez entspricht, hat man

$$f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{2} f\Delta x,\ z + \tfrac{1}{2} g\Delta x\right)\Delta x$$
$$= f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + V\frac{\Delta x^3}{8} + \cdots,$$

Zieht man diesen von jenem ab, so erhält man

$$U\frac{\Delta x^3}{2} + V\frac{\Delta x^3}{8} + \cdots.$$

Und der dritte Theil dieser Differenz zu dem letzten addirt giebt

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + U\frac{\Delta x^3}{6} + V\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots.$$

Die hingeschriebenen Glieder stimmen sämmtlich mit den entsprechenden Gliedern des wahren Werthes von Δy überein. Denn es ist

$$\Delta y = \int_0^{\Delta x} f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\,\Delta x = f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2}$$
$$+ U\frac{\Delta x^3}{2.3} + V\frac{\Delta x^3}{2.3} + \cdots.$$

Das gleiche gilt von dem Näherungswerth von Δz. Der Beweis ist derselbe, nur dass y und z, so wie f und g ihre Rollen vertauschen.

Zu der practischen Benutzung des Verfahrens ist nur noch zu bemerken, dass man am Besten diejenige Variable zur Unabhängigen macht, von der man die convergentesten Reihenentwicklungen vermuthet. Man wird also im Allgemeinen die unabhängige Variable wechseln, wenn die Differentialquotienten gross werden.

Als Beispiel will ich die Differentialgleichung behandeln, welche die Gestalt eines Tropfens oder einer Blase bestimmt und analytisch bisher nicht hat gelöst werden können.

Es ist hier bekanntlich die mittlere Krümmung eine lineare Function der senkrechten Coordinate. Bei richtiger Annahme der horizontalen Coordinatenebene kann also die mittlere Krümmung der senkrechten Coordinate proportional gesetzt werden. Der Tropfen soll auf einer horizontalen Grundlage ruhen. Er wird dann eine Symmetrieachse besitzen, die zur z-Axe genommen wird mit der positiven Richtung abwärts. Bei einer Blase, die von unten gegen eine horizontale Fläche drückt, wird ebenso die Symmetrieaxe zur z-Axe gemacht aber mit der positiven Richtung nach oben. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$z = \frac{a^2}{2}(K_1 + K_2),$$

wo K_1 und K_2 die beiden Hauptkrümmungen und a eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante (von der Dimension einer Länge) bedeuten. Der eine Hauptkrümmungsradius ist bei einer Rotationsfläche immer gleich der Länge der Normalen zwischen der Fläche und der Rotationsaxe.

Der andere Hauptkrümmungsradius ist gleich dem der Meridiancurve. Bezeichnet r den Abstand eines Punktes von der z-Axe, s die Bogenlänge und φ den Winkel, den die Meridiancurve dort mit der Horizontalebene bildet, so hat man also

$$2z = a^2\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{ds}\right).$$

Statt $\frac{d\varphi}{ds}$ kann man auch schreiben $\frac{d(\sin\varphi)}{dr}$ oder $\frac{d(-\cos\varphi)}{dz}$, da ja $\frac{dr}{ds} = \cos\varphi$ $\frac{dz}{ds} = \sin\varphi$ ist Es lässt sich daher die Differentialgleichung durch eins der beiden folgenden Systeme von simultanen Differentialgleichungen ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \tan\varphi, \\ \frac{d(\sin\varphi)}{dr} &= \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r}, \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \cot\varphi, \\ \frac{d(\cos\varphi)}{dz} &= -\frac{2z}{a^2} + \frac{\sin\varphi}{r}. \end{aligned}\right.$$

Wenn $|\tan\varphi| < 1$ ist, werde ich das erste System, wenn $|\tan\varphi| > 1$, das zweite gebrauchen. Alle Tropfen und Blasen haben in der Rotationsaxe eine horizontale Tangentialebene. Ich beschränke mich daher auf diesen Fall, dass für $r = 0$ auch $\varphi = 0$ ist. Dann folgt für $r = \varphi = 0$, da hier $\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{d(\sin\varphi)}{dr}$ ist, dass $\frac{d(\sin\varphi)}{dr} = \frac{2z}{a^2} - \frac{d(\sin\varphi)}{dr}$, dass mithin die Krümmung in der Rotationsaxe gleich $\frac{z}{a^2}$ ist. Je nach dem für den Werth von z in der Rotationsaxe angenommenen Werthe

erhält man andere und andere Lösungen der Differentialgleichung. Es würde genügen für einen festen Werth von a die Schaar der Lösungen zu berechnen. Denn da a die Dimension einer Länge hat, so würde irgend eine Lösung je nach der Wahl der Längeneinheit jedem beliebigen Werthe von a entsprechen. Es ist daher keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich $a = 1$ annehme.

Sei nun zum Beispiel für $r = 0$ $z = 1$, so würde sich die Rechnung so gestalten:

Dem Tangententrapez entsprechend					Dem Sehnentrapez entsprechend				
r	z	$\sin\varphi$	$\tan\varphi$	$2z - \frac{\sin\varphi}{r}$	r	z	$\sin\varphi$	$\tan\varphi$	$2z - \frac{\sin\varphi}{r}$
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0.1	0	0.1			0.2	0	0.2		
0.1	1	0.1	0.1005	1	0.2	1	0.2	0.2041	1
0.2	0.0201	0.2				0.0408	0.2		
0.2	1.0201	0.2	Tangententrapez			1.0408	0.2	0.2041	1.0816
	1.0204	0.2082	Sehnentrapez			0.0408	0.2163		
Differenz	+0.0003	+0.0082				0.0408	0.4163		
$\frac{1}{3}$ Differenz	+0.0001	+0.0027				0.0204	0.2082		
0.2	1.0202	0.2027	0.2070	1.027	0.2	1.0202	0.2027	0.2070	1.027
0.1	0.0207	0.1027			0.2	0.0414	0.2054		
0.3	1.0409	0.3054	0.3207	1.064	0.4	1.0616	0.4081	0.4470	1.103
0.2	0.0641	0.2128				0.0894	0.2206		
0.4	1.0843	0.4155				1.1096	0.4233	0.4672	1.161
	1.0876	0.4215				0.0934	0.2322		
	33	60				0.1348	0.4376		
	11	20				0.0674	0.2188		
0.4	1.0854	0.4175							

Der nächste Schritt in derselben Weise ausgeführt bringt uns zu den Werthen

r	z	$\sin\varphi$	$\tan\varphi$
0.6	1.2145	0.6614	0.8819

Und da bei dem nächsten Schritt $\tan\varphi$ erheblich grösser als 1 werden würde, so ziehe ich es vor, schon jetzt z zur unabhängigen Veränderlichen zu machen und das zweite System von simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dr}{dz} = \cot\varphi,$$

$$\frac{d(\cos\varphi)}{dz} = -2z + \frac{\sin\varphi}{r}$$

zu Grunde zu legen:

r	z	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cot\varphi$	$-2z+\frac{\sin\varphi}{r}$
0.6	1.2145	0.6614	0.7500	1.134	−1.327
0.0907	0.08		−0.1061		
0.6907	1.2945		0.6439	0.8416	−1.484
0.1348	0.16		−0.2375		
0.7348	1.3745		0.5125		
0.7349			0.5238		
1			113		
0			38		
0.7348	1.3745		0.5163		

r	z	$\cos\varphi$	$\cot\varphi$	$-2z+\frac{\sin\varphi}{r}$
0.6	1.2145	0.7500	1.134	−1.327
0.1815	0.16	−0.2123		
0.7815	1.3745	0.5377	0.6378	−1.669
0.1020		−0.2672		
0.7020		0.4828	0.5513	−1.501
0.0882		−0.2402		
0.2697		−0.4525		
0.1349		−0.2262		

Man kann auch $\cos\varphi$ zur unabhängigen Veränderlichen machen. Dann berechnet man aus der Aenderung von $\cos\varphi$ zuerst die von z und daraus die Aenderung von r. Geht man so zwei Schritte weiter und lässt $\cos\varphi$ beim zweiten Schritt Null werden, so ergiebt sich

r	z	$\cos\varphi$
0.8169	1.6565	0.0000.

Die vierte Decimale ist nicht mehr zuverlässig. Auch habe ich bei der Rechnung mich des Rechenschiebers bedient, wodurch bei der Grösse der Schritte die vierte Stelle fehlerhaft werden kann. Mit halb so grossen Schritten lieferte die Rechnung

r	z	$\cos\varphi$
0.8180	1.6568	0.0000,

woraus ich schliessen zu dürfen glaube, dass für den Rand des Tropfens oder der Blase

$$r = 0.818, \quad z = 1.657$$

mit der Genauigkeit von einer Einheit der dritten Decimalen gesetzt werden kann.

Man kann übrigens auch mathematisch die Genauigkeit

des Verfahrens bestimmen. Ich glaube indessen, dass ein practischer Rechner sich meistens mit der geringeren Sicherheit begnügen wird, die er aus der Uebereinstimmung seiner Resultate für grössere und kleinere Schritte gewinnt.

Die Werthe von $\tan\varphi$ oder $\cot\varphi$, die zu gegebenen Werthen von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ gehören, kann man aus einer Tabelle entnehmen. Ich habe zuerst die Coordinaten- und Tangenten-Tafeln von C. Dittmann benutzt. Sie sind für diesen Zweck nicht besonders geeignet, und ich habe mir deshalb selbst eine kleine Tabelle angelegt, die für die Zahlen $u = 0.001$ bis 0.710 die Werthe von $\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ auf vier Decimalen genau angiebt. Die Tabelle lässt sich auf drei Quartseiten schreiben, aus denen ohne umzublättern sogleich der Werth von $\tan\varphi$ entnommen wird, wenn $\sin\varphi$ gegeben ist, oder von $\cot\varphi$, wenn $\cos\varphi$ gegeben ist.

Potsdam, im September 1894.

Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche.

Nota di

Federigo Enriques a Bologna. *)

1. Lo studio dei sistemi lineari di curve piane ha richiamato molte volte l' attenzione dei geometri; a questo infatti si collegano importanti teorie come la teoria delle trasformazioni cremoniane e dei loro gruppi, quella delle superficie razionali, delle involuzioni ecc.

Appunto dall' uso delle trasformazioni cremoniane e dalla loro decomponibilità in fattori quadratici viene caratterizzata una serie di ricerche inaugurate con un noto procedimento del sig[r] Noether, e proseguite dai sig[i] Bertini, Guccia, Jung, Martinetti,**) le quali ricerche hanno per iscopo di *classificare* i sistemi lineari di curve piane di genere 0, 1, 2, riconducendoli a *tipi* (d' ordine minimo) irriducibili per trasformazioni birazionali del piano. I resultati ottenuti in tal modo si traducono in teoremi di natura proiettiva relativi alle superficie razionali a sezioni di genere 0, 1, 2 e s'incontrano cosi con quelli cui giungevano quasi contemporaneamente i sig[i] Picard***) e Del Pezzo.†) Spetta al sig[r] Segre di aver rilevato in tutta la sua estensione questo fecondo legame per il quale „la geometria proiettiva delle superficie razionali in un S_n equivale alla geometria

---

*) Questo lavoro è un rifacimento di tre note inserite nei Rendiconti del l' Accademia dei Lincei (Decembre 93. Maggio-Giugno 94) con aggiunte tratte anche da recenti lavori del sig[r] Castelnuovo.

**) Noether, „Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen" (Math. Ann. Bd. V). Bertini, „Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano" (Annali di Mat. serie II[a] t. 8). Guccia, „Generalizzazione di un teorema di Noether; Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche" (Circolo di Palermo t. I). Jung (Istituto lombardo, Marzo 87 e Maggio 88, e Annali di Mat. serie II[a] t[i] 15 e 16). Martinetti (Ist. lomb. Marzo 87, e Circolo di Palermo t. I).

***) Cr. J. Bd. C. Cfr. anche Guccia (Circolo di Palermo t. I. 13 Giugno 1886).

†) „Sulle superficie dell' n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni" (Circolo di Palermo t. I).

dei sistemi lineari di curve piane (rappresentativi) rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali del piano"; e poco dopo il sig[r] Castelnuovo ne faceva delle applicazioni allo studio dei sistemi lineari di curve piane iperellittiche e di genere tre*).

2. Volendo iniziare per i sistemi lineari di superficie ricerche analoghe a quelle (di geometria piana) di cui ho parlato, ho fissato la mia attenzione sopra i sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche, e mi sono proposto di classificarli riconducendoli a *tipi* (mediante trasformazioni birazionali dello spazio).

Non potevo qui trarre grandi aiuti dalla teoria delle trasformazioni, nella quale (nonostante i classici lavori dei sig[i] Cremona e Noether) rimangono ancora insoluti capitali problemi; era dunque naturale che cercassi invece un ausilio nello studio proiettivo delle varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni (cogli S_{n-2} in S_n) iperellittiche, escludendo così quei sistemi di superficie (a intersezioni iperellittiche) pei quali il passaggio di una superficie per un punto generico trae il passaggio di essa per altri punti variabili col primo; limitandomi cioè ai sistemi *semplici* per cui ciò non accade.

3. „Classificare dal punto di vista proiettivo le varietà V (di 3 dimensioni appartenenti ad un S_n, $n > 3$) a curve sezioni iperellittiche, e stabilire (ove sia possibile) la loro rappresentazione punto per punto sullo spazio S_3": ecco un problema per un lato più generale di quello proposto (in quanto concerne anche le V non razionali), dalla cui risoluzione dipende la determinazione dei tipi di sistemi semplici di superficie ad intersezioni variabili iperellittiche; infatti due tali

---

*) Cfr. Segre (Circolo Matematico di Palermo t. I) e Castelnuovo (Circolo Matematico di Palermo t. IV. Accad. d. Scienze di Torino, Atti, 1890); nel penultimo lavoro citato trovasi anche una nota del sig[r] Segre contenente più esplicitamente l' osservazione indicata. Cfr. anche Segre „Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito", (Annali di Matematica 1894). Nel cap. I §[i] 3, 4, 6) della citata memoria del sig[r] Segre si troveranno sviluppate molte considerazioni utili per l' intelligenza di questo lavoro. In particolare mi limito a ricordare il seguente principio di frequentissima applicazione. „Dato un sistema lineare ∞^r ($r > 2$) di curve piane (ed analogamente si dica per un sistema di superficie nello spazio ecc.) esiste sempre in S_n una superficie razionale semplice o multipla che può ritenersi *rappresentata* sul piano dal detto sistema (essendo le curve del sistema immagini delle sezioni iperplanari della superficie): la detta superficie è semplice se il passaggio per un punto delle curve del sistema non trae il loro passaggio per altri punti variabili con esso; inoltre essa è *normale* (cioè non proiezione di un altra dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato) se il sistema di curve piane è determinato completamente dai punti base (e viceversa). Una superficie proiezione in uno spazio inferiore di una data superficie normale, viene rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve contenuto in quello rappresentativo della superficie normale ecc."

sistemi saranno o nò trasformabili l' uno nell' altro birazionalmente secondochè sono rappresentativi di varietà V proiettive o nò.

Lo studio delle varietà V è intimamente legato a quello delle superficie sezioni iperplanari di esse; così la questione proposta viene a riannodarsi a quelle relative alle superficie a sezioni iperellittiche (di cui ho fatto cenno). Ma una questione preliminare mi si imponeva innanzi di poter applicare quei resultati relativi a superficie (a sezioni iperellittiche) razionali, la questione cioè di decidere „quando le superficie a sezioni iperellittiche sieno razionali".

Ho potuto risolvere tale questione pel caso generale in cui il genere delle nominate sezioni è > 1, e poco dopo il sig[r] Castelnuovo estendeva (per altra via) il mio resultato alle superficie a sezioni ellittiche, dimodochè resta stabilito che „tutte le superficie non rigate a sezioni iperellittiche di genere $p\,(\geq 0)$ sono razionali".

Il lettore troverà dimostrato questo teorema nel §[0] I del presente lavoro ed in esso troverà pure la classificazione e lo studio delle superficie razionali a sezioni iperellittiche, ellittiche e razionali; resultati noti che vengono qui presentati in una trattazione semplice ed uniforme, atta a servire d'introduzione al successivo studio delle varietà di 3 dimensioni a curve sezioni iperellittiche.*)

Questo studio riempie i 3 §[i] successivi dove si distinguono i 3 casi delle varietà V a curve sezioni razionali, di quelle a curve sezioni ellittiche, e di quelle a curve sezioni iperellittiche di genere $p > 1$. „Tali varietà sono razionali o contengono un fascio (serie semplice ∞^1) di piani, ad eccezione (forse) della varietà cubica di S_4".

Dalla rappresentazione delle V razionali in S_3 scaturiscono tutti i tipi di sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni iperellittiche, ellittiche e razionali; nella enumerazione dei quali manca forse il sistema che eventualmente rappresenta la varietà cubica di S_4 senza punti doppi (ove questa sia razionale): la varietà cubica di S_4 con un punto doppio viene notoriamente rappresentata (per proiezione) dal sistema delle superficie cubiche con sestica base sopra une quadrica.**)

I. Le superficie a sezioni iperellittiche.

4. *Superficie a sezioni razionali.* A base dello studio delle superficie a sezioni razionali o ellittiche, che rientrano come caso particolare

---

*) Nel n[0] 8 (§[0] I) ho creduto far cenno di altri resultati importanti recentemente conseguiti dal sig[r] Castelnuovo relativi alle superficie che contengono un sistema lineare ∞^2 (rete) di curve iperellittiche perchè essi si collegano all' argomento, sebbene non ne comparisca applicazione nel seguito.

**) Cfr. Segre, „Sulla varietà cubica dello spazio a 4 dimensioni ecc." (Accademia di Torino. Memorie 1888).

nella famiglia delle superficie a sezioni iperellittiche, poniamo il seguente *teorema di* Kronecker*):

Una superficie (di S_3) contenente ∞^2 sezioni piane riduttibili è rigata o è la superficie di Steiner (del 4° ordine con 3 rette doppie passanti per un punto triplo).

Da questo teorema segue subito il

Teorema di Picard**). *Una superficie* (di S_3) *a sezioni razionali è una rigata (razionale) o la superficie di* Steiner.

Infatti una superficie a sezioni razionali viene segata secondo una curva riduttibile da ogni piano tangente.

5. *Superficie a sezioni ellittiche.****)

Sia F una superficie d' ordine $n > 3$ (in S_3) le cui sezioni piane generiche sono ellittiche: in ciascun piano generico vi è allora *una* curva C d' ordine $n - 3$ aggiunta alla sezione K di F, la quale non incontra la K fuori dei punti multipli, ciò vale anche per un piano tangente ad F ma segante F secondo una curva irreduttibile, purchè (volendo ancora considerare K come avente il genere *virtuale* 1) si consideri come aggiunta alla K la curva C d' ordine $n - 3$ che ha un punto $(i - 1)$ plo in ogni punto i plo di K tranne nel punto (doppio) di contatto del piano. Ora le ∞^3 curve C o sono le sezioni piane d' una superficie φ_{n-3} d' ordine $n - 3$ (aggiunta ad F) o invadono coi loro punti tutto lo spazio: in quest' ultimo caso (per ogni punto ed in particolare) per un punto O su F vi sono ∞^1 curve C, le quali incontrano in O le corrispondenti sezioni di F; queste debbono dunque essere spezzate, e perciò la F ha ∞^2 sezioni riduttibili, quindi (non essendo la superficie di Steiner la quale ha le sezioni razionali) la F è una rigata ellittica.

Dunque se la F non è rigata le ∞^3 curve C d' ordine $n - 3$ aggiunte alle sezioni piane di F sono le sezioni piane d' una superficie (aggiunta) φ_{n-3}.

Ciò posto si consideri una retta generica r e su questa si fissino $n - 2$ punti $A_1 \ldots A_{n-2}$ di cui A_1 almeno fuori di φ_{n-3}. In un piano

*) La dimostrazione che il Kronecker diede di questo teorema non fu pubblicata; l' illustre geometra si riserbava di ritoccarla quando la morte lo colse. Una dimostrazione del teorema fondata probabilmente su concetti diversi fu data dal sig^r^ Castelnuovo („Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili" Rendic. Accad. d. Lincei Genn 1894). Questi anzi mi prega di aggiungere alle notizie che egli diede sul teorema di Kronecker quella qui contenuta che egli deve alla cortesia del prof. G. Loria.

**) Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales (Crelle J. Bd. C). Cfr. anche Guccia, Circolo di Palermo t. I.

***) Il ragionamento e la conclusione di questo n° sono tolti dalla nota del sig^r^ Castelnuovo „Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche" (Rendic. Acc. dei Lincei, Genn. 1894).

generico per r vi sono ∞^1 curve d' ordine $n-2$ aggiunte alla sezione di F, passanti per $A_1 \ldots A_{n-2}$; si può tra queste fissarne una C' colla condizione che essa sia tangente ad un piano generico α per A_1: allora il luogo delle C', variando il piano per r, è una superficie d' ordine $\geq n-2$. Se però l' ordine di essa superficie superasse $n-2$, ad essa apparterrebbe r e vi sarebbe qualche piano che la toccherebbe secondo r, nel quale piano la C' sarebbe spezzata in r ed in una C (aggiunta d' ordine $n-3$) passante per A_1; ma ciò è assurdo perchè A_1 non appartiene a φ_{n-3}. Si conclude che il luogo della C' è una superficie φ_{n-2} d' ordine $n-2$, aggiunta ad F. E si deduce che esiste (almeno) una superficie irreduttibile φ_{n-2} aggiunta ad F, segante sopra un piano generico (come è un piano per r) una data curva C' d' ordine $n-2$ aggiunta alla sezione di F; ma per questa C' passa ancora la φ_{n-2} composta del piano di C' e della φ_{n-3}, onde per C' passa un fascio di φ_{n-2}. Quindi le superficie φ_{n-2} d' ordine $n-2$ aggiunte ad F, compongono un sistema lineare ∞^{n-1}, nè possono essere di più giacchè vi è una sola φ_{n-3}.

Le intersezioni variabili di F colle φ_{n-2} sono curve d'ordine n, componenti un sistema lineare cui appartengono le sezioni piane di F; due di esse s' incontrano in n punti (variabili): perciò se queste curve (considerate come elementi di un sistema lineare) si riferiscono *proiettivamente**) agli iperpiani di un S_{n-1}, si otterrà in S_{n-1} una superficie Φ d' ordine n di cui la F può considerarsi come proiezione (da punti esterni). Le sezioni iperplanari della Φ essendo *normali* (come curve ellittiche d' ordine $n-1$ in S_{n-1}) anche la Φ sarà *normale*, cioè non potrà ottenersi come proiezione d' un' altra superficie dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato.

6. Rivolgiamoci ora allo studio delle superficie Φ (non rigate) a sezioni ellittiche d' ordine $n > 3$, appartenenti ad S_n (e non ad uno spazio inferiore). **)

a) Per $n = 4$ la Φ è intersezione di due quadriche di S_4 (superficie base d' un fascio).

Infatti per una quartica sezione di Φ con un S_3 passano ∞^1 superficie del 2° ordine: se φ è una di queste, per φ passano ∞^5 quadriche di S_4, le quali segano su Φ le ∞^4 quartiche sezioni iperpianali (il cui sistema normale, non è contenuto in un sistema più ampio di

*) In modo che alle curve d' un sistema lineare ∞^{n-2} contenuto nel dato corrispondano gli iperpiani per un punto in S_{n-1}.

**) I resultati di questo n° sono dovuti al sig[r] Del Pezzo („Sulle superficie dell' n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni,“ Circolo di Palermo t. I) che li dedusse servendosi della proiezione da punti della Φ sopra una superficie cubica di S_3: qui essi vengono stabiliti direttamente con metodo estendibile alle varietà (a curve sezioni ellittiche) di più dimensioni.

quartiche perchè è completa la serie $g_4{}^3$ che gli iperpiani di S_4 segano sopra una delle nominate quartiche sezioni); per ciascuna quartica sezione iperplanare di Φ, e per la φ, passano dunque ∞^1 quadriche di S_4, e quindi vi è una quadrica di S_4 passante per φ e contenente la Φ: segue che Φ è base per un fascio di quadriche cdd.

La Φ è dunque la nota superficie studiata dal sig^r Segre*), la quale (in ogni caso) contiene delle rette. Proiettando Φ da una sua retta a, essa viene rappresentata univocamente sopra un piano, e le immagini delle sue quartiche sezioni sono le ∞^4 cubiche (con 5 punti base) proiezioni di queste ciascuna dal punto su a.

b) Per $n > 4$ alla Φ appartengono delle cubiche gobbe o delle quartiche razionali normali in S_4.

A stabilire il fatto enunciato bastano le considerazioni seguenti.

Anzitutto, se una sezione iperplanare di Φ si spezza, le sue componenti sono curve razionali normali: infatti se vi fosse una curva C d' ordine $r < n$ sezione iperplanare parziale di Φ la quale appartenesse ad uno spazio S_ϱ di dimensione $\varrho < r$, le intersezioni residue degli iperpiani per S_ϱ con Φ costituirebbero su Φ un sisteme lineare di curve d' ordine $n - r$, di dimensione $n - \varrho - 1 \geq n - r$, il che è assurdo perchè le sezioni (ellittiche) di Φ non possono contenere una serie g_{n-r} di dimensione $> n - r - 1$.

Essendo $n > 4$ vi sono infiniti iperpiani bitangenti a Φ che la toccano in un dato punto generico O: le sezioni di questi sono spezzate in due curve razionali normali passanti per O ed aventi *un* altro punto comune; nessuna di queste è una retta perchè Φ non è rigata. Ogni iperpiano passante per una C di tali curve incontra Φ in una altra curva C' che ha con C *due* punti comuni (è bitangente a Φ). Quindi se r è l' ordine di una C di queste curve, $r - 1$ è la dimensione del sistema lineare cui appartiene su Φ. E parimente se s è l' ordine dell' altra componente C', è $s - 1$ la dimensione del sistema lineare cui C' appartiene su Φ.

I due sistemi lineari di curve cui C, C' appartengono su Φ possono essere contenuti l' uno nell' altro o coincidere; ma poichè una C incontra una C' in *due* punti, uno dei due sistemi ha la dimensione ≤ 3 e quindi una delle due curve C, C' ha l' ordine ≤ 4. Perciò se nessuna delle due curve è una conica, una di esse è una cubica o una quartica razionale normale. Nel caso opposto si proverà l' esistenza d' una cubica o d' una quartica razionale normale su Φ nel seguente modo.

Sia C' una conica e C abbia l' ordine > 4 ed appartenga quindi ad un sistema lineare di dimensione > 3. In questo sistema vi sono delle curve aventi un punto doppio in un punto generico di Φ le

*) Math. Annalen Bd. 24.

quali si spezzano in due curve razionali normali d' ordine ≥ 2 aventi (soltanto) il detto punto comune. Ciascuna di queste due componenti ha *un* punto comune con C' altrimenti una di esse incontrerebbe C' in due punti e l' altra apparterrebbe ad un sistema lineare di dimensione uguale al suo ordine. Ora poichè le due curve d' ordini r', s' s' incontrano in un punto e appartengono a sistemi risp. $\infty^{r'-1}$, $\infty^{s'-1}$, uno almeno dei due numeri r', s' è ≤ 3. Se poi una delle due curve nominate è una conica, un iperpiano speciale passante per l' altra (C'') sega Φ secondo due coniche (quella nominata e la C') onde un iperpiano generico per C'' sega Φ secondo una quartica razionale normale.

Rimane così effettivamente provata l' esistenza su Φ di una cubica gobba o d' una quartica razionale normale segante in due punti l' intersezione iperplanare residua.

Se su Φ vi è una cubica gobba, l' intersezione residua di Φ con un iperpiano generico è una curva irreduttibile C_{n-3} razionale normale d'ordine $n-3$ in S_{n-3}, dalla quale la Φ viene proiettata univocamente sopra un piano, poichè la C_{n-3} ha colla cubica due punti comuni e quindi la cubica stessa viene incontrata in *un* punto da un iperpiano per C_{n-3}. In tal caso la Φ viene rappresentata sul piano mediante un sistema lineare di cubiche proiezioni (dalle intersezioni con C_{n-3}) delle sezioni iperplanari di Φ.

Se su Φ vi è una quartica razionale normale di S_4, l' intersezione residua di Φ con un iperpiano generico per essa quartica è una curva irreduttibile C_{n-4} razionale normale d' ordine $n-4$ in S_{n-4}, dalla quale la Φ viene proiettata univocamente sopra una quadrica Q di S_3: in questa rappresentazione le immagini delle sezioni iperplanari di Φ (proiezioni di queste dalle intersezioni con C_{n-4}) sono quartiche ellittiche. Ma allora certo $n \leq 8$, e se $n < 8$ queste quartiche (sezioni di Q con altre quadriche di S_3) hanno qualche punto comune: se da un tal punto si proietta Q sopra un piano si ottiene la rappresentazione di Φ sul piano, dove immagini delle sezioni iperplanari sono cubiche: questo caso non conduce dunque ad un resultato diverso dal precedente tranne per $n = 8$. Per $n < 8$ si desumerà dalla rappresentazione di Φ mediante cubiche piane, l'esistenza su di essa di una C_{n-3} dalla quale Φ viene proiettata univocamente sopra un piano ecc.

Si noti poi che dovrà aversi in ogni caso $n \leq 9$, poichè ∞^9 sono tutte le cubiche del piano.

Riepilogando le cose dette ed includendo anche il caso noto $n = 3$*), possiamo dunque enunciare il

Teorema di Castelnuovo-Del Pezzo**). *Ogni superficie algebrica d' ordine n a sezioni ellittiche, non rigata, è razionale e può rappresentarsi sul piano*:

*) Cfr. Cremona, Cr. J. Bd. 68.

**) Castelnuovo, Accad. dei Lincei, Gennaio 1894.

1°) *o con un sistema lineare di cubiche con* $9 - n$ *punti base* ($n \leq 9$),

2°) *o con un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi* ($n = 8$)*) (rappresentazione equivalente a quella sopra una quadrica mediante un sistema di quartiche ellittiche senza punti base).

Possiamo aggiungere che ove la superficie in questione Φ sia normale ed $n > 3$ la rappresentazione viene data:

1°) nel 1° caso proiettando la Φ sopra un piano da una sua curva irreduttibile C_{n-3} razionale normale d' ordine $n - 3$ (in S_{n-3}),

2°) nel 2° caso proiettando la Φ sopra un piano da una sua quartica irreduttibile di S_4 e da un punto.

7. *Superficie a sezioni iperellittiche di genere* $p > 1$ **). Rivolgiamoci allo studio delle superficie a sezioni iperellittiche (di genere $p > 1$): sia F una tal superficie che può supporsi appartenente ad S_3 (ove in caso opposto si proietterebbe da punti esterni).

Anzitutto si supponga che F sia razionale. Nella rappresentazione piana le immagini delle sezioni di F sono curve iperellittiche C di genere p e d' un certo ordine n: vi sono ∞^{p-1} curve K d' ordine $n - 3$ aggiunte alle nominate d' ordine n; una K sega ogni C in coppie di punti coniugati (sulla curva iperellittica C); perciò della K passante per un punto O del piano fa parte il luogo dei punti coniugati di O sulle curve C passanti per O; segue che le curve K si compongono di $p - 1$ curve d' un fascio ciascuna delle quali sega in *due* punti coniugati le C: in conseguenza su F vi è un fascio (lineare) di coniche e la conica del fascio passante per un punto è il luogo dei punti coniugati di esso sulle sezioni di F***).

Prescindiamo ora dalla ipotesi della razionalità di F. Allora possono farsi due ipotesi:

1°) I coniugati d' un punto generico O di F sulle sezioni per esso invadono tutta la superficie:

2°) I coniugati d' un punto generico O di F sulle sezioni per esso descrivono una linea.

Nella 1ª ipotesi mentre in ogni piano generico per O vi è *un* coniugato di O sulla curva sezione di F, inversamente ogni punto di F è il coniugato di O sopra un certo numero finito m di sezioni piane per O: in tal guisa i punti della superficie F vengono a corrispondere ai gruppi d' una involuzione (di grado m) nella stella di centro O, e poichè una tale involuzione (come ogni involuzione in un ente

*) Del Pezzo, Circolo di Palermo t. I.

**) Cfr. la mia Nota „Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche" (Accad. dei Lincei, Dec. 1893), n° 2.

***) Cfr. Castelnuovo, Circolo Matematico di Palermo 1890.

algebrico razionale ∞^2) è razionale*), così la F è una superficie razionale. Ma tale conclusione per quanto è stato innanzi osservato, contrasta all' ipotesi che i coniugati di O sulle sezioni di F invadano tutta la superficie. Pertanto la 1ª delle ipotesi fatte deve scartarsi.

Discutiamo la 2ª ipotesi.

I coniugati d' un punto generico O di F sulle sezioni per O descrivono una linea C d' un certo ordine n: il punto O con ogni punto della linea C dà una coppia di punti coniugati sopra ogni sezione di F, sicchè questa è incontrata in *un* punto fuori di O dai piani per O e quindi ha il punto O come $(n-1)$ plo; la C è dunque una linea piana o si compone d' una linea piana e di rette per O, ma queste possono (eventualmente) non computarsi come facenti parte della C. Ad ogni punto O della F corrisponde una siffatta curva C, e sussiste la proprietà fondamentale che se la curva C corrispondente ad O passa per il punto O' di F, la curva C' corrispondente ad O' passa per O. Da questa proprietà si deduce che deve essere $n=1$ o $n=2$: altrimenti (per $n>2$) la curva piana C' avrebbe in O' almeno un punto doppio, e però tutti i piani tangenti ad F nei punti della curva piana C passerebbero per O; ciò è assurdo perchè la C (d' ordine n) ha O come $(n-1)$ plo e non si compone (interamente) di rette per O.

Ciò posto distinguiamo i due casi:

1⁰) $n=1$. La curva C corrispondente ad un punto generico O di F è una retta: ogni punto O' di C ha come corrispondente una retta C' per O la quale è fissa al variare di O' su C' (altrimenti F sarebbe un cono col vertice nel punto generico O). In questo caso la F è dunque una rigata iperellittica di genere p, e su di essa le rette C, C', sono rette coniugate.

2⁰) $n=2$. Ogni punto O di F ha come corrispondente una conica C su F passante per esso. Dico che ogni punto O' di C ha come corrispondente le stessa conica C di guisa che le coniche C formano un fascio lineare su F e perciò la F è razionale (per un noto teorema del sig^r Noether**).

Suppongasi invero il contrario: ai punti O' di C corrispondono allora (nel senso indicato) ∞^1 coniche C' su F passanti per O. Due coniche C' (non giacendo in uno stesso piano) hanno comune al più un sol punto variabile e quindi o formano un fascio (razionale) ed allora la F è razionale pel citato teorema di Noether, oppure s'incontrano due a due in *un* punto fuori di O, e per ogni punto di F ne passa un

*) Castelnuovo „Sulla razionalità delle involuzioni piane" (Math. Ann. Bd. 44, 1893).

**) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen" (Math. Ann. Bd. III).

certo numero $\nu > 1$, ed ancora la F è razionale perchè i suoi punti vengono riferiti ai gruppi d' una involuzione ∞^2 g_ν^2 sopra un sostegno razionale (la ∞^1 delle coniche)*). In tutti i casi dunque si conclude che la F è razionale, onde, per ciò che è stato osservato in principio, sulla F le coniche C formano un fascio.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema generale nel quale sotto la denominazione di curve iperellittiche includiamo anche le curve razionali ed ellittiche (casi particolari della famiglia):

Ogni superficie algebrica le cui sezioni (piane o iperplanari) sono curve iperellittiche di genere p (≥ 0),

1⁰) *è una rigata di genere* p,

2⁰) *oppure una superficie razionale, ed in questo* 2⁰ *caso per* $p > 1$ *contiene un fascio lineare di coniche.*

8. *Cenno di ulteriori resultati.* Sebbene non necessario pel seguito, credo possa riuscire interessante per il lettore un breve cenno di ulteriori resultati conseguiti dal sig^r Castelnuovo**) che si collegano all'argomento di cui stiamo trattando.

Il teorema concernente la razionalità delle superficie non rigate a sezioni iperellitiche (ellittiche o razionali) può essere riguardato dal punto di vista della così detta *geometria sopra una superficie* (geometria delle trasformazioni birazionali) come una proprietà delle superficie contenenti un sistema lineare ∞^3 di curve iperellittiche. Allora si può cercare un teorema analogo per le superficie contenenti un sistema più ristretto di curve iperellitiche: esso è stato dato appunto dal sig^r Castelnuovo sotto la forma seguente:

Una superficie contenente una rete di curve iperellittiche di genere p (≥ 0) *a serie caratteristica non speciale****) *è razionale o riferibile ad una rigata di genere* p, *o ad una rigata ellittica.*

La dimostrazione ricorre ancora al concetto di utilizzare il teorema della razionalità delle involuzioni piane che mi ha servito nel § 7: ma esso compare quì sotto altra forma. Il sig^r Castelnuovo nota che quel suo teorema può enunciarsi dicendo: „Una superficie φ contenente una qualsiasi serie ∞^1 razionale di curve razionali è razionale".

---

*) La razionalità delle involuzioni sopra un sostegno razionale ∞^1 è stata stabilita dal sig^r Lüroth (Math. Ann. Bd. 9). Secondo un teorema più generale di Castelnuovo sono anche razionali le involuzioni più volte infinite, non composte, sopra una curva di genere qualunque (Atti dell' Accad. di Torino, Giugno 1893). Sig^r Humbert (Journ. da Math. 1893) è giunto contemporaneamente allo stesso resultato.

**) „Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche" (Rend. Accad. dei Lincei, maggio 1894).

***) Serie caratteristica della rete (sistema lineare ∞^2) è quella serie segata dalle curve del sistema sopra una curva generica di esso: la denominazione di *non speciale* và intesa nel senso dei sig^i Brill-Noether (Math. Ann. Bd. 7), (serie non contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} appartenente alla curva di genere p).

Infatti se si riferiscono biunivocamente le curve della serie ai piani d' un fascio e si proietta ogni curva della serie sul corrispondente piano nasce una superficie F contenente un fascio di sezioni piane razionali e quindi*) razionale, la quale è in corrispondenza $[m, 1]$ colla φ (dove $m \geq 1$), onde i punti della φ vengono a corrispondere biunivocamente ai gruppi d' una involuzione su F, o ai punti di F, e però la φ è razionale.

Ciò posto si abbia una superficie contenente una rete (sistema lineare ∞^2) di curve iperellittiche di genere p, a serie caratteristica non speciale. Sia dapprima $p > 1$. Sono da distinguere due casi:

1⁰ *caso.* Le curve dalla rete passanti per un punto di una curva iperellittica non passano pel coniugato (allora la serie caratteristica della rete non è composta colla $g_2{}^1$ della sua curva generica e quindi è certo non speciale).

I punti coniugati d' un punto O della superficie sulle curve iperellittiche della rete descrivono una curva razionale C; variando il punto O sopra una di queste curve C ha luogo (come è facile vedere) uno dei seguenti casi:

a) o la curva luogo dei coniugati di O non varia, e coincide colla C stessa o è da essa distinta; allora sulla superficie vi è un *fascio* di curve razionali, fascio lineare nel primo caso sicchè la superficie è razionale, fascio di genere p nel secondo caso nel quale la superficie può trasformarsi in una rigata di genere p (essendo le curve della rete unisecanti le C);

b) o al variare di O su C varia la curva coniugata ad O e descrive una serie razionale di curve razionali ed allora la superficie è razionale (questo caso b) non può in realtà presentarsi).

2⁰ *caso.* La serie caratteristica della rete di curve iperellittiche sulla data superficie F è composta colla $g_2{}^1$ sulla curva generica della rete. Allora (poichè tale serie caratteristica è non speciale) due curve della rete si segano in più che $2(p-1)$ punti. La F risulta riferibile ad un piano doppio, ed una discussione più minuta**) prova che i piani doppi che così nascono sono quelli razionali di Clebsch-Noether***) e loro degenerazioni.

Sia ora $p = 1$ (e quindi certo non speciale la serie caratteristica della rete). Due curve generiche della rete si seghino in n punti.

Un punto O della data superficie F contato come $(n-1)$ plo sopra ciascuna curva ellittica della rete per O, individua un gruppo di n punti

*) Noether, Math. Ann. Bd. III.

**) Cfr. Castelnuovo l. c.

***) Clebsch, „Ueber den Zusammenhang ...“ Math. Ann. Bd. III. Noether, „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen“, Sitzungsberichte d. ph. med. Soc. zu Erlangen 1878.

appartenente alla g_n^{n-1} completa contenente la g_n^1 caratteristica; questo gruppo contiene un punto fuori di O, che variando la curva per O descrive una linea razionale C. Ora si faccia variare O su C, la linea corrispondente (nel senso indicato) può essere fissa o variabile: nel 1º caso le C formano un fascio (ellittico) e si è condotti alla trasformabilità di F in una rigata ellittica; nel 2º caso si ha su F una serie razionale ∞^1 di curve razionali, quindi F è razionale.

Così risulta stabilito il teorema.

II. I sistemi lineari di superficie ad intersezioni variabili razionali.

9. Lo studio dei sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve razionali si riconduce a quello delle varietà V (di 3 dimensioni) a curve sezioni razionali (cogli S_{n-2} in S_n) di cui i detti sistemi sono rappresentativi.

Si supponga la V (ove occorra) proiettata da punti esterni in un S_4.

Le superficie sezioni iperplanari della V avendo le sezioni razionali sono rigate o superficie di Steiner (nº 4); e nel 1º caso sono quadriche o rigate non quadriche.

1º *caso.* Le superficie sezioni di V sono quadriche. Allora la V è una quadrica di S_4.

2º *caso.* Le superficie sezioni di V sono rigate non quadriche. Allora la V contiene un fascio (serie semplice ∞^1) di piani. Infatti per ogni punto di V passano ∞^1 rette di essa formanti un cono; questo cono è un piano avendo comune *una* generatrice con ogni iperpiano pel punto. Poichè le curve sezioni di V sono razionali anche il fascio di piani su V è razionale.

3º *caso.* Le superficie sezioni di V sono superficie di Steiner del 4º ordine con 3 rette doppie passanti per un punto triplo. Intanto la V è del 4º ordine.

Poichè sono ∞^4 le superficie sezioni di V, vi sono su V dei punti ciascuno dei quali è triplo per infinite superficie sezioni di V e quindi per V: i punti tripli di V formano una retta (essendovi *un* punto triplo sopra ogni sezione) e per questa retta passano tre piani doppi luogo delle rette doppie delle superficie sezioni. Alla V appartiene una congruenza di (∞^2) rette sezioni dei piani per la retta tripla a; tutte queste rette incontrano la a in un punto; dico che questo punto è fisso per le nominate rette ed è quadruplo per la V. Infatti in un punto generico della retta tripla a vi è un cono cubico osculatore costituito dai tre S_3 individuati dalle coppie di piani doppi ed i piani doppi costituiscono la completa intersezione di V col nominato cono osculatore: un punto O di a pel quale passi una retta di V fuori dei

piani doppi (la qual retta deve appartenere al cono osculatore in O) è dunque un punto speciale di a quadruplo per V cdd.

Segue che la V è un cono proiettante dal vertice una superficie di Steiner: esso può ritenersi come proiezione (da punti esterni) di un cono normale del 4^0 ordine in S_6 proiettante da un punto una superficie di Veronese*). Dopo ciò si può enunciare il

Teorema. Una varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni razionali è

1^0) *una quadrica;*

2^0) *o una serie semplicemente infinita di piani;*

3^0) *o un cono del 4^0 ordine proiettante dal vertice una superficie di Veronese o una sua projezione.*

10. Le varietà V a curve sezioni razionali sono tutte razionali come è agevole vedere. Come si rappresenteranno esse su S_3?

1^0 *caso.* La V è una quadrica. Rappresentandola su S_3 mediante proiezione da un suo punto si hanno come immagini delle superficie sezioni le ∞^4 superficie di 2^0 ordine passanti per una conica.

2^0 *caso.* La V contiene un fascio lineare di piani. Allora (come ha dimostrato il sig^r Segre**) essa può ritenersi proiezione (da punti esterni) d' una varietà normale W dello stesso ordine n appartenente ad un S_{n+2}, e rappresentarsi quindi su S_3 (mediante successive proiezioni da punti della varietà normale W); si hanno allora come immagini delle superficie sezioni iperplanari di V (o di W) superficie d' ordine n con una stessa retta $(n-1)$ pla (ed altri elementi base). Il sig^r Segre nel lavoro citato ha considerato più da vicino tali sistemi lineari di superficie il cui ordine può in generale abbassarsi con trasformazioni cremoniane dello spazio.

3^0 *caso.* Per rappresentare su S_3 il cono W del 4^0 ordine (normale in S_6) proiettante da un punto una superficie di Veronese (cono che insième alle sue proiezioni dello stesso ordine costituisce il 3^0 tipo delle varietà considerate) basta anche qui ricorrere a successive proiezioni da punti semplici di W. Con ciò le immagini delle sezioni iperplanari di W riescono del 4^0 ordine; ma l' ordine di tali superficie può essere abbassato con una trasformazione cremoniana dello spazio S_3.

*) Dicesi di Veronese la superficie normale del 4^0 ordine in S_5 rappresentabile sul piano mediante il sistema lineare della coniche. Questa bella superficie (le cui proiezioni dello stesso ordine in S_3 sono superficie di Steiner) si trova già accennata dal Cayley „On the Curves which satisfy given conditions" (Phil. Trans. 1868), ed è stata studiata diffusamente dal sig^r Veronese (Accad. dei Lincei, Memorie 1883—84) e dal sig^r Segre „Considerazioni intorno alla geometria delle coniche" (Atti Accad. di Torino 1885). Cfr. anche Study „Ueber die Geometrie der Kegelschnitte" (Math. Ann. Bd. 27).

**) „Sulle varietà normali a 3 dimensioni composte di una serie semplice razionale di piani" Atti (Accad. di Torino 1885).

Per vederlo nel modo più semplice basta considerare che tutti i coni W (di S_6) sono proiettivi fra di loro e quindi due sistemi lineari di superficie in S_3 rappresentativi di coni W debbono potersi trasformare birazionalmente l' uno nell' altro: in altre parole un qualunque sistema di superficie in S_3 rappresentativo d' un cono W può essere assunto come tipo della famiglia che stiamo considerando; allora si potrà assumere come tipo il sistema ∞^6 delle quadriche che toccano un piano in un dato punto di esso (sistema evidentemente rappresentativo d' un cono W).

Dopo ciò possiamo enunciare il

Teorema. I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve razionali possono trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti tipi:

1°) *sistema delle quadriche per una conica;*

2°) *sistema di quadriche tangenti in un punto ad un piano;*

3°) *sistema di superficie d' un certo ordine n con retta base $(n-1)$ pla, e (forse) altri elementi base.*

III. I sistemi linari di superficie ad intersezioni ellittiche.

11.*) Si consideri una varietà W (di 3 dimensioni) a curve sezioni ellittiche in S_4. Le superficie sezioni iperplanari di essa sono rigate o razionali.

Nel 1° caso la varietà contiene un fascio ellittico di piani (cfr. n° 9—2° caso). Nel 2° caso col ragionamento del n° 5 si prova che le curve d' ordine $n-2$ aggiunte alle sezioni piane di W supposte d' ordine n generano ∞^{n+1} varietà d' ordine $n-2$ (aggiunte a W) mediante le quali (riferite proiettivamente agli iperpiani di S_{n+1}) la W si trasforma in una varietà V dello stesso ordine n normale in S_{n+1} di cui W può ritenersi come proiezione.

Escludendo le varietà contenenti un fascio ellittico di piani (certo non razionali), rivolgiamoci a considerare le varietà normali V d' ordine n in S_{n+1}, a curve sezioni ellittiche.

Dimostreremo che per $n > 3$ esse sono razionali e ne troveremo la effettiva rappresentazione: rimane il dubbio sul caso $n = 3$, rimane cioè dubbia la razionalità delle varietà cubiche di S_4 prive di punti doppi.

12. Anzitutto si noti che le superficie sezioni iperplanari di V sono normali d' ordine n in S_n; quindi per $n > 3$ esiste sopra una superficie sezione generica di V una curva irreduttibile C d' ordine

---

*) Cfr. le mie Note „Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche" (Rendic. Accad. dei Lincei, Maggio-Giugno 1894).

$n-3$ o d' ordine $n-4$ dalla quale la superficie viene proiettata univocamente sopra un piano o sopra una quadrica (di S_3)*): proiettando V da una tale curva C si ha la rappresentazione univoca di essa sopra un S_3 o risp. sopra una quadrica di S_4 e così resta intanto provato che: *Una varietà di 3 dimensioni a curve sezioni ellittiche d' ordine* >3 *o contiene un fascio ellittico di piani* (*ed è irrazionale*), *o è razionale.* Dobbiamo ora distinguere il caso in cui la C possa assumersi d' ordine $n-3$ ($n \leq 3$) da quello in cui sulla superficie sezione di V non esista una curva d' ordine $n-3$ (possibile soltanto per $n=8$). Chiameremo risp. di 1ª e 2ª *specie* le varietà V che così nascono, come le relative superficie sezioni.

13. Cominciamo ad occuparci delle varietà V di 1ª specie, d' ordine $n>3$. La curva proiettante C incontra le superficie sezioni d' ordine n in $n-3$ punti dai quali queste superficie vengono proiettate in superficie cubiche dello S_3 rappresentativo: le V di 1ª specie vengono dunque rappresentate su S_3 mediante sistemi lineari di superficie cubiche L. Le intersezioni variabili di due L sono curve d' ordine n proiezioni da C delle curve sezioni di W (dello stesso ordine), onde il sistema delle L possiede una curva base K d' ordine $9-n$: questa è intersezione parziale di una superficie cubica L con una quadrica fissa Q, residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L.

a) Per $n=4$ la quintica base K intersezione parziale di una quadrica con una superficie cubica irreduttibile, individua sempre da sola un sistema ∞^5 di superficie cubiche ad intersezioni quartiche ellittiche, rappresentativo d' una varietà V del 4º ordine in S_5**) (intersezione completa di due quadriche di S_5).

Per $n>4$ la curva base K può non individuare più da sola il sistema delle L e quindi possono aversi più tipi di sistemi di L rappresentativi di varietà V.

È ciò che dobbiano indagare più da vicino.

14. Premettiamo il seguente lemma. Proiettando la varietà di 1ª specie V (d' ordine $n>4$ in S_{n+1}) da una sua curva irreduttibile C d' ordine $n-3$ in S_{n-3}, si ottiene un sistema di superficie cubiche L immagini delle sezioni iperplanari che

---

*) Cfr. nº 6.

**) La varietà V del 4º ordine di S_5 può considerarsi come un complesso quadratico di rette (chiamando punti [di una quadrica] le rette di S_3). La data rappresentazione di V coincide con quella data dal sigʳ Klein in un' aggiunta alla nota del sigʳ Noether, „Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln“ Göttinger Nachrichten 1869). Cfr. anche Caporali, „Sui complessi e sulle congruenze di 2º grado“ (Memorie dell' Acad. dei Lincei. 1877—78).

1°) è determinato dalla curva base K d' ordine $9 - n$ e non ha punti base doppi, se per C non passa alcun S_{n-2} segante V secondo una superficie;

2°) nel caso opposto ha, oltre la curva base K, un punto base O doppio per le L e $(7 - n + \varrho)$ plo per la K dove $\varrho = 0, 1, 2$.

La dimostrazione del lemma si fonda sull' osservazione seguente.*) Se esiste un punto O base per le L che impone ad esse nuove condizioni non espresse dal passaggio delle L per K, i piani per O rappresentano sezioni iperplanari parziali di V, d' ordine $< n$; perciò vi è per C uno S_{n-2} segante V secondo una superficie d' ordine $n - 3$ (come la C sua sezione) e gli iperpiani per esso segano ulteriormente V secondo rigate cubiche. I piani per O sono immagini delle nominate rigate cubiche, e quindi O è doppio per le L le quali hanno in ogni piano per O altri due punti base semplici. Questi possono essere ambedue distinti da O che è in tal caso $(7 - n)$ plo per K; oppure uno solo di essi distinto da O $\{(8 - n)$ plo per $K\}$ e l'altro descrivente l'intorno di O sopra un piano osculatore fisso per le L; o infine ambedue infinitamente vicini ad O che è allora $(9 - n)$ plo per la K (composta di $9 - n$ rette), ed in tal caso le L hanno in O lo stesso cono quadrico tangente.

Osservazione. Giova inoltre osservare che il secondo dei casi precedenti può presentarsi soltanto per $n \leq 6$: infatti in tal caso proiettando da C sopra un piano una sezione iperplanare di V per C, si ha come immagine di C una conica spezzata (essendochè della quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L si stacchi il piano osculatore in O); una delle rette componenti la nominata conica contiene allora tre punti (di K) base per le L, onde la K contiene una cubica (piana), e si ha appunto $n \leq 6$.

15. Il precedente lemma fissa i limiti della discussione che dobbiamo compiere. Vi sono 4 casi da esaminare per ogni valore di n, cioè il caso in cui il sistema delle L è determinato dalla curva base K, e quello in cui vi è inoltre un punto base doppio per le L e $(7 - n + \varrho)$ plo per la K (d' ordine $9 - n$) dove $\varrho = 0, 1, 2$. Cominciamo dall' ultimo a cui corrispondono soluzioni per ogni valore di n (≤ 9).

b) La curva base K si compone di $9 - n$ rette per un punto base doppio O nel quale è fissato il cono quadrico tangente alle superficie cubiche L.

Da questa condizione nasce effettivamente (per $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) un sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche L rappresentativo d' una V, e per $n > 3$ nasce dalla effettuata projezione della V da una sua curva C

*) Il lettore troverà svolti i dettagli della dimostrazione nella 2ª delle mie citate Note dell' Accad. dei Lincei.

(razionale normale d' ordine $n - 3$); per $n = 4$ il sistema rientra come caso particolare nel tipo a) n° 13. La varietà V così rappresentata è un *cono*, (cono ottenuto proiettando dal vertice una superficie non rigata d' ordine n in S_n a sezioni ellittiche) ossia ha ∞^2 rette per un punto aventi per imagini nello S_3 rappresentativo le rette per O. Inoltre si vede facilmente che la projezione di un tal cono da una sua curva C (razionale normale d' ordine $n - 3$) dà sempre come sistema rappresentativo di L quello b) considerato; segue la sua irreducibilità agli altri che verremo trovando.

16. Escludiamo le V che sono coni: restano 3 casi da esaminare per ogni valore di n.

c) Sia $n = 5$. La curva base K sia una *quartica di* 2ª *specie* (genere 0).

Si ha così l'unico sistema di L corrispondente alla 1ª ipotesi: invero soltanto una quartica di 2ª specie appartiene ad *una* quadrica (residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L) e quindi soltanto una siffatta quartica determina da sola un sistema ∞^6 di L rappresentativo d' una V. Sotto la condizione di essere di 2ª specie la quartica K può degenerare (appartenendo sempre ad *una* quadrica).

Le varietà V rappresentate dal sistema c) non sono coni. Dico che ogni altra V del 5° ordine che non è un cono può rappresentarsi col sistema c), proiettata su S_3 da una conica C opportunamente scelta su di essa. Invero la V del 5° ordine che non è un cono ove sia rappresentata su S_3 mediante proiezione da una conica C, non dal sistema c), ha come sistema rappresentativo un sistema ∞^6 di L con un punto base doppio O che è doppio o triplo per la quartica base K; allora si consideri (in S_3) un piano generico per O ed in esso una conica generica γ passante per O e per gli altri due punti base per le L nel detto piano (uno dei quali al più è infinitamente vicino ad O); alla γ corrisponde su V una conica C per la quale non passa alcuna superficie del 2° ordine; proiettando la V su S_3 dalla C si ha dunque (n° 14) come sistema rappresentativo di V il sistema c).

17. Sia $n = 6$. Esclusi i coni V si hanno i 3 casi:

d) La cubica base K determina da sola il sistema delle L e però anche *una* quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi la K si compone di 3 rette sghembe. Effettivamente esiste un sistema ∞^7 di L determinato da 3 rette base sghembe rappresentativo d' una V del 6° ordine.

d') Il sistema delle L ha oltre la cubica base K un punto doppio O, semplice per K. Allora K è una cubica gobba appartenente ad ∞^2 (e non ∞^3) quadriche residue dei piani per O rispetto al sistema delle L.

Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 rappresentativo di una V proiettata su S_3 da una sua cubica C.

d″) Il sistema delle L ha oltre la curva base K un punto base doppio O che è doppio anche per K, ed inoltre le L hanno in O un punto biplanare con un piano osculatore fisso (cfr. l' Osservazione del n° 14). Allora la K è una cubica piana. Un siffatto gruppo base individua effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo di una V e nascente dalla proiezione di essa da una sua cubica C.

I sistemi d), d′), d″) sono irreducibili fra loro, perchè le V rappresentate sono proiettivamente distinte: per verificare l' asserto basta considerare i sistemi di rigate cubiche che possono appartenere alle V dei 3 tipi.

18. Sia $n = 7$. Esclusi i coni e rammentando l'osservazione del n° 14, non vi sono da esaminare che i sistemi di L determinati completamente dalla curva base K, o quelli aventi anche un punto base doppio per le L e $(7 - n)$ plo per K: la 1ª ipotesi è da scartare giacchè una linea d' ordine < 3 non individua mai da sola *una* quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L; la 2ª ipotesi conduce soltanto al caso:

e) Per $n = 7$; il sistema ∞^8 di L con conica base e punto base doppio fuori di esso. Questo sistema si può trasformare quadraticamente in un sistema di quadriche per un punto.

E non potendosi andar oltre, si conclude che per $n > 7$ le varietà V di 1ª specie sono coni.

19. Passiamo alle V, normali di 2ª specie. Queste sono di ordine 8: la loro rappresentazione su S_3 si ottiene proiettandole da una quartica razionale normale C e da un punto fuori di essa. Proiettiamo anzitutto la V da una sua quartica C sopra una quadrica Q di S_4: le immagini delle sezioni iperplanari di V su Q sono superficie di 4° ordine L intersezioni di Q con quadriche di S_4 ed aventi come intersezioni variabili curve d' ordine 8. Sopra V vi è *una* superficie del 4° ordine passante per C (giacente in un S_5); per ottenerla basta considerare un iperpiano per C tangente a V in due punti di C, la cui superficie sezione (di 2ª specie con due punti doppi) si spezza staccandosi da essa una superficie del 4° ordine φ di S_5 passante per C. Ciò posto sulla quadrica Q proiezione di V da C, le L (immagini delle sezioni iperplanari di V) hanno *un* punto base O immagine della φ (superficie su V passante per C e contenuta in un S_5): e poichè le L non hanno curva base intersecandosi due a due secondo curve di 8° ordine, e poichè inoltre tre L han comuni 8 punti variabili, il punto O è doppio per le L. Ora se la Q non è un cono col vertice in O, si può scegliere il punto O (immagine di un punto di V su φ) per proiettare la Q su un S_3: si ha allora la rappresentazione di V

su S_3 dove le immagini delle sezioni iperplanari sono le ∞^9 superficie di 2^0 ordine. Effettivamente

f) il sistema di tutte le quadriche di S_3 è rappresentativo di una V normale di 2^a specie (che non è un cono).

Si supponga invece che Q sia un cono col vertice in O allora le L sono intersezioni di Q con quadriche passanti per O, e quindi le generatrici di Q sono immagini di rette su V; siccome poi ad una superficie sezione generica di V non appartengono rette (di guisachè la superficie diviene un cono se contiene una retta), la V stessa è un cono, proiettante dal vertice una superficie di 2^a specie. Proiettando V da una sua quartica C e da un punto, su S_3, si ha come sistema rappresentativo

f') il sistema delle superficie di 4^0 ordine con punto base triplo, due rette doppie per esso e in esso lo stesso quadrico tangente. Un siffatto sistema rappresenta effettivamente un cono V di 2^a specie.

20. Riassumendo i resultati ottenuti sui sistemi lineari di superficie ad intersezioni ellittiche, possiamo enunciare il teorema:

I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, e dove tre superficie generiche s' incontrano in più di tre punti (*sistemi di grado* > 3), *si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti sistemi lineari tipici di grado* n *e dimensione* $n+1$, *o ad un sistema contenuto in uno di questi:*

per $n = 4$

1^0) *il sistema di superficie cubiche determinato da una quintica intersezione parziale di una quadrica* (*che può degenerare*);

per $n = 5, 6, 7, 8, 9$

2^0) *il sistema* ∞^{n+1} *di superficie cubiche con punto base doppio,* $9 - n$ *rette base per esso, ed in esso lo stesso cono quadrico tangente* (*questo sistema, rappresentativo d' un cono, per* $n = 4$ *rientra nel* 1^0 *tipo*);

oppure: per $n = 5$

3^0) *il sistema* ∞^6 *di superficie cubiche determinato da una quartica di* 2^a *specie* (*che può degenerare*);

per $n = 6$

4^0) *il sistema* ∞^7 *delle superficie cubiche passanti per 3 rette sghembe;*

5^0) *il sistema* ∞^7 *delle superficie cubiche aventi un punto base doppio e contenenti una cubica gobba* (*che può degenerare*) *passante semplicemente per esso;*

6^0) *il sistema* ∞^7 *delle superficie cubiche con un punto base*

biplanare ed in esso un piano osculatore fisso, passanti per una cubica piana di cui il nominato punto è doppio;

per $n = 7, 8$

7⁰) *il sistema* ∞^8 *o* ∞^9 *delle quadriche con un punto base o risp. di tutte le quadriche;*

per $n = 8$ *anche:*

8⁰) *il sistema delle superficie di* 4^0 *ordine con punto triplo, due rette base doppie per esso, ed in esso lo stesso cono tangente.*

IV. I sistemi lineari di superficie ad intersezioni iperellittiche.

21.*) Rivolgiamoci ora a considerare i sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche propriamente dette (di genere $p > 1$). Occorre per ciò considerare le varietà V a curve sezioni iperellitiche. Supporremo V proiettata (ove occorra) in una dello stesso ordine in S_4.

La varietà V di S_4 a sezioni piane iperellittiche può avere le superficie sezioni iperplanari rigate o pur nò: nel 2^0 caso le nominate superficie sono razionali e contengono un fascio di coniche.

Se le sezioni iperplanari di V sono rigate, la V contiene un fascio di piani del genere p (cfr. il n⁰ 9) ed è certo irrazionale.

Supponiamo l' opposto. Allora sopra ogni superficie F sezione di V vi è un fascio (lineare) di coniche, e queste segano le coppie della g_2^1 sopra una sezione piana di F. In conseguenza per una coppia di tale g_2^1 vi sono ∞^1 coniche su V, una conica appartenendo ad un fascio di iperpiani: le ∞^1 coniche stanno in un S_3 e generano una superficie non contenente la retta congiungente i due punti della coppia della g_2^1 considerata, e però di 2^0 ordine: analogamente si costruiscono ∞^1 quadriche su V partendo dalle altre coppie della g_2^1 sopra una sezione piana iperellittica di V. La serie razionale delle quadriche così ottenuta su V è un fascio (ossia per un punto di V ne passa *una*) giacchè sopra una sezione piana iperellitica di V (di genere $p > 1$) non esiste altra serie razionale di coppie di punti che la g_2^1 **).

Ora se si considera una superficie sezione iperplanare generica di V, le quadriche del fascio nominato segano su questa un fascio (razionale) di coniche il quale ammette quantesivogliano curve unisecanti ***): una di tali curve C sega in un punto ciascuna quadrica del fascio su V.

---

*) Cfr. la mia Nota „Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche" (Rendic. Accad. d. Lincei, Decembre 1894).

**) Cfr. la nota a pag. 72 della citata memoria del sig^r Segre (Annali di Matematica 1894).

***) Noether, Math. Ann. Bd. III.

Si può supporre che le quadriche del fascio su V appartengano ciascuna ad un S_3 di un fascio, giacchè nell' ipotesi opposta basta trasformare la varietà in una W riferendo proiettivamente gli elementi (quadriche) del fascio agli iperpiani per un piano in S_4, e proiettare (da un punto fisso) ciascuna quadrica sul corrispondente iperpiano.

Ciò posto si proietti ciascuna quadrica del fascio su V (o su W) dal punto di C sopra un S_3: si otterrà una rappresentazione di V punto per punto su S_3, in modo che alle quadriche di V vengano a corrispondere i piani d'un fascio in S_3. Dunque:

Una varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni iperellittiche di genere p (>1),

1°) *o contiene un fascio di piani del genere p ed è irrazionale;*

2°) *o è razionale e contiene un fascio di quadriche.*

22. Le varietà razionali V a curve sezioni iperellittiche ci forniscono colla loro rappresentazione su S_3 tutti i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni iperellittiche. Ponendo mente al modo come è stata ottenuta la rappresentazione delle V su S_3, si perviene al teorema:

Ogni sistema lineare semplice di superficie le cui intersezioni variabili sono iperellittiche (di genere >1) può trasformarsi birazionalmente in un sistema di superficie d' un certo ordine n con retta base $(n-2)$ pla, curva base segante in due punti fuori della retta i piani per essa, e (forse) altri elementi base.

Viceversa un tal sistema rappresenta sempre una V contenente un fascio di quadriche e quindi a curve sezioni iperellittiche.

Si noti infine che nell' enunciato precedente si deve intendere che la curva base bisecante i piani immagini delle quadriche su V può ridursi (tutta o in parte) a punti della retta.

Die Stetigkeit der automorphen Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs.

Von

Ernst Ritter in Göttingen.

Theil II.

Allgemeine Fundamentalbereiche.

§ 1.

Der Fundamentalbereich und seine Abänderung.

Es sei in der Ebene einer complexen Variabeln ζ der Fundamentalbereich eines Systems automorpher Functionen gegeben, mit einer endlichen Anzahl von Kantenpaaren bezw. erzeugenden Substitutionen, aber sonst vom allgemeinsten functionentheoretisch zulässigen Charakter. Der Bereich darf sowohl für sich, wie vermöge seiner analytischen Fortsetzungen die ζ-Ebene beliebig oft überdecken. Die Substitutionen, welche die Kantenpaare zusammenordnen, mögen beliebig elliptisch, hyperbolisch, parabolisch oder loxodromisch sein, oder auch auf blosse ein- oder mehrmalige Umläufe sich reduciren.

In Folge der Zulassung dieser letzten Art von Kantenzusammenordnungen kann ich das Vorkommen von Windungspunkten im Innern des Bereichs von vornherein ausschliessen, indem ich einfach nach jedem solchen Windungspunkte hin einen Einschnitt gelegt denke, dessen beide Ufer ich mit zur Begrenzung rechne.

Selbstverständlich sollen diejenigen functionentheoretisch unzulässigen Vorkommnisse ausgeschlossen sein, welche Herr Klein als „hyperbolische Zipfel" bezeichnet*). Ferner will ich der Einfachheit halber solche Ecken, in denen Windungspunkte unendlich hoher Ordnung liegen, sowie solche Ecken ausschliessen, die in unendlich oft umlaufende Kreisbänder mit hyperbolischer Zuordnung der Ränder

*) Math. Ann. Bd. 40, p. 130 ff.

ausgeartet sind. (Kreisbänder mit loxodromischer Kantenzuordnung dagegen kann man immer durch erlaubte Abänderung des Bereichs in eigentliche Ecken mit loxodromischer Kantenzuordnung verwandelt denken).

Ein specieller Fall eines solchen Fundamentalbereiches, wie ich ihn eben geschildert habe, ist eine gewöhnliche geschlossene Riemann'sche Fläche, die man sich hier nur mit einem solchen Einschnittsystem versehen zu denken hat, dass jeder Verzweigungspunkt auf dem Schnittsystem liegt.

Zwei Fundamentalbereiche heissen nun unendlich wenig verschieden von der Ordnung ε, wenn sowohl die Fixpunkte wie die Amplituden (absolut bestimmt, nicht nur mod. 2π) der die Kanten zusammenordnenden Substitutionen sich bloss um Grössen unterscheiden, welche mit ε stetig wenigstens in der ersten Ordnung verschwinden, und wenn zugleich bei beiden Bereichen dieselben Zusammenhangsverhältnisse vorliegen. Man kann dann die Begrenzungen der beiden Bereiche, die ja an sich noch in hohem Grade willkürlich sind, so wählen, dass die Kanten des einen Bereichs unendlich nahe an den Kanten des andern Bereichs verlaufen.

Irgend eine Ecke a des Bereichs S soll also von der entsprechenden Ecke a' des andern Bereichs S' immer um weniger als $\varepsilon\varrho$ entfernt sein, unter ϱ eine angebbare endliche Strecke verstanden, und wenn eine erzeugende Substitution des Bereichs S durch das Schema

$$T = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

gegeben ist, so soll die entsprechende Substitution des Bereichs S' die Form

$$T' = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\alpha', & \beta + \varepsilon\beta' \\ \gamma + \varepsilon\gamma', & \delta + \varepsilon\delta' \end{pmatrix}, \quad (\alpha + \varepsilon\alpha')(\delta + \varepsilon\delta') - (\beta + \varepsilon\beta')(\gamma + \varepsilon\gamma') = 1$$

haben, wobei $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ dem absoluten Werthe nach unterhalb angebbarer endlicher Grenzen bleiben.

ε soll dabei immer ein reeller positiver Zahlencoefficient sein, welcher beliebig klein gemacht werden kann, entsprechend einem stetigen Uebergang des Bereichs S' in den Bereich S.

Durch Reproduction des Bereiches S vermittelst der zu ihm gehörigen Substitutionen T entsteht ein Bereichnetz S, aus dem Bereich S' durch die Substitutionen T' ein Bereichnetz S'. Zwei Punkte im Bereichnetz S sehe ich als *identisch in Bezug auf das Netz* S an, wenn sie an entsprechenden Stellen in verschiedenen Bereichen des Netzes liegen; desgleichen nenne ich zwei Punkte *identisch in Bezug auf das Netz* S', wenn sie an entsprechenden Stellen von Bereichen des zweiten

Netzes liegen. In demselben Sinne spreche ich von Linienelementen $d\zeta$, welche, sei es in Bezug auf das Netz S, sei es in Bezug auf S' miteinander identisch sind.

Ich will nun sofort den Satz beweisen:

Zwei Linienelemente, welche in Bezug auf das Bereichnetz S' mit einander identisch sind, z. B. zwei entsprechende Randelemente des Bereiches S', sind in Bezug auf das Bereichnetz S nach Ort, Grösse und Richtung nur um eine mit ε stetig in der ersten Ordnung verschwindende Grösse verschieden.

Es sei T' diejenige Transformation des Bereiches S', welche das erste der beiden fraglichen Linienelemente in das zweite überführt, T die entsprechende Transformation des Bereiches S. Dann ist nur zu zeigen, dass das Linienelement $d\zeta'$, welches aus $d\zeta$ entsteht, wenn man erst die Transformation T', dann die Transformation T^{-1} anwendet, nach Ort, Grösse und Richtung nur unendlich wenig von $d\zeta$ abweicht.

Aus

$$T = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\alpha', & \beta + \varepsilon\beta' \\ \gamma + \varepsilon\gamma', & \delta + \varepsilon\delta' \end{pmatrix}$$

erhält man:

$$T'T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon(\delta\alpha' - \gamma\beta'), & \varepsilon(\alpha\beta' - \beta\alpha') \\ \varepsilon(\delta\gamma' - \gamma\delta') & 1 + \varepsilon(\alpha\delta' - \beta\gamma') \end{pmatrix},$$

und also, wenn ich

$$\zeta T'T^{-1} = \zeta', \quad d\zeta T'T^{-1} = d\zeta'$$

setze:

$$\zeta' - \zeta = \varepsilon \frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha') + \zeta(\delta\alpha' - \alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta') + \zeta^2(\gamma\delta' - \delta\gamma')}{1 + \varepsilon\big((\alpha\delta' - \beta\gamma') + \zeta(\delta\gamma' - \gamma\delta')\big)} = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon q}.$$

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{1}{\big\{1 + \varepsilon\big((\alpha\delta' - \beta\gamma') + \zeta(\delta\gamma' - \gamma\delta')\big)\big\}^2} = \frac{1}{(1 + \varepsilon q)^2}.$$

Hierin bleiben p und q, wie man sieht, für jeden Werth von ζ, dessen absoluter Werth unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze bleibt, selbst ihrem absoluten Werthe nach unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze.

So lange also $d\zeta$ im Endlichen liegt, — und hierauf kann ich mich immer beschränken*) —, ist der Satz thatsächlich bewiesen. Er erleidet offenbar auch dann keine Ausnahme, wenn $d\zeta$ in der unmittelbaren Nähe eines Fixpunktes von T oder T' liegt.

---

*) Vergl. die Bemerkung im ersten Theil, Math. Ann. Bd. 45, S. 529.

§ 2.

Construction des Vergleichsbereichs.

Es wird später darauf ankommen, die Functionen der beiden Bereiche S und S' in einem solchen Gebiete miteinander zu vergleichen, in dem sie beide unverzweigt sind.

Wenn der eine Bereich, etwa S', sich vollständig auf den Bereich S legen lässt, kann man S' selbst als solches Gebiet benutzen, um etwa die Werthe der zum Bereich S gehörigen Green'schen Function G innerhalb von S' mit G' zu vergleichen. Im Allgemeinen ist aber ein solches Aufeinanderlegen nicht möglich, besonders dann nicht, wenn der Bereich Ecken besitzt, die sich mehrfach herumwinden.

In allen solchen Fällen muss man einen „*Vergleichsbereich*" erst eigens construiren, und zwar so, dass er sowohl von S, wie von S' nur unendlich wenig abweicht, und dass er sich sowohl in das Bereichnetz S, wie in das Netz S' ohne Collision mit den Ecken einlegen lässt.

Die zweckmässigste Construction des Vergleichsbereichs, den ich Σ nennen will, ist wohl die folgende:

Irgend eine Ecke α' des Bereichs S' bildet für sich oder mit anderen Ecken zusammen einen „Cyklus"*). Wenn der Cyklus etwa aus ν Ecken besteht, so gehört jede von der Ecke α' im Bereichnetz S' ausgehende Kante mit der im Uhrzeigersinn folgenden ν^{ten} weiteren von derselben Ecke ausgehenden Kante durch eine loxodromische, elliptische oder parabolische — nur nicht hyperbolische — Substitution zusammen, welche einen ihrer Fixpunkte in der Ecke α' hat, während der andere Fixpunkt β' sein möge.

Den Fall einer parabolischen Substitution will ich vorerst einmal ausschliessen, da er eine etwas abweichende Behandlungsweise erfordert.

Die Amplitude der Transformation mit den Fixpunkten α', β' sei, absolut bestimmt,

$$\lambda' . 2\pi = (\lambda_1' + i\lambda_2')2\pi,$$

die Winkelsumme des Cyklus also $\lambda_1' . 2\pi$.

Ich denke mir nun die Schar der Bahncurven dieser Substitution in der Nähe der Ecke α' construirt, d. h. die Curven, längs deren die Function

$$Z = \left(\frac{\zeta - \alpha'}{\zeta - \beta'}\right)^{\frac{1}{\lambda'}}$$

constanten absoluten Werth besitzt; die genau entsprechenden Bahncurven denke ich mir um die andern Ecken desselben Cyklus herum construirt. Unter allen diesen Curven wähle ich mir die engste aus,

*) Vgl. Poincaré, Acta math. I. S. 14 ff.

welche der Bedingung genügt, dass der durch sie und die ihr entsprechenden Curven an den Ecken des Cyklus abgestutzte Bereich S' sich in der Umgebung dieser Ecken den entsprechenden Ecken des Bereichs S nirgend um mehr, als auf eine kleine Entfernung $\varepsilon\varrho_1$ nähert, unter ϱ_1 eine beliebig vorzugebende endliche Strecke verstanden. Die Minimalentfernung der Abstutzungscurven von den Ecken α des Bereichs S ist dann $\varepsilon\varrho_1$, diejenige von den Ecken α' des Bereichs S' jedenfalls nicht grösser als $\varepsilon(\varrho+\varrho_1)$, beide Minimalentfernungen verschwinden also mit ε stetig von der ersten Ordnung. Da kein hyperbolischer Zipfel vorliegt, ist auch die Maximalentfernung der Abstutzungscurven sowohl von den Ecken α wie α' unterhalb einer geometrisch leicht angebbaren mit ε in der ersten Ordnung verschwindenden Grenze gelegen.

Diese beschriebene Abstutzung denke ich mir an allen Ecken des Bereiches S' vorgenommen, welche beim Auflegen von S' auf S mit den Ecken des letzteren Bereichs collidiren. Den so aus S' zu gewinnenden Bereich nenne ich Σ, den Vergleichsbereich.

Eine Modification des Verfahrens zur Herstellung von Σ ist nöthig, wenn die zu einem Cyklus gehörige Substitution parabolisch ist.

Die Substitution möge in der Gestalt

$$\frac{(\zeta'\beta')}{(\zeta'\alpha')} = \frac{(\zeta\beta')}{(\zeta\alpha')} + 2\pi i$$

geschrieben sein und die Amplitude $\lambda 2\pi$ ($\lambda=0, 1, 2, \ldots$) haben.

Ich setze dann, wenn $\lambda = 1$ ist:

$$\frac{(\zeta\beta')}{(\zeta\alpha')} = \log \mathsf{Z},$$

wenn $\lambda \geqq 1$ ist

$$\frac{(\zeta\beta')}{(\zeta\alpha')} = \pm\frac{1}{\lambda}\mathsf{Z}^{-\lambda} + \log \mathsf{Z},$$

mit $+$ oder $-$, je nachdem man es mit einer parabolischen Ecke der ersten oder der zweiten Art zu thun hat, d. h. je nachdem der zweite Randkreis links oder rechts vom ersten Randkreis liegt (cf. I. Theil, S. 505). Zur Abstutzung der Ecken dienen mir dann die Curven $|\mathsf{Z}| = \text{Const.}$, welche nur im Falle $\lambda = 0$ zugleich Bahncurven der Substitution sind.

Immer, mögen parabolische Ecken vorliegen oder nicht, ist der Vergleichsbereich Σ von einer gewissen Anzahl durch die Substitutionen T' des Bereichs S' einander paarweise Punkt für Punkt zugeordneter Curvenstücke, und durch eine Anzahl unendlich kleiner Bogenstücke begrenzt, welche die Ecken abstutzen, und welche keinem andern Randstück zugeordnet sind.

§ 3.

Formulirung der Aufgabe.

Die automorphen Functionen kann man bekanntlich alle aus Integralen des Bereichs, z. B. aus denen zweiter Gattung mit einer Unendlichkeitsstelle aufbauen. Es wird also die Hauptaufgabe sein, nachzuweisen, dass ein solches Integral zweiter Gattung so eingerichtet werden kann, dass es sich stetig ändert, wenn man den Fundamentalbereich stetig abändert.

Wir werden dieses Integral so normiren, dass es nur rein imaginäre Perioden besitzt, dass also sein reeller Theil ein automorphes logarithmisches Potential vorstellt, d. h. ein solches logarithmisches Potential, welches an entsprechenden Stellen verschiedener Fundamentalbereiche des Netzes immer genau die gleichen Werthe besitzt.

Geben wir noch die Art des Unendlichwerdens an der Unstetigkeitsstelle ξ vor, etwa, dass es sich dort verhalte wie

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi_0)}{r},$$

so ist dieses Potential bis auf eine additive Constante völlig bestimmt, und diese letztere legen wir schliesslich durch die Bedingung fest, dass in der Reihenentwicklung des Potentials in der Umgebung der Stelle ξ:

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi_0)}{r} + a_0 + \begin{matrix} a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + \cdots \\ b_1 r \sin\varphi + b_2 r^2 \sin 2\varphi + \cdots \end{matrix}$$

das constante Glied

$$a_0 = 0$$

sein soll.

Das hierdurch eindeutig bestimmte Potential denken wir uns sowohl für den Bereich S, wie für den Bereich S' construirt, und nennen das erste G, das zweite G'; dass die Construction desselben immer möglich ist, folgt aus den bekannten Methoden von Schwarz und Neumann.

G und G' sollen an der im Innern von S bezw. S' gelegenen Stelle ξ beide das gleiche Unstetigkeitsverhalten zeigen. Dann ist

$$\delta = G - G'$$

ein logarithmisches Potential, welches im Innern des ganzen Bereiches Σ, des Vergleichsbereichs, holomorph ist. Wir werden nun versuchen, die Werthe von δ im Innern von Σ aus den Werthen am Rande dieses Gebiets abzuschätzen, und zwar folgendermassen:

Es mögen die Begrenzungsstücke von Σ, welche zugleich der Begrenzung von S' angehören, und welche zugleich durch die zu S'

gehörigen Substitutionen paarweise zusammengeordnet sind, mit s und s' bezeichnet werden, und zwar möge von jedem Paare solcher Randcurven immer die eine mit s, die andere mit s' benannt sein. Die unendlich kleinen Begrenzungsstücke von Σ, durch welche die Ecken abgestutzt werden, sollen σ heissen.

Es werde nun, — was nach dem Schwarz'schen Verfahren ebenfalls ohne Schwierigkeit möglich ist —, für den Bereich Σ eine „Green'sche Function" $\Gamma_{\xi,\eta}^{\zeta,\zeta_0}$, d. h. ein logarithmisches Potential von folgender Beschaffenheit hergestellt: Γ soll an der Stelle ξ unstetig werden wie $+\log\frac{1}{r}$, an der Stelle η wie $-\log\frac{1}{r}$ und soll an der Stelle ζ_0 verschwinden; längs der Randstücke σ soll $\frac{\partial\Gamma}{\partial n}=0$ sein, und längs der Curvenpaare s und s' soll Γ den bekannten automorphen Randbedingungen genügen, nämlich

$$\Gamma(\xi)=\Gamma(\xi'),\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}ds+\frac{\partial\Gamma}{\partial n'_\xi}ds'=0.$$

Diese Green'sche Function Γ gestattet Vertauschung von Argumenten und Parametern, so dass man sie ebensowohl als ein Potential mit der laufenden Variablen ξ, der 0-Stelle η, der positiven logarithmischen Unstetigkeitsstelle ζ und der negativen Unendlichkeitsstelle ζ_0 auffassen kann.

Nach einem bekannten allgemeinen Satze ist nun

$$\delta(\zeta)-\delta(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial\delta}{\partial n_\xi}\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}-\delta\,\frac{\partial\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n_\xi}\right)ds_\xi,$$

das Integral mit der Integrationsvariablen ξ über irgend eine geschlossene die Punkte ζ und ζ_0 umschliessende Curve erstreckt, die Normale n_ξ nach Aussen gerichtet gedacht.

Als Integrationscurve wähle ich jetzt die Berandung des Vergleichsbereichs Σ. Dabei fasse ich jedes auf ein Element ds bezügliche Integralelement mit demjenigen zusammen, welches sich auf das entsprechende Randelement ds' bezieht. Ich bekomme so eine Summe von Theilintegralen:

$$\sum\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\delta}{\partial n_\xi}\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}ds_\xi+\frac{\partial\delta}{\partial n'_\xi}\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}ds'_\xi$$

$$-\sum\frac{1}{2\pi}\int\delta(\xi)\frac{\partial\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n_\xi}ds_\xi+\delta(\xi')\frac{\partial\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n'_\xi}ds'_\xi$$

$$+\sum\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\delta}{\partial n_\xi}\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}d\sigma_\xi.$$

Nun ist aber

$$\Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi'\eta} = \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}, \quad \frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi'\eta}}{\partial n'_\xi} ds'_\xi = -\frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}}{\partial n_\xi} ds_\xi,$$

so dass wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \delta}{\partial n_\xi} ds_\xi + \frac{\partial \delta}{\partial n'_\xi} ds'_\xi \right) \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta} \\
&+ \sum \frac{1}{2\pi} \int \big(\delta(\xi') - \delta(\xi) \big) \frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}}{\partial n_\xi} ds_\xi \\
&+ \sum \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \delta}{\partial n_\xi} \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta} \, d\sigma_\xi .
\end{aligned}$$

Hierin setze ich wieder für δ den Werth $G - G'$, und bedenke, dass G' längs der Curvenpaare s und s' den Gleichungen

$$G'(\xi') = G'(\xi), \quad \frac{\partial G'}{\partial n'_\xi} ds'_\xi = -\frac{\partial G'}{\partial n_\xi} ds_\xi$$

genügt, und ich bekomme also für δ schliesslich folgende Summe von Integralen:

$$\begin{aligned}
\delta(\zeta) - \delta(\zeta_0) = &\sum \frac{1}{2\pi} \int \big(G(\xi') - G(\xi) \big) \frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}}{\partial n_\xi} ds_\xi \\
&+ \sum \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi} \frac{ds'_\xi}{ds_\xi} \right) \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta} \, . \, ds_\xi \\
&+ \sum \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial G}{\partial n_\xi} - \frac{\partial G'}{\partial n_\xi} \right) \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta} \, . \, d\sigma_\xi .
\end{aligned}$$

Als Punkt ζ_0 kann man die gemeinsame Unstetigkeitsstelle der beiden Functionen G und G' wählen; da hier $G - G'$ verschwindet, stellt die Integralsumme dann $\delta(\zeta)$ selbst dar.

Der Unstetigkeitspunkt η von $\Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}$ fällt aus dem Integral heraus, weil $\int \frac{\partial \delta}{\partial n_\xi} ds_\xi$, um die ganze Begrenzung von Σ herum erstreckt, verschwindet.

Die Aufgabe ist also jetzt die, für die einzelnen Bestandtheile unter den Integralzeichen, also für $G(\xi') - G(\xi)$, $\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n_\xi} \frac{ds'_\xi}{ds_\xi}$, $\Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}$, $\frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}}{\partial n_\xi}$ längs der Curven s, und für $\frac{\partial G}{\partial n_\xi}$, $\frac{\partial G'}{\partial n_\xi}$, $\Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}$ längs der Curvenstücke σ obere Grenzen des absoluten Werthes abzuschätzen.

§ 4.

Abschätzung von G, G', Γ im Innern ihrer Bereiche.

Um die zu Ende des vorigen Paragraphen näher bezeichnete Aufgabe lösen zu können, ist es vor allen Dingen nothwendig, für G, G', Γ selbst längs irgend welcher die Unstetigkeitspunkte vermeidenden Curven endliche obere Grenzen des absoluten Werthes angeben zu können.

Für G und G' brauchen wir uns zu dem Zwecke nur auf das Schwarz'sche Grenzverfahren zu berufen, mit Hülfe dessen man die Function überhaupt construirt.

Es sei jetzt s die Begrenzung des Bereiches S bezw. S'. s_2 sei ein möglichst grosser, aber noch ganz im Bereich gelegener Kreis mit dem Unstetigkeitspunkt von G als Centrum, r_2 sei sein Radius; s_1 sei ein kleinerer concentrischer Kreis, dessen Radius $r_1 < \frac{1}{3} r_2$ sein soll. Mit S_1 werde das zwischen s und s_1 gelegene mehrfach zusammenhängende Gebiet bezeichnet, mit S_2 das Innere des Kreises s_2, mit S_0 das den Gebieten S_1 und S_2 gemeinsame von s_1 und s_2 begrenzte kreisringförmige Gebiet.

Man construirt nun zuerst ein Potential u_1, welches in S_1 holomorph ist, längs s die automorphen Grenzbedingungen befriedigt und längs s_1 die Werthe $\frac{\cos(\varphi-\varphi_0)}{r_1}$ besitzt. Die Werthe von u_1 längs s_2 heissen u_1''.

Dann bildet man ein in S_2 holomorphes Potential u_2, das längs s_2 die Werthe $u_1'' - \frac{\cos(\varphi-\varphi_0)}{r_2}$ hat; die Werthe desselben längs s_1 sollen u_2' heissen.

Darauf stellt man ein in s_1 holomorphes Potential u_3 her, längs s den automorphen Grenzbedingungen genügend, längs s_1 in Uebereinstimmung mit $u_2' + \frac{\cos(\varphi-\varphi_0)}{r_1}$. Seine Werthe längs s_2 heissen u_3''.

u_4 ist dann wieder ein in S_2 holomorphes Potential mit den Werthen $u_3'' - \frac{\cos(\varphi-\varphi_0)}{r_2}$ längs s_2 u. s. w.

Das gesuchte Potential G ist dann im Gebiete S_1 durch die Reihe

$$G = u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \cdots,$$

im Gebiet S_2 durch

$$G = \frac{\cos(\varphi-\varphi_0)}{r} + u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \cdots,$$

im Gebiet S_0 und auf den Linien s_1, s_2 durch beide Reihen zugleich gegeben.

Die einzelnen Terme z. B. der ersten Reihe genügen — wie man des Genaueren bei Schwarz, Ges. Abh. II, S. 168 ff. nachlesen mag — längs s_1 den Ungleichungen:

$$|u_1'| \leq \frac{1}{r_1},$$
$$|u_3' - u_1'| < \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \cdot \frac{2r_1}{r_2 - r_1},$$
$$|u_5' - u_3'| < \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \cdot \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^2,$$
$$|u_7' - u_5'| < \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \cdot \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^3,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

so dass also längs der Kreislinie s_1

$$|G| < \frac{1}{r_1} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\left\{\frac{2r_1}{r_2 - r_1} + \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^2 + \left(\frac{2r_1}{r_2 - r_1}\right)^3 + \cdots\right\}$$

ist. Da hierin $r_1 < \frac{1}{3} r_2$, folglich $\frac{2r_1}{r_2 - r_1} < 1$ ist, so ist die Reihe summirbar und es ergiebt sich

$$|G| < \frac{2r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 r_2 (r_2 - 3r_1)}.$$

Dieselbe obere Grenze für $|G|$, wie längs s_1, gilt a fortiori für alle ausserhalb s_1 liegenden Punkte des Bereichs S. Für einen Punkt, oder eine Curve, die sich dem Unstetigkeitspunkt von G auf eine Entfernung $r < r_1$ nähert, ist $|G|$ immer noch kleiner als der kleinere der beiden Werthe:

$$\frac{1}{r} + \frac{2(r_2 + r)}{r_2(r_2 - 3r)}, \qquad \frac{1}{r} + \frac{2(r_1 + r_2)}{r_2(r_2 - 3r_1)} \cdot \frac{2r}{r_1 - r}.$$

Genau ebenso, wie für $|G|$, findet man eine obere Grenze für $|G'|$ in einem vom Unstetigkeitspunkt verschiedenen Punkte des Bereichs S'.

Um jedoch Γ abzuschätzen, denke ich mir nach dem Schwarz'schen Verfahren zuerst nicht Γ selbst hergestellt, sondern ein Potential, welches zwar denselben Randbedingungen wie Γ genügt, im Innern aber nur an einer Stelle ξ in der Art unstetig wird wie $\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{r}$. Dieses Potential heisse $\Gamma_{\xi\alpha}^{\zeta}$.

Dasselbe lässt sich genau in derselben Weise abschätzen, wie G und G'. $\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}$ selbst gewinnt man aus $\Gamma_{\xi\alpha}^{\zeta}$ durch Integration:

$$\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0} = \int_{\eta}^{\zeta} \left(\Gamma_{\xi\alpha}^{\zeta} - \Gamma_{\xi\alpha}^{\zeta_0}\right) ds_{\xi},$$

wobei ds_{ξ} das Element irgend eines von η bis ξ ganz im Innern

des Bereichs verlaufenden Weges, α die Richtung dieses Elementes bezeichnet.

Man kann daher leicht, — was ich nicht näher ausführen will, — eine obere Grenze für den Werth von $\left|\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}\right|$ abschätzen, wenn ξ, η irgendwie fest im Innern des Bereichs vorgegeben sind und ζ, ζ_0 in angebbaren Entfernungen von den Punkten ξ, η bleiben.

Da nun immer $\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0} = \Gamma_{\zeta\zeta_0}^{\xi\eta}$ ist, so ist damit zugleich eine obere Grenze für $\left|\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}\right|$ als Function von ξ und η gefunden, wenn man ζ, ζ_0 vorgegeben sein lässt und ξ, η in endlicher Entfernung von ζ, ζ_0 variirt, z. B. wenn man ζ, ζ_0, η im Innern des Bereichs festhält und ξ längs des Randes bewegt.

§ 5.

Abschätzung von $G(\xi') - G(\xi)$.

In den Integralen

$$\int \left(G(\xi') - G(\xi)\right) \frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n_\xi}\, ds_\xi,$$

$$\int \left(\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi} \frac{ds'_\xi}{ds_\xi}\right) \Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}\, ds_\xi$$

bedeutet ξ einen auf einer Randcurve s des Bereiches Σ, also auch auf dem Rande von S' gelegenen Punkt, ξ' den ihm zugeordneten auf der Randcurve s' gelegenen Punkt; ds_ξ ist ein an der Stelle ξ gelegenes Randelement, ds'_ξ das entsprechende Randelement an der Stelle ξ'; ∂n_ξ bedeutet eine Differentiation normal zum Randelement ds_ξ, $\partial n'_\xi$ eine solche normal zu ds'_ξ, beidemal nach aussen gerichtet.

Für G ist ξ bezw. ξ' jetzt laufende Variable, während die irgendwo im Innern festliegende Unstetigkeitsstelle von G mit ζ_0 bezeichnet ist.

Da G an solchen Stellen der ζ-Ebene, welche in Bezug auf das Bereichnetz S identisch sind, genau dieselben Werthe besitzt, so kann man in den Integralen die Punkte und Elemente ξ' und ds'_ξ durch irgend welche bezüglich S mit ihnen identische Punkte und Elemente ersetzen, z. B. durch diejenigen Punkte und Elemente, welche nach § 1 den Punkten und Elementen ξ, ds_ξ unendlich benachbart sind. Diese Ersetzung denken wir uns im Folgenden immer vorgenommen.

Ich beweise hiernach zuerst folgende beiden Sätze:

Für jeden Randpunkt ξ, der sich in angebbarer nicht unendlich kleiner Entfernung von der nächsten im selben Blatt gelegenen Bereichecke befindet, lässt sich eine endliche Grösse g angeben, von der Art, dass die Ungleichung besteht:

$$|G(\xi') - G(\xi)| < \varepsilon g.$$

Eine Ungleichung derselben Art gilt a fortiori in der Umgebung einer Ecke mit der Amplitude $\lambda . 2\pi = (\lambda_1 + i\lambda_2) 2\pi$, — ich will die Amplitude der Substitution, welche in der Ecke ihren einen Fixpunkt hat, kurz Amplitude der Ecke nennen —, wenn $\lambda_1 \leqq 1$ ist.

2) *In der Umgebung einer Ecke α des Bereichs S mit der Amplitude $\lambda . 2\pi = (\lambda_1 + i\lambda_2) 2\pi$ lässt sich eine endliche Grösse g angeben, von der Bedeutung, dass*

$$|G(\xi') - G(\xi)| < \varepsilon \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} - 1} . g$$

ist, unter ϱ die Entfernung von der Ecke α verstanden.

Der Beweis dieser beiden Sätze ist ganz analog dem Beweis der entsprechenden Sätze des symmetrischen Falls, den ich im ersten Theil (Math. Ann. Bd. 45, S. 491—512) ausführlich discutirt habe; ich kann mich daher jetzt kürzer fassen, und ich will nur als Beispiel für die Beweismethode auf den Beweis des Satzes 2) für nichtparabolische Ecken etwas näher eingehen.

Sei α die betreffende Ecke des Bereichs S, β sei der andere Fixpunkt der zugehörigen Substitution, $\lambda . 2\pi = (\lambda_1 + i\lambda_2) 2\pi$ ihre Amplitude, absolut bestimmt, so dass $\lambda_1 . 2\pi$ die Winkelsumme des Cyklus ist. λ_1 ist also eine wesentlich positive Grösse

Es werde

$$\left(\frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \mathsf{Z} = r e^{i\varphi}$$

gesetzt, so dass $r = \text{const.}$ eine Loxodrome, eine Bahncurve der Transformation ist.

Nun sei r_0 ein endlicher Werth von der Eigenschaft, dass die Loxodrome $r = r_0$ von dem Bereich S nur die eine Ecke α abschneidet, und dass weder auf ihr, noch zwischen ihr und der Ecke α im Bereichnetz ein Unstetigkeitspunkt der Function G liegt. Dann kann man für $|G|$ längs dieser Loxodrome nach dem vorigen Paragraphen eine obere Grenze M abschätzen.

G gestattet eine Entwicklung

$$G = \Re(c_0 + c_1 \mathsf{Z} + c_2 \mathsf{Z}^2 + c_3 \mathsf{Z}^3 + \cdots),$$

oder, wenn ich

$$c_\nu = a_\nu + i b_\nu$$

setze:

$$G = a_0 \begin{array}{l} + a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + \cdots \\ - b_1 r \sin\varphi - b_2 r^2 \sin 2\varphi - \cdots. \end{array}$$

Hierbei ist

$$|a_0| < M, \quad |a_\nu| < \frac{2M}{r_0^\nu}, \quad |b_\nu| < \frac{2M}{r_0^\nu}, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

folglich für $\nu \geqq 1$:

$$|c_\nu| < \frac{M \cdot 2\sqrt{2}}{r_0^\nu}.$$

Der nach irgend einer Richtung t der ζ-Ebene genommene Differentialquotient $\frac{\partial G}{\partial t}$ ist seinem absoluten Werthe nach

$$\leqq |c_1 + 2c_2 Z + 3c_3 Z^2 + \cdots| \cdot \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|.$$

Hierin ist

$$|c_1 + 2c_2 Z + 3c_3 Z^2 + \cdots| < M \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{r_0}{(r_0 - r)^2},$$

$$\frac{dZ}{d\zeta} = Z \cdot \frac{\alpha - \beta}{\lambda(\zeta - \beta)} \cdot \frac{1}{\zeta - \alpha}.$$

Hieraus geht hervor, wenn man sich nur auf eine hinreichend kleine endliche Umgebung der Ecke, z. B. $r \leqq \frac{1}{2} r_0$ beschränkt, dass dann in dem ganzen Gebiet

$$|c_1 + 2c_2 Z + 3c_2 Z^2 + \cdots| < g_1,$$

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| < \frac{r}{\varrho} \cdot g_2, \quad (\varrho = |\zeta - \alpha|),$$

also

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < \frac{r}{\varrho} g_1 g_2$$

ist, unter g_1, g_2 angebbare endliche Grössen verstanden.

Um nun noch r als Function von ϱ abzuschätzen, setze ich

$$\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta} = \varrho \cdot c e^{i\psi}.$$

c und ψ liegen hierbei in der ganzen in Betracht kommenden Umgebung von α innerhalb angebbarer endlicher Grenzen.

Es ist dann

$$r = \left|\left(\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta}\right)^{\frac{1}{\lambda_1 + i\lambda_2}}\right| = \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \cdot e^{\frac{\lambda_1 \log c + \lambda_2 \psi}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}},$$

folglich

$$r \leqq \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \cdot g_3,$$

und also

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} - 1} \cdot g_1 g_2 g_3.$$

Mit Hülfe dieses Resultates findet man eine obere Grenze für $|G(\xi') - G(\xi)|$ in folgender Weise:

Ich verbinde die beiden unendlich benachbarten Punkte ξ und ξ' durch ein Curvenstück t, etwa durch eine gerade Linie; dann ist

$$G(\xi') - G(\xi) = \int^{\xi'} \frac{\partial G}{\partial t}\, dt.$$

Hierin ist $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ unterhalb der oben angegebenen Grenze gelegen. Es ist noch die Länge des Integrationsweges t abzuschätzen. Nach § 1 ist

$$\xi' - \xi = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon q},$$

wo p, q ihrem absoluten Werthe nach unterhalb angebbarer endlicher Grenzen liegen. Setze ich nun nur $\varepsilon < \left|\frac{1}{2q}\right|$ voraus, so wird

$$|\xi' - \xi| < \varepsilon\,|2p|,$$

und also

$$|G(\xi') - G(\xi)| < \varepsilon \cdot \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1} \cdot g_1 g_2 g_3\,|2p|,$$

womit meine Behauptung bewiesen ist.

Für parabolische Ecken bleibt der Satz ebenso richtig, wenn auch der Beweis etwas modificirt werden muss, ähnlich wie im symmetrischen Falle, worauf ich hier nicht näher eingehe.

§ 6.

Abschätzung von $\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}$.

Für die Abschätzung von

$$\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}$$

haben wir nicht nur den Unterschied der Argumente ξ und ξ', sondern auch den Unterschied in den Differentiationsrichtungen ∂n_ξ und $\partial n'_\xi$ und in den Längen der Elemente ds_ξ und ds'_ξ zu beachten.

Nach § 1 ist

$$\xi' - \xi = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon q}, \quad \frac{d\xi'}{d\xi} = \frac{1}{(1+\varepsilon q)^2}.$$

Ich setze

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \xi' = \xi_1' + i\xi_2',$$
$$d\xi = e^{i\alpha}\,.\,ds_\xi, \quad d\xi' = e^{i\alpha'}\,.\,ds'_\xi,$$

so dass α und α' die Richtungswinkel der Elemente ds_ξ, ds'_ξ sind. Ferner schreibe ich zur Abkürzung

$$\frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi_1} = G_1(\xi), \quad \frac{\partial G(\xi')}{\partial \xi_1'} = G_1(\xi'),$$
$$\frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi_2} = G_2(\xi), \quad \frac{\partial G(\xi')}{\partial \xi_2'} = G_2(\xi').$$

Dann ist

$$\frac{\partial G}{\partial n_\xi} = - G_1(\xi) \sin\alpha + G_2(\xi)\cos\alpha\,,$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'_\xi} = + G_1(\xi') \sin\alpha' - G_2(\xi')\cos\alpha',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi} = {} & \big(G_1(\xi') - G_1(\xi)\big)\sin\alpha - \big(G_2(\xi') - G_2(\xi)\big)\cos\alpha \\ & + \left(\frac{ds'_\xi}{ds_\xi} - 1\right)\big(G_1(\xi')\sin\alpha - G_2(\xi')\cos\alpha\big) \\ & + (\sin\alpha' - \sin\alpha)\, G_1(\xi')\frac{ds'_\xi}{ds_\xi} \\ & - (\cos\alpha' - \cos\alpha)\, G_2(\xi')\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}\,.\end{aligned}$$

Ich setze nun, wie schon zu Ende des vorigen Paragraphen, um mit bestimmten Vorstellungen zu rechnen, voraus, dass $\varepsilon < \left|\frac{1}{2q}\right|$ sei, was ich gewiss darf, da ja $|q|$ eine endliche obere, $\left|\frac{1}{2q}\right|$ also eine von 0 verschiedene untere Grenze besitzt. Setze ich $q = q' + iq''$, so ist dann ε zugleich auch $< \left|\frac{1}{2q'}\right|$ und $< \left|\frac{1}{2q''}\right|$. *Ich behaupte, dass unter der eben gemachten Voraussetzung über die Kleinheit von* ε

$$\left|\frac{ds'_\xi}{ds_\xi} - 1\right| < \varepsilon|6q|,$$

$$|\sin\alpha' - \sin\alpha| < \varepsilon|8q''|,$$

$$|\cos\alpha' - \cos\alpha| < \varepsilon|8q''|$$

ist.

Es ist nämlich erstens

$$\frac{ds'_\xi}{ds_\xi} = \frac{1}{|1+\varepsilon q|^2},$$

folglich

$$\frac{1}{(1+\varepsilon|q|)^2} \leq \frac{ds'_\xi}{ds_\xi} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon|q|)^2},$$

$$1 - \varepsilon|2q|\left\{2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right\} < \frac{ds'_\xi}{ds_\xi} < 1 + \varepsilon|2q|\left\{2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$1 - \varepsilon|6q| < \frac{ds'_\xi}{ds_\xi} < 1 + \varepsilon|6q|,$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Was die folgenden Ungleichungen betrifft, so gehe ich davon aus, dass

$$\frac{d\xi'}{d\xi} = \frac{ds'_\xi}{ds_\xi}\cdot e^{i(\alpha'-\alpha)} = \frac{1}{(1+\varepsilon q)^2}$$

ist. Setze ich $q = q' + iq''$, so folgt hieraus

$$(1 + \varepsilon q') + i\varepsilon q'' = \sqrt{\frac{ds_\xi}{ds'_\xi}}\left(\cos\frac{\alpha' - \alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha' - \alpha}{2} = -\frac{\varepsilon q''}{1 + \varepsilon q'},$$

$$|\alpha' - \alpha| < 2\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right| = \frac{\varepsilon\,|2q''|}{1 + \varepsilon q'},$$

und da $\varepsilon < \left|\frac{1}{2q'}\right|$ ist:

$$|\alpha' - \alpha| < \varepsilon\,|4q''|.$$

Ferner ist

$$|\sin\alpha' - \sin\alpha| < |\alpha' - \alpha| + \frac{1}{2}\,|\alpha' - \alpha|^2,$$

$$|\cos\alpha' - \cos\alpha| < |\alpha' - \alpha| + \frac{1}{2}\,|\alpha' - \alpha|^2,$$

folglich

$$|\sin\alpha' - \sin\alpha| < \varepsilon\,|4q''|\,(1 + \varepsilon\,|2q''|),$$
$$|\cos\alpha' - \cos\alpha| < \varepsilon\,|4q''|\,(1 + \varepsilon\,|2q''|).$$

Da $\varepsilon < \left|\frac{1}{2q''}\right|$ ist, so ist in der That die rechte Seite jeder dieser beiden Ungleichungen $< \varepsilon\,|8q''|$, wie oben behauptet.

Es sind nun in dem Ausdruck für $\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}$ obere Grenzen für $G_1(\xi')$, $G_2(\xi')$, sowie für $G_1(\xi') - G_1(\xi)$ und $G_2(\xi') - G_2(\xi)$ zu finden.

$G_1(\xi')$ und $G_2(\xi')$ sind nur specielle Fälle des im vorigen Paragraphen bereits abgeschätzten $\frac{\partial G}{\partial t}$. Wir wissen also:

$G_1(\xi')$ und $G_2(\xi')$ besitzen für Punkte, die sich in angebbarer nicht verschwindender Entfernung von der nächsten im selben Blatt gelegenen Ecke befinden, eine endliche obere Grenze g ihres absoluten Werthes.

In der Umgebung einer Ecke mit der Amplitude $\lambda . 2\pi = (\lambda_1 + i\lambda_2)2\pi$ besitzen $G_1(\xi')$, $G_2(\xi')$ eine angebbare obere Grenze von der Gestalt

$$\varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} - 1} . g.$$

Diese Sätze mit den für $\left|\frac{ds'_\xi}{ds_\xi} - 1\right|$, $|\sin\alpha' - \sin\alpha|$, $|\cos\alpha' - \cos\alpha|$ gefundenen zusammen führen zu folgendem Ergebniss:

Die drei letzten Zeilen in dem Ausdruck für $\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}$ besitzen dem absoluten Werthe nach für jeden nicht in der Umgebung einer Ecke liegenden Randpunkt ξ eine angebbare obere Grenze von der Form

$$\varepsilon g,$$

in der Umgebung einer Ecke mit der Amplitude $(\lambda_1 + i\lambda_2)2\pi$ *eine obere Grenze von der Gestalt*

$$\varepsilon \,.\, g^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1} \,.\, g\,.$$

Es kommt also jetzt nur noch darauf an, eine obere Grenze für die absoluten Werthe von $G_1(\xi') - G_1(\xi)$ und von $G_2(\xi') - G_2(\xi)$ abzuschätzen.

Bedeutet H die zu G conjugirte Potentialfunction, $G + iH$ also die schon auf S. 211 benutzte Reihe:

$$G + iH = c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + c_3 Z^3 + \cdots, \qquad |c_\nu| < \frac{M.2\sqrt{2}}{r_0^{\,\nu}} (\nu \geqq 1),$$

so ist $G_1(\zeta)$ der reelle Theil, $G_2(\zeta)$ der mit i behaftete Theil, negativ genommen, der Function

$$\frac{d(G+iH)}{d\zeta} = (c_1 + 2c_2 Z + 3c_3 Z^2 + \cdots)\frac{dZ}{d\zeta}.$$

Hierin ist, wenn es sich um einen gewöhnlichen Randpunkt ξ handelt, $Z = \zeta - \xi$ zu setzen, wenn es sich um die Umgebung einer Ecke α handelt

$$Z = \left(\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\beta}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Der Differentialquotient von $G_1(\zeta)$ sowohl, wie der von $G_2(\zeta)$ nach irgend einer beliebigen Richtung t der ζ-Ebene ist daher dem absoluten Werthe nach höchstens gleich

$$\left|\frac{d^2(G+iH)}{d\zeta^2}\right| = |2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3 Z + 4\cdot 3\cdot c_4 Z^2 + \cdots|\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|^2$$
$$+ |c_1 + 2c_2 Z + 3c_3 Z^2 + \cdots|\left|\frac{d^2 Z}{d\zeta^2}\right|.$$

Daraus folgt, indem man $Z = \zeta - \xi$ setzt, für die Umgebung eines gewöhnlichen Randpunktes, dass

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial G_2}{\partial t}\right| < g_1,$$

also

$$|G_1(\xi') - G_1(\xi)| < \varepsilon g,$$
$$|G_2(\xi') - G_2(\xi)| < \varepsilon g$$

ist, unter g_1, g angebbare endliche Grössen verstanden.

In der Umgebung einer Ecke ist

$$Z = \left(\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\beta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = re^{i\varphi},$$

$$\left|\frac{dZ}{d\xi}\right|^2 < \frac{r^2}{\varrho^2}\cdot g_1,$$

$$\left|\frac{d^2 Z}{d\xi^2}\right| < \frac{r}{\varrho^2}\cdot g_2{}^{*}),$$

$$r \leqq \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\cdot g_3.$$

und folglich

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial G_2}{\partial t}\right| < \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-2}\cdot g_4,$$

und hiernach

$$|G_1(\xi') - G_1'(\xi)| < \varepsilon\,.\,\varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-2}\,.\,g,$$

$$|G_2(\xi') - G_2(\xi)| < \varepsilon\cdot\varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-2}\,.\,g.$$

Das Gesammtresultat der Betrachtungen dieses Paragraphen ist also folgendes:

Für jeden Randpunkt ξ, der in nicht verschwindender angebbarer Entfernung von den Ecken liegt, lässt sich eine endliche Grösse g finden von der Art, dass

$$\left|\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}\right| < \varepsilon g$$

ist, für jeden in der Umgebung einer Ecke α des Bereiches S mit einer Substitution von der Amplitude $(\lambda_1 + i\lambda_2)2\pi$ in der Entfernung ϱ von derselben gelegenen Punkt ξ dagegen lässt sich eine endliche Grösse g angeben, so dass

$$\left|\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{\partial s_\xi}\right| < \varepsilon\,.\,\varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-2}\,.\,g$$

ist.

Auf die Besonderheiten, welche sich bei dem Beweise dieses Satzes für die Umgebung parabolischer Ecken einstellen, will ich hier der Kürze halber nicht eingehen.

Ich will nur noch kurz hinzufügen, was über die Werthe von $\frac{\partial G}{\partial n_\xi}$ und $\frac{\partial G'}{\partial n_\xi}$ in den auf die Bogenstücke σ bezüglichen Integralen zu sagen ist.

Längs eines solchen Bogenstückes ist, wie wir jetzt wissen,

---

*) Wenn man $\lambda \gtrless 1$ voraussetzt; der Fall einer parabolischen Ecke mit $\lambda = 1$ erheischt andere Formeln, doch das Resultat bleibt dasselbe, wie im allgemeinen Fall.

$$\frac{\partial G}{\partial n_\xi} < \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1}\cdot g,$$

resp.

$$\frac{\partial G'}{\partial n_\xi} < \varrho'^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1}\cdot g_1',$$

unter ϱ die Entfernung von der Ecke α des Bereichs S, unter ϱ' diejenige von der Ecke α' des Bereichs S' verstanden.

Nun besitzt ϱ sowohl wie ϱ' längs σ eine mit ε in der ersten Ordnung verschwindende angebbare obere sowohl als untere Grenze; indem man die erste oder die zweite einsetzt, je nachdem der Exponent positiv oder negativ ist, bekommt man

$$\frac{\partial G}{\partial n_\xi} < \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1}\cdot g,$$

$$\frac{\partial G'}{\partial n_\xi} < \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1}\cdot g'$$

§ 7.

Abschätzung von Γ und $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$.

Da sich für die Werthe von $\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}$ als Function von ξ längs irgend einer die beiden Punkte ζ und ζ_0 vermeidenden Curve eine obere Grenze des absoluten Werthes angeben lässt, so kann man auch $\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}$ und $\frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n_\xi}$ für Randpunkte ξ dem absoluten Werthe nach abschätzen. Es ergeben sich so ohne Weiteres die Sätze:

1) *Längs des ganzen Randes von Σ, sowohl längs der Stücke s, wie längs der Stücke σ lässt sich eine endliche Grösse g angeben, derart, dass überall*

$$\left|\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}\right| < g$$

ist.

2) *Für jeden in angebbarer nicht unendlich kleiner Entfernung von der nächsten Ecke liegenden Randpunkt ξ lässt sich eine endliche Grösse g angeben, so dass*

$$\left|\frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n_\xi}\right| < g$$

ist.

Es bleibt also nur noch übrig, auch für diejenigen Punkte ξ der Randcurven s, welche in der Umgebung von Ecken liegen, eine obere Grenze für $\frac{\partial \Gamma}{\partial n_\xi}$ zu finden.

Wenn die Ecke α' des Bereichs S' einem Cyklus angehört, so ergeben die Ecken des Cyklus, wenn man sie alle vermittelst der geeigneten Substitutionen an die Ecke α' überträgt, dort zusammen einen Winkelraum, dessen Schenkelcurven s und s' durch die zur Ecke gehörige Substitution von der Amplitude $\lambda' 2\pi = (\lambda_1' + i\lambda_2')\, 2\pi$ zusammengehören.

Führt man ebendieselbe Uebertragung bei dem Bereich Σ aus, so erhält man denselben Winkelraum mit derselben Zuordnung der Schenkel, nur dass der Scheitel des Winkels durch eine sehr enge Loxodrome abgestutzt ist, welche vom Punkte α' eine mit ε in angebbarer Weise in der ersten Ordnung verschwindende Minimal- sowohl, wie Maximalentfernung besitzt.

Die Function

$$\Xi = \left(\frac{\xi - \alpha'}{\xi - \beta'}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = re^{i\varphi}$$

bildet diesen abgestutzten Winkelraum derart auf das Aeussere eines verschwindend kleinen Kreises ab, dass die abstutzende Loxodrome σ genau durch die volle Peripherie des kleinen Kreises wiedergegeben wird, und dass die beiden Schenkelcurven s, s' mit ihren entsprechenden Punkten in der Ξ-Ebene sich genau als die Ufer eines von dem kleinen Kreis nach aussen verlaufenden Einschnittes zusammenfügen.

Der Radius des kleinen Kreises, welcher aus der Loxodrome σ entsteht, heisse r_1; r_1 verschwindet mit ε stetig in der Ordnung $\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2}$ mit angebbarem Coefficienten.

Γ muss nun, da es längs s und s' automorphe Grenzbedingungen befriedigt, eine Entwicklung folgender Art gestatten:

$$\Gamma = \Re(\cdots + c_{-2}\Xi^{-2} + c_{-1}\Xi^{-1} + c_0 + c_1\Xi + c_2\Xi^2 + \cdots + c\log\Xi),$$

oder, wenn ich $c_\nu = a_\nu + i b_\nu$ schreibe:

$$\Gamma = \begin{array}{l} \cdots + a_{-2}r^{-2}\cos 2\varphi + a_{-1}r^{-1}\cos\varphi + a_0 + a_1 r\cos\varphi + a_2 r^2\cos\varphi + \cdots \\ \cdots + b_{-2}r^{-2}\sin 2\varphi + b_{-1}r^{-1}\sin\varphi \qquad - b_1 r\sin\varphi - b_2 r^2 \sin 2\varphi + \cdots \\ \qquad\qquad + a\log r - b\varphi. \end{array}$$

Dabei muss wegen $\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)_{r=r_1} = 0$

$$a_{-\nu} = a_\nu \cdot r_1^{2\nu}, \quad b_{-\nu} = -\, b_\nu r_1^{2\nu}, \quad a = 0$$

und wegen der automorphen Randbedingungen $b = 0$ sein.

Bedeutet $r = r_0$, wie in § 5, eine Loxodrome, welche von dem Bereich die Ecke sammt einer endlichen Umgebung, doch ohne eine weitere Ecke und ohne einen Unstetigkeitspunkt ξ oder ξ_0 der Func-

tion $\Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}$ abschneidet, und bedeutet $\bar{\Gamma}$ die Werthe von Γ als Function von ξ längs dieser Curve, so ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\Gamma} \,.\, d\varphi, \qquad \begin{aligned} a_\nu r_0^\nu + a_{-\nu} r_0^{-\nu} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\Gamma} \cos \nu\varphi \,.\, d\varphi, \\ -\, b_\nu r_0^\nu + b_{-\nu} r_0^{-\nu} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\Gamma} \sin \nu\varphi \,.\, d\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgen die Ungleichungen:

$$|a_0| < M, \qquad \begin{aligned} |a_\nu|, |b_\nu| &< \frac{2M}{r_0^\nu} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2\nu}} < \frac{2M}{r_0^\nu}, \\ |a_{-\nu}|, |b_{-\nu}| &< \frac{2M}{r_0^\nu} \cdot \frac{r_1^{2\nu}}{1+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2\nu}} < \frac{2M}{r_0^\nu} \cdot r_1^{2\nu}, \end{aligned}$$

und hieraus für $\nu \geqq 1$:

$$|c_\nu| < \frac{M \,.\, 2\sqrt{2}}{r_0^\nu}, \qquad |c_{-\nu}| < \frac{M \,.\, 2\sqrt{2}}{r_0^\nu} \,.\, r_1^{2\nu}.$$

Nun ist, unter ∂t eine Differentiation in irgend einer beliebigen Richtung verstanden:

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right| \leqq |\cdots - 2c_{-2}\Xi^{-3} - c_{-1}\Xi^{-2} + c_1 + 2c_2\Xi + \cdots| \cdot \left|\frac{d\Xi}{d\xi}\right| \cdot$$

Für $\left|\frac{d\Xi}{d\xi}\right|$ findet man, wie früher, eine obere Grenze

$$\left|\frac{d\Xi}{d\xi}\right| < \varrho'^{\,\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1} \cdot g,$$

unter ϱ' den Abstand von der Ecke α' verstanden, und wenn man dies, sowie die für c_ν, $c_{-\nu}$ angegebenen Ungleichungen benutzt, wird

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right| &< M \cdot g \cdot 2\sqrt{2}\left(\cdots + \frac{2r_1^4}{r_0^2 r^3} + \frac{r_1^2}{r_0 r^2} + \frac{1}{r_0} + \frac{2r}{r_0^2} + \cdots\right) . \,\varrho'^{\,\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1} \\ &= \frac{M.g.2\sqrt{2}}{r_0}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{r_0}\right)^2} + \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2}{\left(1-\frac{r_1^2}{r_0 r}\right)^2}\right) \cdot \varrho'^{\,\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1}. \end{aligned}$$

Da für das ganze in Betracht kommende Gebiet $r \geqq r_1$ ist, so kann ich auch schreiben

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right| < \frac{Mg\,2\sqrt{2}}{r_0}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{r}{r_0}\right)^2} + \frac{1}{\left(1-\frac{r_1}{r_0}\right)^2}\right) \cdot \varrho'^{\,\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1}.$$

Ich kann nun gewiss ε so klein annehmen, dass r_1, welches ja

mit ε stetig verschwindet, $< \frac{1}{2} r_0$ ist. Beschränke ich mich überdies nur auf die jedenfalls endliche Umgebung der Ecke, welche durch $r_1 \leqq r \leqq \frac{1}{2} r_0$ repräsentirt ist, so wird der Klammerausdruck < 8, und man bekommt

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right| < \frac{M.g.16\sqrt{2}}{r_0} \cdot \varrho'^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1},$$

womit wir schliesslich den Satz gewonnen haben:

In der Nähe einer Ecke α' mit der Amplitude $\lambda' 2\pi = (\lambda_1' + i\lambda_2') 2\pi$ des Bereichs S' d. h. längs der Curven σ und in ihrer Nachbarschaft lässt sich immer eine endliche Grösse g angeben von der Art, dass

$$\left|\frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0}}{\partial n_\xi}\right| < \varrho'^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1} \cdot g$$

ist, unter ϱ' die Entfernung des Punktes ξ von der Ecke des Bereichs S' verstanden.

§ 8.

Abschätzung des Integrals.

Wir haben jetzt alle Mittel zusammen, um das auf Seite 207 aufgestellte Integral für $\delta(\xi)$ abschätzen zu können.

Wir theilen das Gesammtintegral in eine Summe einzelner Theilintegrale

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n,$$

so dass der Integrationsweg für δ_0 alle solchen Randpunkte umfasst, welche weiter als in einer gewissen endlichen, wenn auch beliebig kleinen Entfernung von den Ecken liegen, während $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ immer nur die Umgebung je einer einzelnen Ecke umfassen.

Im Integral δ_0, welches keine auf die Curvenstücke σ bezüglichen Elemente enthält, ist nach den Ergebnissen der Paragraphen 5—7 der Integrand seinem absoluten Werthe nach durchweg $< \varepsilon g$, unter g eine angebbare endliche Grösse verstanden. Da man auch die Länge des Integrationsweges als endlich voraussetzen kann — denn ein Hindurchziehen der Begrenzung von S durch ∞ kann man immer, sei es durch erlaubte Abänderung, sei es durch eine lineare Transformation vermeiden — so ist damit der Satz bewiesen:

Es lässt sich stets eine endliche Grösse g_0 angeben, so dass

$$|\delta_0| < \varepsilon g_0$$

ist.

Nunmehr betrachten wir genauer den Theil des Integrals δ, welcher sich auf die Umgebung einer einzelnen Ecke bezieht, z. B. das Integral δ_1.

Die Begrenzung von Σ in der Umgebung der Ecke α_1 besteht aus einem kleinen Curvenstück σ, dessen Länge mit ε in der ersten Ordnung verschwindet, und aus zwei seitlichen Curven s, s' von endlicher Länge, von denen beide oder eine oder auch keine die Benennung s (die anderen s') tragen.

Achten wir zuerst auf denjenigen Theil des Integrals δ_1, der sich auf das unendlich kleine Curvenstück σ bezieht!

Hier ist nach § 6

$$\frac{\partial G}{\partial n_\xi} < \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1} g_1, \quad \frac{\partial G'}{\partial n_\xi} < \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1} \cdot g_1',$$

$$\Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta} < g_2$$

und also, da

$$\sigma < \varepsilon g_3$$

ist,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G}{\partial n_\xi} \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}\, d\sigma_\xi\right| < \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} \cdot \frac{g_1 g_2 g_3}{2\pi},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G'}{\partial n_\xi} \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}\, d\sigma_\xi\right| < \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}} \cdot \frac{g_1' g_2 g_3}{2\pi}.$$

Längs der Curven s, falls solche von der Ecke überhaupt auslaufen, ist, unter ϱ die Entfernung von der Ecke α_1 des Bereichs S, unter ϱ' die Entfernung von der Ecke α_1' des Bereichs S' verstanden:

$$|G(\xi') - G(\xi)| < \varepsilon\, \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1} \cdot g_1 \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}\right| < \varepsilon \cdot \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-2} \cdot g_1'.$$

$$\left|\frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}}{\partial n_\xi}\right| < \varrho'^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1} \cdot g_2, \qquad \left|\Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}\right| < g_2',$$

folglich

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int \left(G(\xi') - G(\xi)\right) \frac{\partial \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}}{\partial n_\xi}\, ds_\xi\right| < \frac{g_1 g_2}{2\pi} \cdot \varepsilon \int \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-1} \cdot \varrho'^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}-1} . ds,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\partial G}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G}{\partial n'_\xi}\frac{ds'_\xi}{ds_\xi}\right) \Gamma^{\zeta\zeta_0}_{\xi\eta}\, ds_\xi\right| < \frac{g_1' g_2'}{2\pi} \cdot \varepsilon \int \varrho^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}-2} \cdot ds.$$

Wir müssen nun behufs Abschätzung dieser Integrale ϱ, ϱ', ds in Beziehung zu einander setzen.

Die Curven s sind noch in hohem Grade willkürlich, da wir sie innerhalb weiter Grenzen beliebig verzerren dürfen, wenn wir nur

auch die Curven s' in entsprechender Weise verzerren. Wir können z. B. unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Curven s innerhalb der ganzen für ϑ_1 in Betracht kommenden Umgebung der Ecken α_1, α_1' geradlinig genau auf den Punkt α_1' zustreben, so dass man geradezu

$$\varrho' = s$$

setzen kann.

Es sei nun $\varepsilon\varrho_0$ die Entfernung der Punkte α_1 und α_1', welche ja mit ε mindestens in der ersten Ordnung verschwindet.

Man kann dann die Abstutzungscurve σ unbeschadet der Forderung, dass sie mit ε in der ersten Ordnung verschwinde, jedenfalls so weit wählen, dass sie sich der Ecke α_1' des Bereichs S' höchstens bis auf die Entfernung $2 \,.\, \varepsilon\varrho_0$ nähert, so dass also

$$s = \varrho' \geqq 2\varepsilon\varrho_0$$

bleibt. Dann ist auch längs des ganzen Integrationsweges:

$$\frac{1}{2}s \leqq \varrho' - \varepsilon\varrho_0 \leqq \varrho \leqq \varrho' + \varepsilon\varrho_0 \leqq \frac{3}{2}s.$$

In unsere Integrale werden wir also jetzt unbeschadet der Richtigkeit der angegebenen Ungleichungen statt ϱ' den Buchstaben s und statt ϱ entweder $\frac{1}{2}s$ oder $\frac{3}{2}s$ einführen können, je nachdem der Exponent von ϱ in dem betreffenden Integral negativ oder positiv ist. Ausserdem kann ich die Integration, auch wenn der kleinste Werth von s grösser als $2\varepsilon\varrho_0$ sein sollte, doch von $2\varepsilon\varrho_0$ an erstrecken, da hierdurch nur positive Elemente zu den Integralen hinzukommen, welche die Ungleichungen nicht stören. Ist s_1 der grösste Werth von s, eine jedenfalls angebbare endliche Grösse, so gehen mithin die rechten Seiten unserer Ungleichungen in jedem Fall in Ausdrücke folgender Art über:

$$g \cdot \varepsilon \int\limits_{\varepsilon . 2\varrho_0}^{s_1} s^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2} - 2} ds,$$

$$g' \cdot \varepsilon \int\limits_{\varepsilon . 2\varrho_0}^{s_1} s^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} - 2} ds.$$

Für die Ausführung der Integration sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$1)\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} \gtrless 1, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2} \gtrless 1,$$

$$2)\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} = 1, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2} > 1,$$

$$3)\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} < 1, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2} = 1,$$

Im Falle 1) erhält man Ausdrücke der Gestalt:

$$g_1 \varepsilon + g_2 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}},$$

$$g_1' \varepsilon + g_2' \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}},$$

im Falle 2):

$$g_1 \varepsilon + g_2 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}},$$

$$g_1' \varepsilon + g_2' \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},$$

im Falle 3):

$$g_1 \varepsilon + g_2 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},$$

$$g_1' \varepsilon + g_2' \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}.$$

Die beiden Ausdrücke hat man jedesmal zu addiren und noch die von dem Curvenstück σ herrührenden Ausdrücke:

$$g_3 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}, \qquad g_3' \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}}$$

hinzuzufügen. Man findet so Summen folgender Art:

$$1) \quad g_1 \varepsilon + g_2 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} + g_3 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}} + g_4 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}},$$

$$2) \quad g_1 \varepsilon + g_2 \cdot \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} + g_3 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}} + g_4 \cdot \varepsilon^{1 + \frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}},$$

$$3) \quad g_1 \varepsilon + g_2 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} + g_3 \cdot \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}} + g_4 \cdot \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \cdot$$

Man sieht, dass in jedem der drei Fälle δ_1 mit ε stetig verschwindet, da ja der Fall eines hyperbolischen Zipfels, in dem allein $\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ verschwinden könnte, ausgeschlossen wird.

Die Ordnung des Verschwindens von δ_1 wird durch den kleinsten der Exponenten von ε in obigen Ausdrücken gegeben, wobei die Ordnung von $\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$ immer niedriger als 1, aber höher als jeder echte Bruch zu zählen ist. Berücksichtigt man, dass $\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ und $\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2}$ nur beliebig wenig von einander verschieden sind, so ergeben sich folgende drei Fälle als möglich:

a) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 1$: $\qquad |\delta_1| < \varepsilon g$;

b) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 1$: $\qquad |\delta_1| < \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \cdot g$ oder $< \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}} \cdot g$,

je nachdem $\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2} \geqq 1$ oder < 1 ist:

c) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} < 1$: $\qquad |\delta_1| < \varepsilon^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} \cdot g$ oder $< \varepsilon^{\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2}} \cdot g$,

je nachdem $\frac{\lambda_1'}{\lambda_1'^2+\lambda_2'^2} \geqq \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ oder $< \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ ist.

Auf diese Weise kann man zu jedem der Bestandtheile $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots \delta_m$ von δ die Ordnung des Verschwindens mit ε und eine obere Grenze für den absoluten Werth des Coefficienten des Verschwindens angeben. Die niedrigste Ordnung, die dabei herauskommt, ist die Ordnung von δ selbst.

Das Schlussresultat dieser ganzen Betrachtung ist daher folgendes: *Wird ein Fundamentalbereich S um unendlich kleine Grössen von der Ordnung ε abgeändert, so ändert sich ein Elementarpotential G_ξ^ζ, dessen Unstetigkeitsstelle ξ im Innern des Bereichs in angebbarer Entfernung vom Rande liegt und bei der Abänderung sammt der Art des Unendlichwerdens festgehalten wird, in jedem im Innern des Bereichs in angebbarer Entfernung vom Rande gelegenen Punkte ζ um weniger als eine kleine Grösse $\varepsilon^\mu \cdot g\left(ev.\ \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \cdot g\right)$, worin μ und g durch eine endliche Anzahl von Schritten abschätzbare den Ungleichungen*

$$0 < \mu \leqq 1, \qquad 0 < g < +\infty$$

genügende Zahlen sind.

§ 9.

Stetigkeit der automorphen Functionen.

Von hier aus ist es nun ein Leichtes, die stetige Aenderung auch der automorphen Functionen bei Aenderung des Fundamentalbereichs zu beweisen.

Zuerst kann man sofort die über die Lage der Punkte ξ, ζ gemachten Einschränkungen, dass beide im Innern von S in angebbarer Entfernung vom Rande liegen sollten, als unwesentlich beseitigen.

Liege nämlich ζ oder ξ auf dem Rande von S, aber nicht in unmittelbarer Nähe einer Ecke, so bedenke man, dass ja der Rand des Fundamentalbereichs noch sehr willkürlich ist, indem man jede Randcurve innerhalb weiter Grenzen verzerren kann, wenn man nur mit der zugeordneten Randcurve die entsprechende Verzerrung vornimmt. Durch solche „erlaubte Abänderung" des Bereichs kann man immer bewirken, dass sowohl ζ wie ξ im Innern des Bereichs in angebbarer Entfernung vom Rande liegt.

Liegt ferner ζ in unmittelbarer Nähe einer singulären Ecke des Bereichs S, so führt das im 1. Theil S. 535 angegebene Verfahren ebenfalls zum Beweise der Stetigkeit von G_ξ^ζ in einem solchen Punkte ζ.

Nur der Unstetigkeitsstelle ξ muss man im Allgemeinen die Beschränkung auferlegen, in endlicher angebbarer Entfernung von jeder Ecke zu bleiben, da man sonst die Definition von G_ξ^ζ noch etwas modificiren müsste. Für meine Zwecke ist dies aber nicht nöthig, da ich ξ nicht in eine solche Ecke rücken zu lassen brauche.

Ferner beweist man leicht aus dem automorphen Verhalten von G_ξ^ζ, wie im 1. Theil § 19, dass G_ξ^ζ auch in jedem Punkte ζ eines solchen Bereiches im Netz, den man von dem Ausgangsbereiche S aus mit Durchsetzung einer endlichen Anzahl von Bereichen erreicht, sich stetig ändert; nur mit Ausnahme der mit ξ congruenten Unstetigkeitspunkte von G_ξ^ζ, in denen die Stetigkeit der Abänderung ungleichmässig wird.

Ferner zeigt man, dass das zu G_ξ^ζ conjugirte Potential H_ξ^ζ, welches aus G durch eine Quadratur herzustellen ist, sich in jedem Punkte, der nicht mit ξ congruent ist, stetig ändert, dass also auch das normirte Integral zweiter Gattung

$$Y_\xi^\zeta = G_\xi^\zeta + iH^{\xi\zeta},$$

sowie die Perioden desselben sich stetig ändern.

Hieraus folgt wieder, dass die durch Integration aus Y_ξ^ζ herzustellenden normirten Integrale erster und dritter Gattung, sowie deren Perioden sich stetig ändern.

Endlich kann man beliebig viele automorphe Functionen, sei es aus Integralen Y_ξ^ζ allein, sei es aus diesen und aus Integralen erster Gattung, linear zusammensetzen, indem man nur die Zusammensetzungscoefficienten bestimmten mit den Perioden gebildeten linearen Gleichungen unterwirft; da die Coefficienten dieser linearen Gleichungen nach dem Bisherigen sich stetig ändern, so kann man die ihnen zu unterwerfenden Zusammensetzungscoefficienten der automorphen Functionen, und also auch die automorphen Functionen selbst so einrichten, dass sie sich bei stetiger Abänderung des Bereichs stetig abändern.

Hat man dies erst für irgend zwei automorphe Functionen x, y nachgewiesen, durch welche sich alle übrigen rational ausdrücken, so ist dasselbe damit für das ganze System automorpher Functionen nachgewiesen.

Auf die Beweise dieser Sätze brauche ich hier nicht nochmals einzugehen, da die Betrachtungen des 1. Theils § 19 ff. sich fast ungeändert auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen. Ich will nur das Resultat noch einmal kurz zusammenstellen:

Man kann die willkürlichen Constanten in allen automorphen Functionen und Integralen eines Fundamentalbereichs S so einrichten, dass sich die Functionen und Integrale bei stetiger Abänderung des

Bereichs in jedem Punkte ζ, der in angebbarer Entfernung von jedem Unstetigkeitspunkt der betreffenden Functionen liegt, stetig ändern.

Damit habe ich das Ziel erreicht, welches ich mir in dieser Arbeit gesteckt hatte. In den nächsten Paragraphen will ich nur noch anhangsweise einerseits auf den wichtigsten Specialfall, den der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche, besonders eingehen, andererseits untersuchen, was für Verhältnisse sich bei gewissen besonders häufig vorkommenden Ausartungen eines Fundamentalbereichs einstellen, ob bei einer solchen Ausartung des Bereichs das Functionensystem sich noch stetig ändert oder nicht.

§ 10.

Specialfall der geschlossenen Riemann'schen Fläche.

Die vorstehenden Betrachtungen finden wohl ihre wichtigste Anwendung auf die geschlossenen Riemann'schen Flächen mit endlicher Zahl von Blättern und von Verzweigungspunkten. Hier heisst der Satz:

Wenn man die Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche mit endlicher Zahl von Blättern und von Verzweigungspunkten continuirlich wandern lässt, so ändern sich die zugehörigen algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale jedenfalls so lange stetig, als nicht mehrere Verzweigungspunkte zusammenrücken.

Der Beweis dieses Satzes ist zwar in dem Beweis des allgemeinen Satzes bereits enthalten; doch ist es der Mühe werth, zu sehen, wie sich hier die allgemeinen Methoden vereinfachen; auch kann man in Folge dieser Vereinfachungen weiter durchdringen, insbesondere kann man die Ordnung der Aenderung mit der Aenderung der Verzweigungspunkte schärfer bestimmen, als es mir im allgemeinen Fall bisher möglich gewesen ist.

S möge die ursprüngliche, S' die abgeänderte Fläche sein. Irgend ein Verzweigungspunkt α sei von dem entsprechenden Verzweigungspunkt α' der Fläche S' um nicht mehr als ε, bestimmter gesagt, um $2\vartheta\varepsilon$ $\left(0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}\right)$ entfernt.

Den Vergleichsbereich Σ construire ich, indem ich immer um den Mittelpunkt der zwei Punkte α, α' verbindenden Strecke $2\vartheta\varepsilon$ als Centrum eine Kreislinie σ vom Radius ε construire, welche sich sowohl auf S, wie auf S' nach λ-maliger Umlaufung schliesst, unter λ die Zahl der in α bezw. α' zusammenhängenden Blätter verstanden. Das Innere dieser Kreislinie denke ich mir von S oder S' ausgeschnitten, und der übrig bleibende Bereich ist dann Σ.

Das Integral von S. 207 reducirt sich jetzt auf

$$G_{\zeta_0}^{\zeta} - G_{\zeta_0}'^{\zeta} = \sum \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial G}{\partial n_\xi} - \frac{\partial G'}{\partial n_\xi}\right) \Gamma_{\xi\eta}^{\zeta\zeta_0} \cdot d\sigma_\xi .$$

Da die Minimalentfernung $(1-\vartheta)\varepsilon$ der Kreislinie σ von α sowohl wie von α' mit ε in angebbarer Weise in der ersten Ordnung verschwindet, so lässt sich eine endliche Zahl g bezw. g' angeben derart, dass längs der ganzen einzelnen Kreislinie

$$\left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| < g\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}-1}, \qquad \left|\frac{\partial G'}{\partial n}\right| < g'\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

ist; ferner lässt sich eine Grösse g'' angeben, so dass $\Gamma < g''$ ist. Es ist dann das von der einzelnen Kreislinie herrührende Integral dem absoluten Werthe nach

$$< g''(g+g')\cdot\lambda\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}.$$

In gleicher Weise findet man für jedes der auf die einzelnen Kreislinien σ bezüglichen Integrale eine obere Grenze des absoluten Werthes, und wenn man alle zusammenfasst, erhält man den Satz:

Wenn λ die grösste Zahl von Blättern ist, die in einem variablen Verzweigungspunkt zusammenhängen, so lässt sich stets eine endliche Grösse g angeben, von der Art, dass für jede beliebige Lage des Punktes ζ in der Fläche

$$|G-G'| < g\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$$

ist.

Der Satz gilt für jede beliebige Lage des Punktes ζ, auch wenn man ζ in einen Verzweigungspunkt der Fläche S oder S' wandern lässt. Bezüglich ξ dagegen mag, um Complicationen zu vermeiden, an der Beschränkung festgehalten werden, dass es in angebbarer Entfernung vom nächsten Verzweigungspunkt liege.

Wenn wir hier als obere Grenze für $|G-G'|$ eine Grösse finden, welche mit ε in der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ verschwindet, so ist damit natürlich nur eine untere Grenze für die Ordnung des Verschwindens von $G-G'$ gegeben. In der That ist zu vermuthen, dass $G-G'$ in solchen Punkten ζ, die in angebbarer Entfernung vom nächsten Verzweigungspunkt liegen, mit ε in der ersten Ordnung verschwindet. Nur die grosse Umständlichkeit der Betrachtung hat mich im allgemeinen Fall verhindert, diese Frage nach der genauen Ordnungsbestimmung von $G-G'$ weiter zu verfolgen. Um so wesentlicher ist es, wenigstens in dem vorliegenden einfacheren Fall die Frage nach der Ordnung von $G-G'$ vollständig beantworten zu können.

Wenn α bezw. α' eine Ecke mit der höchsten Zahl λ daselbst zusammenhängender Blätter ist, so wird die Ordnung von $G-G'$ gewiss nicht niedriger sein, als die desjenigen Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int^{\bullet}\left(\frac{\partial G}{\partial n}-\frac{\partial G'}{\partial n}\right)\Gamma\cdot d\sigma,$$

welches sich nur auf die Kreislinie σ um α, α' bezieht. Dieses Integral ist also näher zu untersuchen.

Es sei α der Mittelpunkt eines Polarcoordinatensystems r, φ α' derjenige eines Systems r', φ', und zwar so, dass die Axe $\varphi = 0$ bezw. $\varphi' = 0$ die Richtung der Strecke von α' nach α hat. Dann gelten Entwicklungen folgender Art:

$$G = a_0 + a_1\, r^{\frac{1}{\lambda}} \cos\frac{\varphi}{\lambda} + a_2\, r^{\frac{2}{\lambda}} \cos\frac{2\varphi}{\lambda} + a_3\, r^{\frac{3}{\lambda}} \cos\frac{3\varphi}{\lambda} + \cdots$$
$$+ b_1\, r^{\frac{1}{\lambda}} \sin\frac{\varphi}{\lambda} + b_2\, r^{\frac{2}{\lambda}} \sin\frac{2\varphi}{\lambda} + b_3\, r^{\frac{3}{\lambda}} \sin\frac{3\varphi}{\lambda} + \cdots,$$

$$G' = a_0' + a_1' r'^{\frac{1}{\lambda}} \cos\frac{\varphi'}{\lambda} + a_2' r'^{\frac{2}{\lambda}} \cos\frac{2\varphi'}{\lambda} + a_3' r'^{\frac{3}{\lambda}} \cos\frac{3\varphi'}{\lambda} + \cdots$$
$$+ b_1' r'^{\frac{1}{\lambda}} \sin\frac{\varphi'}{\lambda} + b_2' r'^{\frac{2}{\lambda}} \sin\frac{2\varphi'}{\lambda} + b_3' r'^{\frac{3}{\lambda}} \sin\frac{3\varphi'}{\lambda} + \cdots.$$

Bedeutet ferner ϱ, ψ ein Polarcoordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Strecke $\alpha'\alpha$ als Centrum, und mit der Richtung $\alpha'\alpha$ als Richtung $\psi = 0$, so besitzt Γ längs σ, d. h. auf der Kreislinie $\varrho = \varepsilon$ eine Entwicklung:

$$\Gamma = \alpha_0 + \alpha_1\, \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} \cos\frac{\psi}{\lambda} + \alpha_2\, \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} \cos\frac{2\psi}{\lambda} + \cdots$$
$$+ \beta_1\, \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} \sin\frac{\psi}{\lambda} + \beta_2\, \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} \sin\frac{2\psi}{\lambda} + \cdots,$$

worin die α_ν, β_ν Functionen von ζ, ζ_0 sind, welche endliche obere Grenzen haben, so lange ζ, ζ_0 in endlicher Entfernung von den Verzweigungspunkten bleiben.

Bildet man aus diesen Reihen die Ausdrücke:

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G}{\partial n} \cdot \Gamma \cdot d\sigma, \quad \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G'}{\partial n} \cdot \Gamma \cdot d\sigma,$$

so erhält man mit Benutzung der auf der Kreislinie σ vom Radius ε geltenden Beziehungen:

$$r = \varepsilon\sqrt{1 - 2\vartheta\cos\psi + \vartheta^2},$$
$$r' = \varepsilon\sqrt{1 + 2\vartheta\cos\psi + \vartheta^2},$$

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\psi} - \vartheta}{\sqrt{1 - 2\vartheta\cos\psi + \vartheta^2}},$$
$$e^{i\varphi'} = \frac{e^{i\psi} + \vartheta}{\sqrt{1 + 2\vartheta\cos\psi + \vartheta^2}}$$

für das erste Integral den Ausdruck:

$$-\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi\lambda}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{\mu}{\lambda}\varepsilon^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot\left(\sqrt{1-2\vartheta\cos\psi+\vartheta^2}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}-2}\left\{\begin{array}{l} a_\mu\left(\cos\frac{\mu}{\lambda}\varphi-\vartheta\cos\left(\frac{\mu}{\lambda}\varphi+\psi\right)\right)\\ +b_\mu\left(\sin\frac{\mu}{\lambda}\varphi-\vartheta\sin\left(\frac{\mu}{\lambda}\varphi+\psi\right)\right)\end{array}\right\}$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\varepsilon^{\frac{\nu}{\lambda}}\left\{\begin{array}{l}\alpha_\nu\cos\frac{\nu}{\lambda}\psi\\ +\beta_\nu\sin\frac{\nu}{\lambda}\psi\end{array}\right\}\cdot\varepsilon\, d\psi,$$

und das zweite Integral erhält man hieraus, indem man ϑ durch $-\vartheta$ und a_μ, b_μ durch a'_μ, b'_μ ersetzt.

Ich forme das Integral noch in der Weise um, dass ich statt der trigonometrischen Functionen Exponentialfunctionen einführe und dann für $e^{i\varphi}$ den Ausdruck durch ψ einsetze; zur Abkürzung werde noch gesetzt:

$$\frac{1}{2}(a_\mu-ib_\mu)=c_\mu,\quad \frac{1}{2}(\alpha_\nu-i\beta_\nu)=\gamma_\nu,$$

$$\frac{1}{2}(a_\mu+ib_\mu)=\bar{c}_\mu,\quad \frac{1}{2}(\alpha_\nu+i\beta_\nu)=\bar{\gamma}_\nu.$$

Dann geht das Integral in folgendes über:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi\lambda}d\psi\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\varepsilon^{\frac{\mu+\nu}{\lambda}}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\left\{\begin{array}{l} c_\mu\gamma_\nu(1-\vartheta e^{-i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot e^{+i\frac{\mu+\nu}{\lambda}\psi}\\ +c_\mu\bar{\gamma}_\nu(1-\vartheta e^{-i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot e^{+i\frac{\mu-\nu}{\lambda}\psi}\\ +\bar{c}_\mu\gamma_\nu(1-\vartheta e^{+i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot e^{-i\frac{\mu-\nu}{\lambda}\psi}\\ +\bar{c}_\mu\bar{\gamma}_\nu(1-\vartheta e^{+i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot e^{-i\frac{\mu+\nu}{\lambda}\psi}\end{array}\right\}.$$

Durch Umkehrung der Reihenfolge von Summation und Integration ergiebt sich so eine Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial G}{\partial n}\Gamma\, d\sigma=A_1\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}+A_2\varepsilon^{\frac{2}{\lambda}}+A_3\varepsilon^{\frac{3}{\lambda}}+\cdots,$$

worin A_n eine lineare Combination der Integrale ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi\lambda}(1-\vartheta e^{\mp i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot e^{\pm i\frac{\mu+\nu}{\lambda}}\cdot d\psi,\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi\lambda}(1-\vartheta e^{\mp i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1}\cdot e^{\pm i\frac{\mu-\nu}{\lambda}}\cdot d\psi$$

$$\left(\begin{array}{c}\mu+\nu=n,\\ 1\leqq\mu\leqq n,\quad 0\leqq\nu\leqq n-1\end{array}\right).$$

Man sieht leicht, dass diese Integrale identisch verschwinden, wenn nicht $\frac{\mu+\nu}{\lambda}$ bezw. $\frac{\mu-\nu}{\lambda}$ eine ganze Zahl ist.

Sei zuerst $1 \leqq \mu + \nu \leqq \lambda - 1$, also $\frac{\mu+\nu}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$ ein echter Bruch. Dann kann nur $\frac{\mu-\nu}{\lambda}$ eine ganze Zahl sein, und zwar nur so, dass $\mu = \nu = \frac{n}{2}$ wird. Dies ist nur für geradzahlige $n = 2\mu$ möglich, so dass man also den Satz hat:

Die Coefficienten $A_1, A_3, \ldots$ mit ungeradem Index bis zu A_λ ausschliesslich verschwinden identisch.

Sei nun $n = 2\mu < \lambda$. Dann reducirt sich das Integral auf

$$A_{2\mu} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdot \frac{\mu}{\lambda} \left\{ \begin{array}{c} c_\mu \bar{\gamma}_\mu (1 - \vartheta e^{-i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1} \\ + \bar{c}_\mu \gamma_\mu (1 - \vartheta e^{+i\psi})^{\frac{\mu}{\lambda}-1} \end{array} \right\} d\psi = -\mu (c_\mu \bar{\gamma}_\mu + \bar{c}_\mu \gamma_\mu)$$

$$= -\frac{\mu}{2}(a_\mu \alpha_\mu + b_\mu \beta_\mu).$$

Dagegen der Coefficient A_λ von ε wird:

$$A_\lambda = -\frac{\lambda}{4}(a_{\frac{\lambda}{2}} \alpha_{\frac{\lambda}{2}} + b_{\frac{\lambda}{2}} \beta_{\frac{\lambda}{2}}) - \vartheta \cdot \sum_{\substack{\mu=1 \\ \nu=\lambda-1}}^{\substack{\nu=0 \\ \mu=\lambda}} \frac{\mu \cdot \nu}{2\lambda}(a_\mu \alpha_\nu - b_\mu \beta_\nu),$$

wenn $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$,

$$A_\lambda = \qquad - \vartheta \sum_{\substack{\mu=1 \\ \nu=\lambda-1}}^{\substack{\nu=0 \\ \mu=\lambda}} \frac{\mu\,\nu}{2\lambda}(a_\mu \alpha_\nu - b_\mu \beta_\nu),$$

wenn $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$.

Wollen wir die entsprechenden Coefficienten der Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G'}{\partial n} \Gamma \cdot d\sigma = A_1' \cdot \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} + A_2' \cdot \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} + A_3' \cdot \varepsilon^{\frac{3}{\lambda}} + \cdots$$

bilden, so zeigt sich, dass hier ebenfalls $A_1', A_3', \ldots$ bis A_λ' excl. verschwinden, und $A_2', A_4', \ldots A_\lambda'$ erhält man aus $A_2, A_4, \ldots A_\lambda$, indem man die a_μ, b_μ durch a_μ', b_μ' und ϑ durch $-\vartheta$ ersetzt.

In der Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial G'}{\partial n}\right) \Gamma\, d\sigma = (A_2 - A_2')\varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} + (A_4 - A_4')\varepsilon^{\frac{4}{\lambda}} + \cdots$$
$$\cdots + (A_\lambda - A_\lambda')\varepsilon + \cdots$$

sind in Folge dessen die Coefficienten $(A_2 - A_2')$, $(A_4 - A_4')$, ... bis $(A_\lambda - A_\lambda')$ exclusive homogene lineare Functionen der Differenzen

$(a_1 - a_1')$, $(b_1 - b_1')$; $(a_2 - a_2')$, $(b_2 - b_2')$; u. s. w. Erst $A_\lambda - A_\lambda'$ enthält ausser Differenzen auch die Summen

$$(a_\mu + a_\mu'),\ (b_\mu + b_\mu') \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1).$$

Nun zeigt schon eine oberflächliche Betrachtung vorstehender Reihe, dass $G - G'$ in jedem Punkte ζ der Riemann'schen Fläche mit ε mindestens in der Ordnung $\frac{2}{\lambda}$ verschwindet. Daraus lässt sich aber mit Hülfe der bestimmten Integralausdrücke für die a_μ, b_μ leicht beweisen, dass auch die $a_\mu - a_\mu'$, $b_\mu - b_\mu'$ mit ε mindestens in der Ordnung $\frac{2}{\lambda}$ verschwinden. Dann verschwindet aber auch $A_2 - A_2'$ (wenn $\lambda > 2$ ist) mindestens in der Ordnung $\frac{2}{\lambda}$, $G - G'$ also mindestens in der Ordnung $\frac{4}{\lambda}$ (wenn $\lambda \geqq 4$ ist), folglich auch $a_\mu - a_\mu'$, $b_\mu - b_\mu'$, und also auch $A_2 - A_2'$, $A_4 - A_4'$ mindestens in der Ordnung $\frac{4}{\lambda}$, also wieder $G - G'$ in der Ordnung $\frac{6}{\lambda}$ u. s. w.

Man findet so, dass sich die Ordnung des Verschwindens von $G - G'$, je weiter man in der Untersuchung geht, immer mehr erhöht, doch nur bis zur ersten Ordnung.

Dass die Ordnung des Verschwindens von $G - G'$ sich nicht über die erste hinaus erhöht, liegt daran, dass $A_\lambda - A_\lambda'$ nicht unendlich klein mit ε wird, weil es nicht nur die Differenzen $a_\mu - a_\mu'$, $b_\mu - b_\mu'$, sondern auch die Summen $a_\mu + a_\mu'$, $b_\mu + b_\mu'$ enthält.

Wir haben mithin den Satz bewiesen:

Die Differenz $G - G'$ verschwindet mit der Verschiebung ε der Verzweigungspunkte der Fläche in jedem Punkte ζ, der eine angebbare Entfernung von den Verzweigungspunkten besitzt, in der ersten Ordnung.

Dieser Satz bleibt nicht, wie der frühere, erhalten, wenn man ζ in einen der variablen Verzweigungspunkte selbst rücken lässt; vielmehr:

In der unmittelbaren Nähe eines variablen Verzweigungspunktes der Fläche erniedrigt sich die Ordnung des Verschwindens von $G - G'$ bis $\frac{1}{\lambda}$, unter λ die Zahl der in dem Verzweigungspunkt zusammenhängenden Blätter verstanden.

§ 11.

Ausartung symmetrischer Fundamentalbereiche.

Als erstes Beispiel für die Ausartung von Fundamentalbereichen will ich in diesem Paragraphen einige Ausartungen symmetrischer Fundamentalbereiche ins Auge fassen, nämlich solcher Bereiche, die man in zwei Kreisbogenpolygone zerlegen kann, wie sie im ersten Theil der vorliegenden Arbeit besonders betrachtet worden sind.

Von den Ausartungen eines Fundamentalpolygons sollen folgende beiden Arten besprochen werden:

1) Erstens können zwei oder mehrere Ecken des Fundamentalpolygons zu einer einzigen Ecke zusammenrücken, indem die zwischen ihnen liegenden Seiten unendlich klein werden; oder auch umgekehrt, es kann sich eine Ecke in mehrere neue Ecken spalten, indem sich zwischen die ursprünglichen Polygonseiten neue Seiten von anfangs unendlich kleiner Grösse einlagern. Hierher gehört es z. B., wenn man, wie es Herr Klein in seiner Vorlesung über lineare Differentialgleichungen vom W. S. 90/91 (Autographie S. 132) vorgeschlagen hat, ein Kreisbogendreieck mit beliebigen Winkeln als Grenzfall eines Kreisbogensechsecks mit lauter rechten Winkeln ansieht, bei welchem immer je zwei benachbarte Ecken zusammenrücken, wenn man also die hypergeometrische Function als Ausartung einer allgemeinen Lamé'schen Function mit 6 Verzweigungspunkten ansieht.

2) Zweitens können zwei verschiedene Begrenzungsstücke des Polygons sich einander vom Innern des Polygones her bis zur Berührung nähern, so dass die Zusammenhangszahl des Polygons um 1 vermindert wird oder auch das Polygon in mehrere getrennte Stücke zerfällt. Umgekehrt können sich zwei Begrenzungstheile ein und desselben oder verschiedener Polygone von Aussen bis zur Berührung nähern und dann so mit einander verschmelzen, dass an der betreffenden Stelle ein neuer Zusammenhang zwischen den vorher getrennten Theilen des Polygons entsteht. Ich will diese letzten beiden Processe als „Abschnürung“ und „Verschmelzung“ benennen.

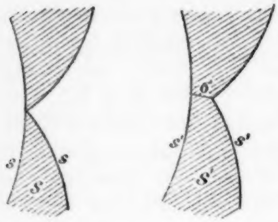
Was zunächst die unter 1) genannten Ausartungen betrifft, so sind dieselben von der im ersten Theil meiner Arbeit benutzten Beweismethode schon mit umfasst. Die Functionen ändern sich — wenigstens im Innern des Polygons — auch dann noch stetig, wenn die Begrenzung aufhört aus Kreisbogen von endlicher Länge und Krümmung zu bestehen. Die einzige Bedingung für die stetige Aenderung ist die, dass die Maximalentfernung der Begrenzung des nahezu ausgearteten Polygons von der des vollständig ausgearteten Polygons in stetiger Weise kleiner als eine beliebig klein zu gebende Strecke ε gemacht werden kann.

Dabei ändern sich auch von den analytischen Fortsetzungen der Functionen diejenigen noch stetig, welche man durch Ueberschreitung nicht ausartender Polygonseiten erhält. Nur die analytischen Fortsetzungen über die ausartenden Seiten hinaus arten selbst aus, und man kann bei ihnen nicht mehr von stetiger Aenderung reden.

Umständlicher ist die Betrachtung der Ausartungen unter 2).

Es sei S der Bereich im Augenblick seiner Ausartung, mag er dabei aus einem zusammenhängenden oder aus mehreren getrennten

Stücken bestehen. S' sei der Bereich kurz vor der Ausartung, wenn die in S zur Berührung kommenden Begrenzungsstücke noch eine Entfernung $\sigma \leqq \varepsilon$ von einander besitzen. s möge die Begrenzung von S, s' die von S' sein.



Als Vergleichsbereich Σ dient mir das aus ein oder mehreren Stücken bestehende Polygon, welches ich aus S' erhalte, wenn ich die unendlich nahe rückenden Begrenzungsstücke s' durch einen Schnitt σ von unendlich kleiner Länge verbinde und die Ufer dieses Schnittes mit zur Begrenzung rechne.

Da das Polygon Σ dieselben Zusammenhangsverhältnisse wie S besitzt, bezw. aus ebensoviel Stücken besteht, und da die Begrenzung von der Begrenzung des Polygons S nur unendlich wenig entfernt ist, so kann man das Schlussverfahren des ersten Theils unmittelbar anwenden, und findet also, dass die Functionen des Polygons S und des Polygons Σ resp. die der einzelnen Theile von S und der einzelnen Theile von Σ nur um verschwindende Grössen voneinander verschieden sind.

Es sind daher nur noch die Functionen der Bereiche S' und Σ mit einander zu vergleichen.

Es seien F und Φ irgend zwei symmetrische automorphe Potentiale, das eine des Polygons S', das andere des Polygons Σ, und zwar so, dass beide an denselben im Innern der Bereiche gelegenen Stellen in genau derselben Weise unstetig werden; es mögen z. B. F und Φ als diejenigen automorphen Potentiale definirt sein, welche an der vorgegebenen Stelle ζ_0 im Innern unstetig werden, wie $\frac{\cos\varphi}{r}$ oder wie $\frac{\sin\varphi}{r}$, und welche längs des Randes s' von S' bezw. längs des Randes $s' + \sigma$ von Σ verschwinden. Wenn Σ aus mehreren Stücken besteht, ist Φ natürlich nur in dem Stück von 0 verschieden, welches die Stelle ζ_0 enthält.

Für die absoluten Werthe der Function F längs irgend einer in angebbarer Entfernung von der Unstetigkeitsstelle bleibenden Curve in S', also auch längs der Strecke σ, kann man eine endliche obere Grenze M angeben.

$\delta = F - \Phi$ ist dann eine Potentialfunction, welche in jedem der Theile, aus welchen Σ besteht, holomorph ist, welche längs der Begrenzungsstücke s' von Σ verschwindet und welche längs der durch die Ufer von σ gebildeten verschwindend kleinen Begrenzungsstücke von Σ dem absoluten Werthe nach unter der angebbaren endlichen Grösse M bleibt. Sie ist daher ihrem absoluten Werthe nach kleiner,

als diejenige in Σ holomorphe Potentialfunction, welche längs s' verschwindet, längs σ gleich M ist.

Die letztere drückt sich aber durch ein Integral aus, gebildet mit der Green'schen Function Γ des Bereichs Σ, so dass also

$$|\delta(\xi)| < \frac{M}{2\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\zeta^\xi}{\partial n_\xi} d\sigma_\xi \ (\partial n \text{ nach Innen gerechnet})$$

ist, das Integral erstreckt über die an der Begrenzung des betreffenden Theilbereichs theilnehmenden Ufer des Schnittes σ.

Schnürt sich das Polygon an mehreren Stellen zugleich ein, so sind statt eines Schnittes mehrere Schnitte σ zu legen und statt eines oder zweier Integrale hat man eine grössere Anzahl solcher zu addiren, soviel, wie Ufer σ an der Begrenzung des einzelnen Theilbereichs Σ theilnehmen.

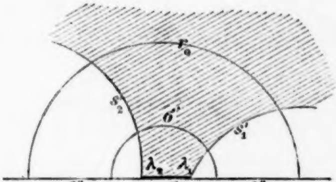
Ich discutire ein einzelnes dieser Integrale. Es kommt darauf an, den Werth der Ableitung von Γ_ζ^ξ nach der Normale längs des Curvenstückchens σ abzuschätzen.

Wenn σ an seinen beiden Enden keine Ecken des Polygons Σ trägt, sondern auf einem einheitlichen Randkreise in angebbarer Entfernung von dessen Ecken liegt, so kann man für $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$ längs σ eine endliche obere Grenze g angeben, — vorausgesetzt, dass ξ in angebbarer Entfernung von der Einschnürungsstelle liegt —. Dann ist aber, da die Länge des Curvenstücks $\sigma \leq \varepsilon$ ist,

$$|\delta| < \frac{M \cdot g}{2\pi} \cdot \varepsilon,$$

also eine mit ε stetig verschwindende Grösse.

Im Allgemeinen jedoch wird die Randstrecke σ an ihren Enden Winkel des Polygons Σ tragen, wodurch die Abschätzung erschwert wird.



Ich finde aber auch dann noch eine brauchbare obere Grenze für δ, wenn auch nicht die niedrigste angebbare, durch folgendes Verfahren:

Ich nehme zuerst mit dem Bereich Σ eine solche Modification vor, durch welche die zugehörige Function im Innern des Bereichs nur vergrössert wird: Es bilde die Randstrecke σ, welche wir als geradlinig voraussetzen können, rechts einen Winkel $\lambda_1 \pi$ mit der voraufgehenden Curve s_1', links einen Winkel $\lambda_2 \pi$ mit der nachfolgen-

den Curve s_2'. Dann setze ich rechts an s_1', links an s_2' je ein solches Kreisbogendreieck an Σ an, dass die Winkel $\lambda_1\pi$ und $\lambda_2\pi$ sich jeder in das nächstgrössere Multiplum eines gestreckten Winkels, und zwar mit geradliniger Begrenzung verwandeln; die neuen Winkel mögen $\lambda_1'\pi$, $\lambda_2'\pi$ sein, wo also λ_1', λ_2' im Allgemeinen die kleinsten ganzen Zahlen sind, die den Ungleichungen genügen:

$$\lambda_1' > \lambda_1, \quad \lambda_2' > \lambda_2.$$

Eine Function, welche längs σ den Werth M annimmt, längs der übrigen Begrenzung s'' des erweiterten Polygons Σ aber verschwindet, ist nun innerhalb des ursprünglichen Polygons Σ jedenfalls grösser als die vorher betrachtete Function, die längs σ gleich M und längs der Begrenzung s' des nichterweiterten Polygons Σ gleich 0 ist.

Jetzt ersetze ich noch das Randstückchen σ durch eine um den Mittelpunkt von σ als Centrum beschriebene Kreislinie σ' vom Radius σ, welche sich von der Randlinie s_1'' aus beginnend $\frac{1}{2}(\lambda_1' + \lambda_2' - 1)$ mal herumwindet und auf der Randcurve s_2'' endet. Die Zahl $\lambda_1' + \lambda_2' - 1$ will ich zur Abkürzung mit λ bezeichnen. Der so abermals modificirte Bereich Σ heisse Σ'. Schreibe ich für den Bereich Σ' längs der Kreislinie σ' den Werth M vor, längs der übrigen Begrenzungsstücke den Werth 0, so ist die hierdurch definirte Function gewiss im Innern von Σ' grösser als $|\delta(\zeta)|$; denn auch bei der letzten Abänderung ist dieselbe grösser geworden.

Wir haben also jetzt:

$$|\delta(\zeta)| < \frac{M}{2\pi}\int_0^{\lambda\pi}\left(\frac{\partial \Gamma_\zeta^\xi}{\partial r}\right)_{r=\sigma} \cdot \sigma\, d\varphi,$$

unter r, φ Polarcoordinaten mit dem Mittelpunkt der Kreislinie σ' als Centrum und der Richtung s_1'' als 0-Richtung verstanden.

Nun hat aber Γ_ζ^ξ als Function von ξ, da es längs s_1'', s_2'' und längs σ' verschwinden soll, eine Entwicklung folgender Gestalt:

$$\Gamma_\zeta^\xi = a_1\left(r^{\frac{1}{\lambda}} - \left(\frac{\sigma^2}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\sin\frac{\varphi}{\lambda} + a_2\left(r^{\frac{2}{\lambda}} - \left(\frac{\sigma^2}{r}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\right)\sin\frac{2\varphi}{\lambda}$$

$$+ a_3\left(r^{\frac{3}{\lambda}} - \left(\frac{\sigma^2}{r}\right)^{\frac{3}{\lambda}}\right)\sin\frac{3\varphi}{\lambda} + \cdots.$$

Hierin sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Functionen von ζ, welche, wenn ζ in angebbarer Entfernung von der fraglichen Stelle liegt, eine angebbare

obere Grenze besitzen, nämlich: Es sei r_0 der Radius einer möglichst grossen von s_1'' bis s_2'' den Bereich Σ' durchziehenden Kreislinie, welche weder andere Begrenzungsstücke von Σ' einschliesst, als σ' und s_1'', s_2'', noch den Punkt ξ einschliesst oder trifft, sondern in angebbarer Entfernung von demselben bleibt. Man kann dann längs der Kreislinie r_0 eine endliche obere Grenze M für den Werth von Γ_ζ^ξ als Function von ξ in der früher geschilderten Weise abschätzen. Dann genügen die Coefficienten der Reihenentwicklung den Ungleichungen:

$$|a_\nu| < \frac{2\mathsf{M}}{r_0^{\frac{\nu}{\lambda}}\left(1-\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{2\nu}{\lambda}}\right)},$$

oder auch, da $\frac{\sigma}{r_0} < 1$ und $\nu \geqq 1$ ist, den Ungleichungen:

$$|a_\nu| < \frac{2\mathsf{M}}{r_0^{\frac{\nu}{\lambda}}\left(1-\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\right)}.$$

Aus der Reihenentwicklung und den angegebenen Ungleichungen folgt nun

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)_{r=\sigma} = \frac{2a_1}{\lambda}\sigma^{\frac{1}{\lambda}-1}\cdot\sin\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{4a_2}{\lambda}\cdot\sigma^{\frac{2}{\lambda}-1}\cdot\sin\frac{2\varphi}{\lambda} + \frac{6a_3}{\lambda}\cdot\sigma^{\frac{3}{\lambda}-1}\cdot\sin\frac{3\varphi}{\lambda} + \cdots$$

$$\int_0^{\lambda\pi}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)_{r=\sigma}\cdot\sigma\cdot d\varphi = 4a_1\cdot\sigma^{\frac{1}{\lambda}} + 4a_3\cdot\sigma^{\frac{3}{\lambda}} + 4a_5\cdot\sigma^{\frac{5}{\lambda}} + \cdots$$

$$< 8\mathsf{M}\frac{\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{3}{\lambda}} + \left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{5}{\lambda}} + \cdots}{1-\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}$$

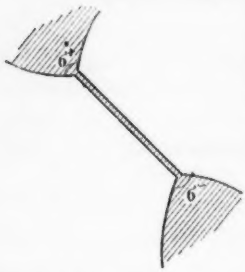
$$= 8\mathsf{M}\frac{\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}{\left(1-\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\right)^2},$$

und also

$$|\delta(\zeta)| < \frac{4}{\pi}M\mathsf{M}\frac{\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}{\left(1-\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\right)^2} < g\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Es ist hiermit thatsächlich bewiesen, was wir beweisen wollten, dass der Unterschied $F - \Phi$ in jedem Punkte des Polygons, der in angebbarer Entfernung von der Einschnürungsstelle liegt, mit ε stetig verschwindet.

Wenn die Abschnürung nicht, wie bisher angenommen, an einer bestimmten Stelle eintritt, indem sich zwei Begrenzungsstücke s' nicht nur in einem Punkte, sondern längs einer endlichen Erstreckung berühren, so gelten fast genau dieselben Ueberlegungen, wie im Falle der punktförmigen Abschnürung. Man hat nur statt des einen Schnittes σ an jedem Ende des unendlich schmal werdenden Bandes einen Schnitt zu legen und als Bereich Σ das anzusehen, was übrig bleibt, wenn man das zwischen den Schnitten liegende Band weglässt.



Natürlich ist die gefundene obere Grenze für $\delta(\xi)$ keineswegs die genaueste findbare, schon deswegen, weil ich die Winkel λ_1, λ_2 der Bequemlichkeit halber erst zu Vielfachen von π ergänzt habe.

Aber noch aus einem andern Grunde ist $\frac{1}{\lambda}$ nicht die wirkliche Ordnung der Kleinheit von δ: Nämlich die obere Grenze M des Werthes von F längs des Curvenstückchens σ ist selbst eine mit σ stetig verschwindende Grösse. Ich will die genauere Abschätzung von M hier ihrer Umständlichkeit wegen nicht wiedergeben, da ich doch nicht alle hierhergehörigen Fragen in einem Paragraphen behandeln könnte, sondern ich will nur folgendes noch der Verschärfung fähige Resultat mittheilen:

Ist $\lambda_1 \pi$ das kleinste Multiplum eines gestreckten Winkels, welches grösser als jeder der beiden Winkel ist, welche σ an seinem einen Endpunkte mit der Begrenzung s' des Polygons S' bildet, $\lambda_2 \pi$ das kleinste Multiplum von π, welches grösser als jeder der beiden Winkel am andern Endpunkt von σ ist, und bezeichne ich die Zahl $\lambda_1 + \lambda_2 - 1$ mit λ, so lässt sich eine endliche Grösse g angeben, so dass

$$M < g \cdot \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$$

ist.

Die Zahl λ, welche in der oberen Grenze von $\delta(\xi)$ auf der vorigen Seite auftritt, ist jedenfalls nicht grösser, als die jetzt eben definirte Zahl λ. Ich kann daher in der Ungleichung für $\delta(\xi)$ unbeschadet der Richtigkeit der Ungleichung λ mit der Zahl λ des letzten Satzes identificiren, und bekomme so das Resultat:

Für jeden in endlicher Entfernung von der Abschnürungsstelle gelegenen Punkt ζ *lässt sich eine endliche Grösse* g_1 *angeben, so dass*

$$|\delta(\zeta)| < g_1 \cdot \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}}$$

ist, in unmittelbarer Nähe der Abschnürungsstelle eine Grösse g_2 *von der Art, dass*

$$|\delta(\zeta)| < g_2 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$$

ist.

Jedenfalls können wir aus allem bisher Gesagten, wenn wir nun vom Vergleichsbereich Σ wieder zum Bereich S zurückgehen und diesen direct mit S' in Beziehung setzen, den Schluss ziehen:

Sämmtliche symmetrischen automorphen Potentiale ändern sich, wenn man ihre im Polygon gelegenen Unstetigkeitsstellen und die Art des Unendlichwerdens in denselben festhält, auch bei Abschnürung oder Verschmelzung des Fundamentalpolygons im Innern und auf dem Rande des Fundamentalpolygons einschliesslich der Abschnürungsstelle stetig.

Dieser Satz wird die Grundlage für die Untersuchung der Stetigkeit der aus den symmetrischen Potentialen abzuleitenden symmetrischen und unsymmetrischen automorphen Integrale und Functionen sein müssen. Ich gehe aber auf diese ausserordentlich interessanten Fragestellungen hier nur mit folgenden wenigen Andeutungen ein:

Die symmetrischen wie unsymmetrischen automorphen Integrale kann man so einrichten, dass sie sich im ganzen Innern und auf dem Rande des Polygons mit Ausschluss der Umgebung der Abschnürungsstelle stetig ändern.

In der Umgebung der Abschnürungsstelle jedoch ist die Aenderung der Functionen im allgemeinen nicht mehr gleichmässig stetig, da die Grenzwerthe der Functionen auf der einen und auf der andern Seite der Abschnürungsstelle sowie in der Abschnürungsstelle selbst von einander verschieden sein können. Auch können Functionen bei der Abschnürung in der Abschnürungsstelle Unendlichkeitsstellen erhalten.

Die Perioden der Integrale können sich dadurch unstetig ändern, dass diejenigen, deren Weg durch die Abschnürungsstelle hindurchgeht, unendlich gross werden.

Nichtsdestoweniger aber kann man die automorphen Functionen des Bereichs sämmtlich gleichzeitig so einrichten, dass sie sich überall mit Ausnahme der Umgebung der Abschnürungsstellen und der Umgebung ihrer Unendlichkeitsstellen stetig ändern.

Ich könnte nach den besprochenen zwei Arten von Ausartungen symmetrischer Fundamentalbereiche noch auf eine dritte Gattung von Ausartungen eingehen, nämlich auf den Fall, dass ein oder mehrere der geschlossenen Curvenzüge, die das Polygon begrenzen, sich auf Punkte zusammenziehen. Einfache Beispiele zeigen, dass bei solchen

Ausartungen des Polygons die zugehörigen Functionen sich im Allgemeinen unstetig ändern, indem sie vollständig ausarten, z. B. überall mit Ausnahme einzelner Punkte oder Linien unendlich gross oder unendlich klein, oder ganz unbestimmt werden.

§ 12.

Ausartung Riemann'scher Flächen.

Eine geschlossene über der ζ-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche von endlicher Zahl der Blätter und der Verzweigungspunkte möge dadurch ausarten, dass zwei oder mehr ihrer Verzweigungspunkte zusammenrücken, wobei sie sich theilweise gegenseitig zerstören, theilweise auch zu Verzweigungspunkten höherer Ordnung zusammentreten können.

Es möge irgend eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten so weit zusammengerückt sein, dass sie sich sämmtlich innerhalb eines Kreises von dem beliebig klein zu machenden Radius ε befinden. Die in dieser Weise nahezu ausgeartete Riemann'sche Fläche heisse S'. Rücken alle Verzweigungspunkte in den Mittelpunkt des kleinen Kreises vom Radius ε zusammen, so ist die Ausartung der Fläche vollendet, und die Fläche heisse S.

Es ist zu zeigen, dass die Functionen der Fläche S' von den entsprechenden der Fläche S sich nur um mit ε stetig verschwindende Grössen unterscheiden. Z. B. wollen wir dies für die Green'sche Function $G_{\zeta_0}^{\zeta}$ mit einer algebraischen Unstetigkeitsstelle 1. Ordnung in ζ_0 nachweisen, wobei die additive Constante wie früher bestimmt werden möge, nämlich so, dass das constante Glied in der Reihenentwicklung an der Stelle ζ_0 verschwindet. G' sei die zu S' gehörige Function, G die zu S gehörige. Letztere hat natürlich, falls die Fläche S aus mehreren getrennten Stücken besteht, in denjenigen Stücken, welche ζ_0 nicht enthalten, je einen unbestimmten constanten Werth.

Ich studire jetzt die Differenz $G' - G$ in einem Vergleichsbereich Σ, den ich folgendermassen erhalte: Ich construire um die Ausartungsstelle als Centrum einen Kreis von möglichst grossem endlichem Radius r_0, welcher in keinem der an der Ausartung theilnehmenden Blätter einen andern als die an der Ausartung theilnehmenden Verzweigungspunkte umschliesst oder trifft. Ich denke mir nun einen Kreis vom Radius $\sigma = \sqrt{\varepsilon r_0}$ construirt, mit der Ausartungsstelle als Centrum, und das Innere dieses Kreises in allen denjenigen Blättern, die in den zusammenrückenden Verzweigungspunkten zusammenhängen, ausgeschnitten.

Ich erhalte so eine Fläche von denselben Zusammenhangsverhältnissen, wie die ausgeartete Fläche S, insbesondere in derselben Weise, wie diese, in getrennte Stücke zerfallend, welche sich aber von S dadurch unterscheidet, dass sie an der Ausartungsstelle eine oder mehrere genau übereinanderliegende kreisförmige Oeffnungen besitzt, jede dieser Oeffnungen von einer ein- oder mehrfach umlaufenden Kreislinie vom Radius σ begrenzt.

Wenn gleichzeitig noch an andern Stellen der ζ-Ebene Ausartungen stattfinden, so hat man daselbst in derselben Weise Oeffnungen von einem entsprechenden unendlich kleinen Radius σ anzubringen.

Nun sei ein Potential $\Gamma_{\zeta\zeta_0}^{\xi\eta}$ mit der laufenden Variablen ξ dadurch definirt, dass es in der Fläche Σ eindeutig ist, längs der Begrenzungslinien σ der Bedingung $\frac{\partial\Gamma}{\partial n} = 0$ genügt, an der Stelle ζ positiv, an der Stelle ζ_0 negativ logarithmisch unendlich wird und an der Stelle η verschwindet. Die so definirte Function hat, wenn Σ aus mehreren getrennten Stücken besteht, nur dann einen Sinn, wenn ζ und ζ_0 in demselben Stück von Σ liegen.

Dann lässt sich die Differenz $\delta(\zeta) = G_{\zeta_0}^{\zeta} - G_{\zeta_0}'^{\zeta}$ in demjenigen Stück der Fläche Σ, welches den Punkt ζ_0 enthält, durch folgendes über alle Begrenzungskreise σ zu erstreckende Integral ausdrücken:

$$\delta(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial\,\delta(\xi)}{\partial n_\xi} \cdot \Gamma_{\zeta\xi_0}^{\xi\eta}\, d\sigma_\xi,$$

die Normale n_ξ nach dem Innern der Kreise σ gerichtet gedacht.

$\delta(\zeta)$ ist in der ganzen Fläche Σ holomorph; sie ist aber auch noch holomorph in einer Fläche, die man erhält, wenn man die zusammenrückenden Verzweigungspunkte statt durch Kreise vom Radius $\sigma = \sqrt{\varepsilon r_0}$ durch solche vom Radius ε ausschneidet. Man kann sowohl für G, als für G' längs jeder den Punkt ζ_0 vermeidenden Curve, also auch insbesondere längs der Kreise ε eine endliche obere Grenze des absoluten Werthes, etwa M, angeben. Dann ist $\delta(\zeta)$ längs dieser Kreise ε dem absoluten Werthe nach jedenfalls kleiner als $2M$, und da $\delta(\zeta)$ in der ganzen durch die Kreise ε begrenzten Fläche holomorph ist, so ist es auch in dieser Fläche durchweg dem absoluten Werthe nach kleiner als $2M$.

Ich discutire jetzt insbesondere denjenigen Theil des obigen Integrals, der sich auf eine einzelne etwa λ-mal umlaufende Kreislinie $\sigma = \sqrt{\varepsilon r_0}$ bezieht.

$\delta(\zeta)$ ist sowohl ausserhalb dieser Kreislinie, nämlich bis zu der concentrischen eben so oft umlaufenden Kreislinie vom Radius r_0, als auch innerhalb derselben bis zu der λ-mal umlaufenden Kreislinie vom Radius ε holomorph und eindeutig. Es besitzt daher in diesem Ringgebiet eine Entwicklung folgender Art:

$$\delta = a\log r + a_0 + \left(a_1\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + a_{-1}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\cos\frac{\varphi}{\lambda} + \left(a_2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}} + a_{-2}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\right)\cos\frac{2\varphi}{\lambda} + \cdots$$

$$+ \left(b_1\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + b_{-1}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\sin\frac{\varphi}{\lambda} + \left(b_2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}} + b_{-2}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\right)\sin\frac{2\varphi}{\lambda} + \cdots.$$

Zur Berechnung der Coefficienten in dieser Entwicklung dienen folgende Formeln: Es mögen die Integrale

$$\frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi\lambda} \delta\cdot\cos\frac{\nu\varphi}{\lambda}\,d\varphi,$$

$$\frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi\lambda} \delta\cdot\sin\frac{\nu\varphi}{\lambda}\,d\varphi$$

längs der Kreislinie r_0 erstreckt, mit c_ν^+, s_ν^+, längs der Kreislinie ε erstreckt, mit c_ν^-, s_ν^- bezeichnet werden. Dann ist

$$a = \frac{c_0^+ - c_0^-}{\log\frac{r_0}{\varepsilon}}, \qquad a_0 = \frac{c_0^-\log r_0 - c_0^+\log\varepsilon}{\log\frac{r_0}{\varepsilon}},$$

$$a_\nu = \frac{2c_\nu^+ - 2c_\nu^-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{\nu}{\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2\nu}{\lambda}}}, \qquad a_{-\nu} = \frac{2c_\nu^- - 2c_\nu^+\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{\nu}{\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2\nu}{\lambda}}},$$

$$b_\nu = \frac{2s_\nu^+ - 2s_\nu^-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{\nu}{\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2\nu}{\lambda}}}, \qquad b_{-\nu} = \frac{2s_\nu^- - 2s_\nu^+\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{\nu}{\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2\nu}{\lambda}}}.$$

Da nun δ sowohl längs ε, wie längs r_0 dem absoluten Werthe nach kleiner als $2M$ ist, so ist auch

$$|c_\nu^+|,\ |c_\nu^-|,\ |s_\nu^+|,\ |s_\nu^-| < 2M.$$

Aus der angegebenen Entwicklung von δ folgt, dass längs der Kreislinie vom Radius $\sigma = \sqrt{\varepsilon r_0}$

$$\frac{\partial\delta}{\partial n}d\sigma = -\left(\frac{\partial\delta}{\partial r}\right)_{r=\sigma}\cdot\sigma\,d\varphi = d\varphi\left(\begin{array}{l} -a+\frac{1}{\lambda}(-a_1+a_{-1})\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}\cos\frac{\varphi}{\lambda} \\ \quad +\frac{2}{\lambda}(-a_2+a_{-2})\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{2\lambda}}\cos\frac{2\varphi}{\lambda}+\cdots \\ \quad +\frac{1}{\lambda}(-b_1+b_{-1})\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}\sin\frac{\varphi}{\lambda} \\ \quad +\frac{2}{\lambda}(-b_2+b_{-2})\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{2\lambda}}\sin\frac{2\varphi}{\lambda}+\cdots \end{array}\right)$$

$$= d\varphi\left(\begin{array}{l} \frac{c_0^- - c_0^+}{\log\frac{r_0}{\varepsilon}}+\frac{2}{\lambda}(c_1^- - c_1^+)\cdot\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}\cdot\cos\frac{\varphi}{\lambda} \\ \quad +\frac{4}{\lambda}(c_2^- - c_2^+)\cdot\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}\cos\frac{2\varphi}{\lambda}+\cdots \\ \quad +\frac{2}{\lambda}(s_1^- - s_1^+)\cdot\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}\sin\frac{\varphi}{\lambda} \\ \quad +\frac{4}{\lambda}(s_2^- - s_2^+)\cdot\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}\sin\frac{2\varphi}{\lambda}+\cdots \end{array}\right)$$

ist. Hieraus ergiebt sich vermittelst der für die c und s angegebenen Ungleichungen:

$$\left|\frac{\partial\delta}{\partial n}d\sigma\right| < d\varphi\left(\frac{4M}{\log\frac{r_0}{\varepsilon}}+\frac{8M\sqrt{2}}{\lambda}\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}+2\,\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}+3\,\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{3}{2\lambda}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{3}{\lambda}}}+\cdots\right)\right)$$

$$< d\varphi\cdot\frac{4M}{\log\frac{r_0}{\varepsilon}}\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{\lambda}\cdot\frac{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}\log\frac{r_0}{\varepsilon}}{\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}\right)^2}\right) < \frac{g_1}{\log\frac{r_0}{\varepsilon}}\cdot d\varphi .$$

Ferner lässt sich, wenn ζ und ζ_0 in angebbarer Entfernung von der Curve σ liegen, eine obere Grenze M für den absoluten Werth von $\Gamma_{\zeta\zeta_0}^{\xi\eta}$ als Function von ξ längs σ angeben. Dann ist aber der absolute Werth des auf die Kreislinie σ bezogenen Integrals kleiner als

$$\frac{\lambda \cdot g_1 \cdot M}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}},$$

wird also mit verschwindendem ε, d. h. wenn die Verzweigungspunkte mehr und mehr zusammenrücken; in stetiger Weise unendlich klein.

Damit ist die Stetigkeit der Aenderung von $G_{\zeta_0}^{\xi}$ in allen denjenigen Punkten bewiesen, welche auch bei der Ausartung mit dem Punkte ζ_0 zusammenhängend bleiben und in angebbarer Entfernung von der Ausartungsstelle liegen.

Ich kann aber auch noch zeigen, dass in unendlich kleiner Entfernung von der Ausartungsstelle, nämlich längs einer unendlich engen Kreislinie vom Radius $\frac{r_0}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}$ der Uebergang von G' in G ein stetiger ist.

Längs dieser Kreislinie ist nämlich

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}, \qquad \frac{\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon}{r_0} \log \frac{r_0}{\varepsilon},$$

so dass also sowohl $\frac{r}{r_0}$ wie $\frac{\varepsilon}{r}$ mit ε stetig verschwinden.

Es ist also längs des Kreises mit dem Radius $\frac{r_0}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned}\delta &= (c_0^+ - c_0^-) \cdot \frac{\log r_0 - \log\log \frac{r_0}{\varepsilon}}{\log r_0 - \log \varepsilon} + \frac{c_0^- \log r_0 - c_0^+ \log \varepsilon}{\log r_0 - \log \varepsilon} + (\varepsilon) \\ &= c_0^+ + (c_0^- + c_0^+) \frac{\log\log \frac{r_0}{\varepsilon}}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}} + (\varepsilon),\end{aligned}$$

wobei (ε) eine mit ε in angebbarer Weise (wie eine Wurzel aus dem reciproken Werthe des Logarithmus) stetig verschwindende Grösse ist.

Der hingeschriebene Ausdruck ist also

$$= c_0^+ + (\varepsilon)$$

worin (ε) mit ε stetig verschwindet wie $\frac{\log\log \frac{r_0}{\varepsilon}}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}$.

Nun ist c_0^+ das über den Kreis $r = r_0$ erstreckte Integral:

$$c_0^+ = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{2\pi\lambda} \delta \,.\, d\varphi.$$

Längs des Kreises r_0 ist nun aber bereits bewiesen, dass δ mit ε stetig verschwindet. Folglich verschwindet auch c_0^+ mit ε stetig, und wir haben also den Satz:

$\delta(\zeta)$ verschwindet nicht nur in endlicher Entfernung von der Ausartungsstelle, sondern auch in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{r_0}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}$ mit ε in angebbarer Weise stetig.

Hieraus lässt sich sofort folgender weitere Schluss ziehen:

Wenn die λ-mal umlaufende Kreislinie σ für sich allein die Fläche S' in einen den Punkt ξ enthaltenden Theil und einen den Punkt ξ nicht enthaltenden Theil zerschneidet, so nähert sich G' auch in der Ausartungsstelle selbst, sowie in dem ganzen bei der Ausartung eventuell sich abschnürenden Theil der Fläche stetig gegen den Werth von G in der Ausartungsstelle.

Denn G' unterscheidet sich längs einer die Ausartungsstelle beliebig eng umgebenden Kreislinie, — nämlich vom Radius $\frac{r_0}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}$, — um beliebig wenig von den Werthen der Function G längs dieser Linie. Die Werthe der Function G längs dieser Kreislinie unterscheiden sich aber wegen der Stetigkeit von G in der Umgebung der Ausartungsstelle nur beliebig wenig von dem Werthe von G in der Ausartungsstelle selbst. Folglich unterscheiden sich auch die Werthe von G' längs der Kreislinie $\frac{r_0}{\log \frac{r_0}{\varepsilon}}$ beliebig wenig von dem Werthe von G in der Ausartungsstelle. Da nun aber G' in demjenigen Theil der Fläche S', welcher von dem Innern der Kreislinie und den daran hängenden Blättern gebildet wird, holomorph ist, so muss es auch in diesem ganzen Theil der Fläche bei hinreichend kleinem ε sich beliebig wenig von dem Werthe der Function G in der Ausartungsstelle unterscheiden, w. z. b. w.

Der eben besprochene Fall liegt z. B. immer vor, wenn mehrere Verzweigungspunkte einfach zu einem einzigen Verzweigungspunkte höherer Ordnung zusammenrücken, wenn also keine Zusammenhangsänderung der Fläche — Abschnürung — eintritt. Dann ist also der Uebergang von G' in G in der ganzen Fläche einschliesslich der Ausartungsstelle gleichmässig stetig.

Anders ist es dagegen, wenn die Fläche S' durch die eine Kreislinie σ allein noch nicht in zwei getrennte Stücke zerfällt. Zur vollständigen Trennung der Ausartungsstelle von dem Punkte ζ_0 sind dann mehrere Kreislinien σ nöthig, mögen dieselben übereinander oder an verschiedenen Stellen liegen. Es liegt dann, wie einfache Beispiele

zeigen, gar kein Grund vor, dass längs der verschiedenen Kreislinien G' sich derselben Grenze nähere, dass also in dem durch sie abgeschnittenen Stück ein bestimmter Werth als Grenze von G' sich einstelle.

Wenn z. B. bei einer *zweiblättrigen Fläche mit* 4 *Verzweigungspunkten* zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken, so hat man um die beiden zusammenrückenden Verzweigungspunkte, um sie von der Stelle ζ_0 zu trennen, zwei übereinanderliegende je einfach umlaufende kleine Kreislinien zu ziehen, eine im obern, eine im untern Blatt. Die vollständig ausgeartete Fläche S hat nur zwei Verzweigungspunkte und an der Ausartungsstelle laufen ihre beiden Blätter schlicht und vollständig getrennt übereinander hin. Die Function G der Fläche S wird an der Ausartungsstelle, die ja für S eine ganz beliebige Stelle ist, im oberen und im untern Blatt im Allgemeinen ganz verschiedene Werthe haben. Die Function G' wird sich nun längs der im obern Blatte liegenden kleinen Kreislinie stetig dem Werthe von G im oberen Blatte an der Ausartungsstelle, längs der im untern Blatte liegenden Kreislinie dem Werthe von G im untern Blatte nähern. Dann muss aber, wenn diese Werthe verschieden sind, zwischen den beiden Kreislinien in der Fläche S', also in der unmittelbaren unendlich kleinen Umgebung der Ausartungstelle ein unendlich starkes Gefälle herrschen, und der Grenzwerth von G' in der Ausartungsstelle selbst ist daher ganz unbestimmt, nämlich irgend ein Mittelwerth aus den beiden Werthen von G im obern und im unteren Blatt, welcher davon abhängt, mit welchen Geschwindigkeiten und Richtungen die beiden Verzweigungspunkte sich der Ausartungsstelle nähern.

$\lim G'$ unterscheidet sich daher in unserem Falle von G dadurch, dass es in der Fläche S an der Ausartungsstelle im obern und im untern Blatte je eine hebbare Unstetigkeit besitzt.

Artet die zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten so aus, dass gleichzeitig ein Paar und das andere Paar von Verzweigungspunkten an verschiedenen Stellen zusammenrücken, und liegt der Punkt ζ_0 etwa im oberen Blatt, so hat man, um den Punkt ζ_0 von den Ausartungsstellen zu trennen, um jede Ausartungsstelle nur eine im oberen Blatt liegende kleine einmal umlaufende Kreislinie zu legen. Längs der einen Kreislinie wird sich G' dem Werthe von G an der einen, längs der andern Kreislinie dem Werthe von G an der andern Ausartungsstelle stetig nähern.

In dem ganzen durch die beiden Kreislinien abgeschnittenen Theil der Fläche ist G' holomorph, und besitzt Mittelwerthe ausden Werthen von G an den beid n Ausartungsstellen, und die Vertheilung dieser Mittelwerthe wird im untern Blatt beim Zusammenrücken der Verzweigungspunkte mehr und mehr constant, doch so, dass sie in der Umgebung der Verzweigungspunkte mit unendlich starkem Gefälle

in die Werthe längs der beiden Kreislinien, also in die Werthe von G übergeht.

In unserm zweiten Beispiele unterscheidet sich daher lim G' von G selbst im oberen Blatte durch zwei an den beiden Ausartungsstellen gelegene hebbare Unstetigkeiten, im unteren Blatte ist lim G' ein constanter Mittelwerth aus den beiden Werthen von G an den Ausartungsstellen, aber an den Ausartungsstellen mit je einer hebbaren Unstetigkeit behaftet.

Mit diesen Beispielen schliesse ich ab, was ich über Ausartungen von Fundamentalbereichen sagen wollte. Es ist dieses Thema natürlich noch lange nicht erschöpft, und man wird darüber noch eine reiche Fülle der merkwürdigsten Sätze finden können, besonders, wenn man nicht nur das Verhalten der einfachsten Potentiale, sondern auch der aus ihnen abgeleiteten Functionen genauer untersucht.

Was insbesondere die *algebraischen Functionen* der Fläche betrifft, so wird man leicht finden, dass sie sämmtlich so eingerichtet werden können, *dass sie überall in endlicher Entfernung von den Ausartungsstellen stetig in die Functionen der ausgearteten Fläche übergehen* — abgesehen natürlich von den Unendlichkeitsstellen der Functionen selbst —, *dass aber in den Abschnürungsstellen im Allgemeinen sich hebbare Unstetigkeiten einstellen*, wie bei der Green'schen Function. So, wenn man die *allgemeinste* algebraische Function der ausgearteten Fläche erzielen will. Aber mehr: will man nicht die allgemeinste algebraische Function der ausgearteten Fläche, sondern nur eine solche als Grenze haben, welche an einer Abschnürungsstelle immer in jedem der auseinandergeschnürten Blätter denselben Werth hat, — und solche Functionen der ausgearteten Fläche giebt es gewiss unendlich viele —, so lässt sich zeigen, *dass eine solche besondere algebraische Function der ausgearteten Fläche aus einer algebraischen Function der noch nicht ausgearteten Fläche auch an den Abschnürungsstellen stetig hervorgeht.*

Damit ist dann auch die Berechtigung eines von Herrn Castelnuovo in der Theorie der Punktgruppen auf einer algebraischen Curve angewandten Beweisverfahrens streng nachgewiesen; denn Herr Klein hat dasselbe in seiner Vorlesung über Riemann'sche Flächen vom S. S. 92*) auf folgenden Satz zurückgeführt:

Man kann eine Riemann'sche Fläche so einer Curve in einem Raum von beliebig vielen Dimensionen ein-eindeutig entsprechen lassen, dass einer gewissen Abschnürung von einzelnen Blättern der Riemann'schen Fläche in stetiger Weise ein Zerfallen der Curve in eine Curve von einer um 1 *niedrigeren Ordnung und in eine Secante entspricht.*

---

*) cf. das Selbstreferat in Math. Ann. Bd. 45, S. 144.

Und dies ist offenbar nur ein Specialfall unseres zweiten über die algebraischen Functionen ausgesprochenen Satzes.

Näher auf alle diese Betrachtungen einzugehen, würde mich hier zu weit über den beabsichtigten Umfang meiner Arbeit hinausführen: ich wollte für eine solche genauere Untersuchung der Ausartungen in den letzten zwei Paragraphen, einem blossen Anhang zu meiner allgemeinen Untersuchung, nur die nothwendigsten Grundlagen geben.

Göttingen, im Oktober 1894.

Inhaltsverzeichniss.

Berichtigung zum Theil I.

Im ersten Theil ist mir im Satz 6) auf S. 476/77 insofern ein allerdings unwesentliches Versehen untergelaufen, als in diesem Satz unter symmetrischen Functionen solche verstanden sind, die längs der Symmetrielinien reell sind, während es mir sonst in der Arbeit bequem gewesen ist, diejenigen Functionen symmetrisch zu nennen, welche längs der Symmetrielinien rein imaginär sind, welche also aus ersteren durch Multiplication mit i entstehen. Es ist leicht zu sehen, wie hiernach der Satz zu modificiren ist.

Strahlformen incompressibler reibungsloser Flüssigkeiten.

Auszüglich mitgetheilt aus den Abhandlungen der ung. Akad. der Wissenschaften

von

Dr. M. Réthy in Budapest.*)

Im Anschluss an die Untersuchungen von Kirchhoff**) sollen bei denselben Voraussetzungen neue Specialfälle von wirbelfreien Strahlbildungen incompressibler reibungsloser Flüssigkeiten beschrieben werden. Auch die Bezeichnungen von Kirchhoff halte ich fest; bezeichne also die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Strömungsebene mit x, y, — die Componenten der reciproken Geschwindigkeit in diesem Punkt mit ξ, η, — endlich mit $\varphi =$ const. und $\psi =$ const. die Gleichungen der in ihm sich schneidenden Niveau- resp. Strömungslinien; auch sei

(1) $$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad w = \varphi + \psi i,$$

wo zwischen z, ζ, w die Beziehung stattfindet

(2) $$\zeta = \frac{dz}{dw}.$$

§ 1.

Strom von endlicher Breite, der Querschnitt des Dammes eine geradlinige Strecke.

I. Zwischen den Bildebenen von ζ und w möge die Gleichung bestehen:

(3) $$\left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}\right)^2 = k^2(1 - e^w),$$

wo k reell und > 1 ist. Mittelst dieser Gleichung wird das ζ-Gebiet

---

*) Die Abhandlung wurde vom Verfasser der math. phys. Classe der ung. Akad. der Wiss. am 11. December 1893 vorgelegt; ist erschienen im ung. Original in dem „Ertekezések a Mathematikai Tudományok köréból" 1894, Bd. XV, und erscheint in ausführlicher Uebersetzung in den Berichten aus Ungarn Bd. XII, pag. 144—194.

**) Math. Phys. Mech. 1876, pag. 273—307.

(Fig. 1b), begrenzt einerseits durch die concentrischen Kreisquadranten (34) und (55) mit Radien $= 1$ resp. $= \infty$, andererseits durch die un-

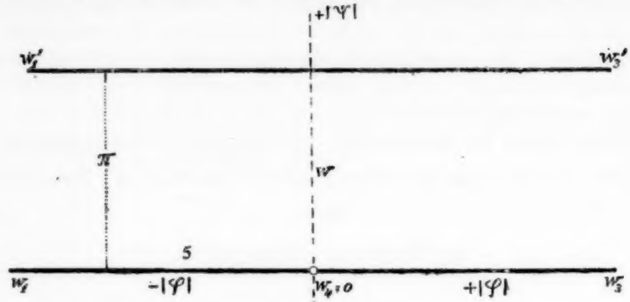


Fig. 1a.

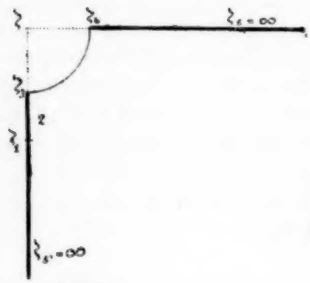


Fig. 1b.

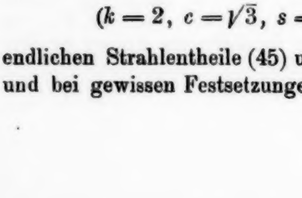


Fig. 1c.

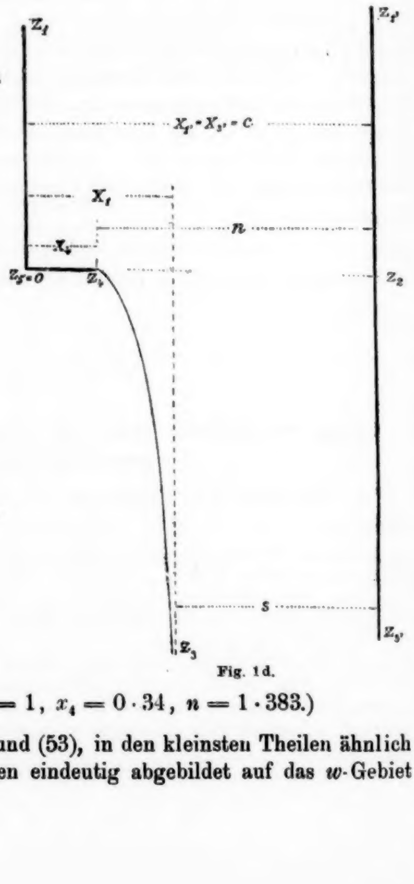


Fig. 1d.

($k = 2$, $c = \sqrt{3}$, $s = 1$, $x_4 = 0 \cdot 34$, $n = 1 \cdot 383$.)

endlichen Strahlentheile (45) und (53), in den kleinsten Theilen ähnlich und bei gewissen Festsetzungen eindeutig abgebildet auf das w-Gebiet

(Parallelstreifen, Fig. 1a), begrenzt durch die in beiden Richtungen unendlichen Geraden $\psi = 0$ und $\psi = \pi$; es entsprechen sich die Punkte

$$(4) \qquad \begin{array}{lll} w_1 = -\infty \quad , & w_4 = 0 \quad , & w_3 = +\infty, \\ \zeta_1 = -i\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2}}, & \zeta_4 = +1, & \zeta_3 = -i. \end{array}$$

Durch die Gleichung

$$\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2 = k^2(1-e^w)$$

wird nämlich das Z-Gebiet (Fig. 1c) begrenzt durch concentrische Halbkreise (34) und (55) mit Radien $= 1$ resp. $= \infty$ und durch die unendlichen Strahlentheile (45) und (53) auf das genannte w-Gebiet conform und eindeutig abgebildet; während durch die Gleichung $Z = \zeta^2$ einem jeden Punkt des Quadranten in ζ ein einziger Punkt der Halbebene Z zugeordnet wird.

Umgekehrt wird einem jeden Punkt des w-Gebietes ein einziger Punkt des ζ-Gebietes zugeordnet mittelst der Gleichungen

$$(5) \qquad u = k\sqrt{1-e^w}, \qquad \zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}},$$

(die mit der Gleichung (3) äquivalent sind) wenn wir festsetzen, dass

$$w = -\infty, \quad u = k, \quad \zeta = -i\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

einander zugeordnete Punkte sind; dadurch sind nämlich die Wurzelzeichen in diesen Punkten, daher im ganzen Gebiet eindeutig bestimmt.

Die Grenzen des z-Gebietes (Fig. 1d) construiren wir mit Hilfe des aus (2) sich ergebenden Integrals

$$z = \int_1^u \zeta \frac{dw}{du} du$$

d. i. (zufolge (5)) aus

$$(6) \qquad z = 2\int_1^u \frac{u^2+u}{u^2-k^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

wo demnach dem Anfangspunkt $z = 0$ der an der Grenze gelegene Punkt $u = 1$ des u-Gebietes zugeordnet ist; hier ist $\zeta = \infty$, also die Geschwindigkeit $= 0$.

Die Ausführung der Rechnungen ergiebt das folgende Resultat:

Die Flüssigkeit strömt (Fig. 1d)*) aus der Unendlichkeit zwischen

---

*) Die Construction der Strömungslinien in den Figuren 1—8 wurde (mit Ausnahme der Fig. 6) von Herrn Ingenieur Josef Beke in Budapest nach

zwei der y-Axe parallelen Ufern in Richtung der negativen y-Axe mit der Geschwindigkeit $\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$; die Breite des Canals ist $\pi\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Das eine Ufer ist eine zur y-Axe parallele in beiden Richtungen unendliche Gerade. Das andere Ufer wird von den Schenkeln eines rechten Winkels gebildet: der eine Schenkel ist die ganze positive y-Axe, der zweite die von $x = 0$ an bis $x = x_4$ reichende Strecke der positiven Axe, die als ein Damm aufgefasst werden kann. Die Flüssigkeit strömt hier durch eine Oeffnung von der Breite

$$x_1 - x_4 = \pi + \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k}$$

in ruhende Flüssigkeit, und bildet einen Halbstrahl, dessen Breite im Unendlichen $= \pi$ ist. Bezeichnet man demnach die Breiten des Canals, der Oeffnung und dieses Strahls im Unendlichen mit c, n, s, so hat man

$$c : n : s = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1 + \frac{2 \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k}}{\pi (k^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right) : 1. \tag{7}$$

Die Grösse k bestimmt das Verhältniss der Canalbreite zur Oeffnung, wie auch umgekehrt dieses Verhältniss die Grösse k bestimmt. Die Formel (7) steht aber in Widerspruch mit einem von Herrn F. Auerbach ohne Beweis aufgestellten Zusammenhang, nach welchem sogar in einem (sub XI, pag. 15 zu beschreibenden) allgemeinern Fall n das harmonische Mittel zwischen c und s sein sollte.*)

Was schliesslich die Form des Strahls anbelangt, so ist ihre freie Grenze in parametrischer Form durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = z_4 + \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$y = -2\,\mathrm{l.}\left(v + (1+v^2)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{k}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{l.}\,\frac{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} - v\,(1-k^{-2})^{\frac{1}{2}}}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} + v\,(1-k^{-2})^{\frac{1}{2}}},$$

wo

$$z_4 = \pi\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} - \pi - \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k}.$$

Wächst v von 0 ins Unendliche, so beschreiben diese Gleichungen die freie Grenze der Flüssigkeit.

---

grafischer Methode ausgeführt, für welche Freundlichkeit ich ihm auch hier meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Die übrigen Figuren (auch Fig. 6) sind nur als Skizzen zu betrachten, die zur Illustration des Textes dienen sollen.

*) Winkelmann, Handbuch der Physik pag. 419. Bd. I.

II. Mittelst Spiegelung des z-Gebietes an der Geraden $z_1 z_2 z_3$ erhält man den Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem Canal durch eine in der Mitte des Dammes angebrachte Oeffnung von beliebiger Grösse (Fig. 2a).

Der Specialfall $k = 1$ liefert $c : n = \infty$; dieser Grenzfall ist der

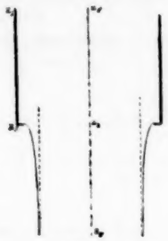


Fig. 2a.
($k=3$)

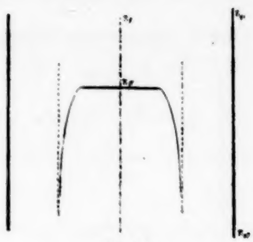


Fig. 2b.
($k=2$)

von Kirchhoff beschriebene Ausfluss durch eine Oeffnung angebracht an einer unendlichen Wand. Wir haben in Folge von

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k} = \operatorname{arc\,sin} \frac{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k}$$

in diesem Grenzfall

$$\frac{s}{n} = \frac{\pi}{2+\pi}$$

in Uebereinstimmung mit Kirchhoff.

III. Mittelst Spiegelung des z-Gebietes an der y-Axe erhält man hingegen (Fig. 2b) einen Strom mit zwei parallelen Ufern, in dessen Mitte senkrecht zu diesen eine unbewegliche Wand von beliebiger Breite angebracht ist. Bezeichnet man die Breiten des Stroms, dieser Wand, und der ruhenden Flüssigkeit im Unendlichen, mit C, W, R, so hat man

$$C : R : W = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} : \frac{x_1 - \pi}{\pi} : \frac{x_4}{\pi},$$

d. i.

$$C : R : W = (k+1)^{\frac{1}{2}} : \left((k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$: \left((k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{2 \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{k}}{\pi (k+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für den Grenzfall lim. $k = \infty$ findet man

$$C : R : W = k^2 : k : \frac{1}{2}.$$

Ist die Breite des Stroms C endlich und die Wand W unendlich schmal, so ist demnach im Unendlichen die Breite R der ruhenden Flüssigkeit unendlich klein im Vergleich zur Stromesbreite, jedoch unendlich gross in Vergleich zu jener der Querwand.

Auch dieser Grenzfall wurde von Kirchhoff behandelt: die Breite der Querwand ist da endlich, hingegen C und $R = \infty$.

IV. Durch fortgesetzte Spiegelung des z-Gebietes (in Fig. 2b)

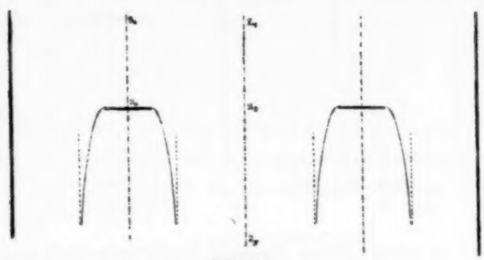


Fig. 2c.

$(k = 2)$

erhält man die in Fig. 2c dargestellte Strömung. Die Anzahl der äquidistanten Querwände von gleicher Grösse ist beliebig.

§ 2.

Der Querschnitt des Dammes eine geradlinige Strecke (Fortsetzung).

V. Die im Eingang des § 1 stehende Gleichung (3) soll verallgemeinert werden durch die Substitution

$$\frac{k_0^2(\alpha^2 - e^w)}{\beta^2 - e^w}$$

an Stelle von $k^2(1 - e^w)$. Man hat dann an Stelle der Gleichungen (5) die folgenden:

$$\text{(9)} \qquad \zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad u = k_0 \sqrt{\frac{\alpha^2 - e^w}{\beta^2 - e^w}};$$

daher ist

$$\text{(9a)} \qquad e^w = \beta^2 \frac{u^2 - k_1^2}{u^2 - k_0^2},$$

wo k_1 die Grösse $\frac{k_0 \alpha}{\beta}$ bedeutet. Dadurch sind die in den Fig. 1 dargestellten ζ und w-Gebiete bei gehöriger Festsetzung bezüglich der Vorzeichen der Wurzelgrössen eindeutig aufeinander bezogen, so dass die Punkte coordinirt sind:

$$w = -\infty, \qquad w = +\infty,$$

$$\zeta = -i\sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}}, \qquad \zeta = -i\sqrt{\frac{k_0+1}{k_0-1}}.$$

Aus (9a) folgt

$$\frac{dw}{du} = \frac{2u}{u^2-k_1^2} - \frac{2u}{u^2-k_0^2};$$

man hat daher

$$\text{(9b)} \qquad \frac{dz}{du} = \zeta\frac{dw}{du} = \frac{2u(1+u)}{(u^2-k_1^2)\sqrt{1-u^2}} - \frac{2u(1+u)}{(u^2-k_0^2)\sqrt{1-u^2}}.$$

Es besteht demnach $\frac{dz}{du}$ aus zwei additiven Theilen von derselben Form wie in § 1. Zur Bestimmung des z-Gebietes setzen wir fest:

$$k_0 > k_1 > 1.$$

Es ergiebt sich bei dieser Festsetzung nach der bekannten Methode des Umlaufs der Grenzen des abzubildenden Gebietes das folgende Resultat:

Die Flüssigkeit (Fig. 3b) strömt aus der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit $\left(\frac{k_1-1}{k_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ in einem *Canal* zwischen zwei parallelen Wänden 40 und 4′1′, welcher im Querschnitt 011′ abgeschlossen ist

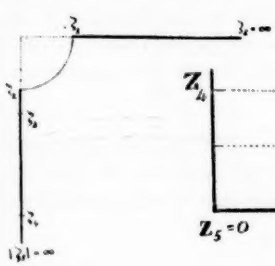
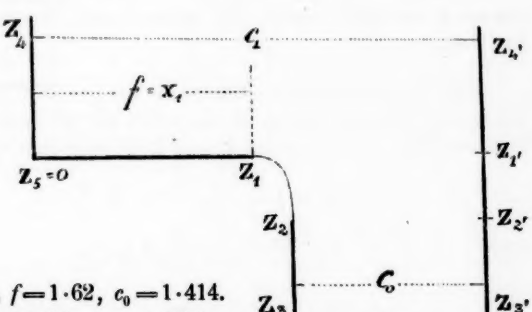


Fig. 3a.



($k_1 = 1\cdot2$, $k_0 = 3$, $f = 1\cdot62$, $c_0 = 1\cdot414$. $c_2 = 3\cdot303$, $x_3 = 1\cdot904$, $y_2 = 0\cdot473$).

Fig. 3b.

durch eine Querwand 01 und eine Oeffnung 11′; die Wand 4′1′ des Canals setzt sich in unveränderter Richtung fort und bildet mit der zu ihr parallelen Wand 23 einen zweiten schmälern Canal. Die Flüssigkeit strömt aus dem ersten Canal in den zweiten und bietet inzwischen auf der einen Seite eine freie Grenze dar.

Bezeichnet man die Breiten der Canäle und der Oeffnung mit C_1, C_0, O, so bestehen die Relationen

(10) $$C_1 : C_0 : O = \left(\frac{k_1+1}{k_1-1}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{k_0+1}{k_0-1}\right)^{\frac{1}{2}} : \frac{x_1}{\pi};$$

wo der Werth von x_1 gegeben ist durch die Formel:

(10 a) $$x_1 = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \left(\pi k_j + 2 \text{ arc tg } (k_j^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Sind die Verhältnisse $C_1 : C_0 : O$ gegeben, so sind auch k_1 und k_0 festgesetzt; die Strömung ist daher nur dann möglich, wenn die Projection der freien Grenze auf die Canalwand von der Länge ist:

(11) $$|y_2| = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^j k_j}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \text{ l. } \frac{k_j - (k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k_j + (k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Man findet ferner als Gleichungen der freien Grenze:

(12) $$\begin{aligned} x &= x_1 + 2 \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \left(\text{arc tg } \frac{(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \text{arc tg } \frac{1}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right), \\ y &= \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^j k_j}{(k_j^2-1)^{\frac{1}{2}}} \text{ l. } \frac{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1-k_j^{-2})^{\frac{1}{2}}}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} + v(1-k_j^{-2})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

VI. Auch diese Strömung lässt sich durch Spiegelung mannigfach gestalten. Man erhält z. B. durch Spiegelung an der Wand 4′3′ den freien Ausfluss aus einem an seinem Ende verengten Canal in einen dünneren einfachen Canal; die beiden Canäle haben eine gemeinsame Axe; etc.

VII. Ich gehe über zur Interpretation derselben Abbildungsformeln, wenn statt k_0 und β imaginäres gesetzt wird; an Stelle von (9), (9 a), etc. kommen dann, wenn wir mit k_0 und β die absoluten Werthe bezeichnen:

(13) $$\begin{gathered} \zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad e^w = \beta^2 \frac{u^2-k_1^2}{u^2+k_0^2}, \\ \frac{dw}{du} = \frac{2(k_1^2+k_0^2)u}{(u^2+k_0^2)(u^2-k_1^2)}, \\ z = \int_1^u \zeta \frac{dw}{du} du = \int_1^u \left(\frac{1}{u^2-k_1^2} - \frac{1}{u^2+k_0^2}\right) \frac{2u(1+u)\,du}{\sqrt{1-u^2}}. \end{gathered}$$

Dem Punkt $w = -\infty$ entspricht demnach auf der ζ-Ebene der Punkt

$$\zeta = -i\left(\frac{k_1+1}{k_1-1}\right)^{\frac{1}{2}};$$

nehmen wir auch hier $k_1 > 1$ an, so ist die Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen parallel zur y-Axe.

Dem Punkte $w = +\infty$ hingegen entspricht auf der ζ-Ebene

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - k_0 i}{1 + k_0 i}};$$

da k_0 reell, daher $|\zeta| = 1$ ist, so endet der Strom in einem Strahl, dessen Grenzlinien zur Asymptote eine gegen die y-Axe geneigte Gerade haben.

Wir construiren die Grenzen des z-Gebietes bei der Annahme, dass die Grenzen des w-Gebietes die parallelen Geraden $\psi = \pi$ und $\psi = 2\pi$ sind.

Die Grenzen des Stromgebietes sind dann, wie folgt, festgestellt: Die Flüssigkeit strömt aus der Unendlichkeit zwischen zwei parallelen

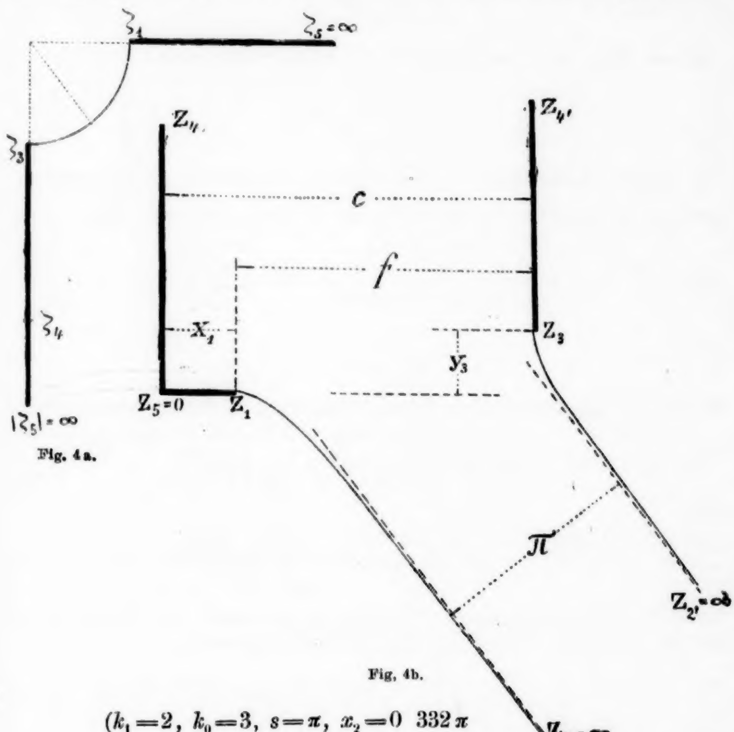


Fig. 4a.

Fig. 4b.

$(k_1=2,\ k_0=3,\ s=\pi,\ x_2=0{\cdot}332\pi$
$y_3=0{\cdot}283\pi,\ f=1{\cdot}4\pi)$.

Wänden 45, 4′3, geht bei der Querwand 51 vorüber, und strömt gegen die Oeffnung 13, wo sie in eine ruhende Flüssigkeit ausfliesst in einem Strahl mit den Grenzen 12∞ und $32'\infty'$.

Die Breite des Strahls im Unendlichen ist π. Die Länge der Querwand 51 ist

$$z_1 = x_1 = \int_1^0 \xi \frac{dw}{du}\, du$$

$$(14) \qquad = \frac{1}{(k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}} \left(\pi k_1 + 2 \operatorname{arc\,tg} (k_1^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$- \frac{1}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \left(\pi k_0 + \mathrm{l.} \frac{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}+1}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}-1}\right).$$

Die Breite des Canals ist

$$c = \pi \left(\frac{k_1+1}{k_1-1}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und die Höhe des Endpunktes 3 oberhalb der Querwand 51 ist

$$y_3 = \int_1^\infty \xi \frac{dw}{du}\, du,$$

bei welcher Integration u reelle Werthe durchläuft, jedoch mit Umgehung des Punktes k_1, da in diesem $\frac{dw}{du} = \infty$ ist; man findet

$$(15) \qquad y_3 = \frac{\pi}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2k_0}{(k_0^2+1)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{l.} \left((k_1^2+1)^{\frac{1}{2}} - k_0\right)$$

$$+ \frac{2k_1}{(k_1^2+1)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{l.} \left(k_1 + (k_1^2-1)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Die Gleichungen der freien Grenze 12∞ wird in parametrischer Form

$$(16) \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + \int_0^v \left(\frac{1}{v_1^2+k_1^2} - \frac{1}{v^2-k_0^2}\right) \frac{2v\,dv}{\sqrt{1+v^2}}, \\ y &= \int_0^v \left(\frac{1}{v^2-k_0^2} - \frac{1}{v_1^2+k_1^2}\right) \frac{2v^2 dv}{\sqrt{1+v^2}}, \end{aligned}$$

bei welchen Integrationen v reelle Werthe durchläuft. Die Gleichungen der freien Grenze $32'\infty'$ sind bei derselben Bemerkung

$$(17) \qquad \begin{aligned} x &= c + \int_\infty^v \left(\frac{1}{v^2+k_1^2} - \frac{1}{v^2-k_0^2}\right) \frac{2v\,dv}{\sqrt{1+v^2}}, \\ y &= y_3 + \int_\infty^v \left(\frac{k_1^2}{v^2+k_1^2} + \frac{k_0^2}{v^2-k_0^2}\right) \frac{2\,dv}{\sqrt{1+v^2}}. \end{aligned}$$

Die ausführlichen Rechnungen finden sich in der Originalabhandlung,

wo y_3 auch auf einem zweiten Integrationsweg berechnet ist. Man sieht leicht ein, dass y_3 bei gehöriger Wahl von k_0 und k_1 auch negativ ausfallen kann.

Bei Einführung eines Vergrösserungscoefficienten a erleiden die drei Grössen c, x_1 und y_3 eine a-fache Vergrösserung, und die Formeln enthalten ebenfalls drei zwischen gewissen Grenzen willkürliche Werthe k_0, k_1 und a. Mit der Lösung der Aufgabe, welches die Werthe der Letzteren bei beliebig gegebenen c, x_1, y_3 sind, habe ich mich nicht befasst.

VIII. Mittelst Spiegelung an der Linie $z_4 z_5$ erhält man (Fig. 5) die Zerlegung eines aus einem Canal von endlicher Breite ausfliessenden

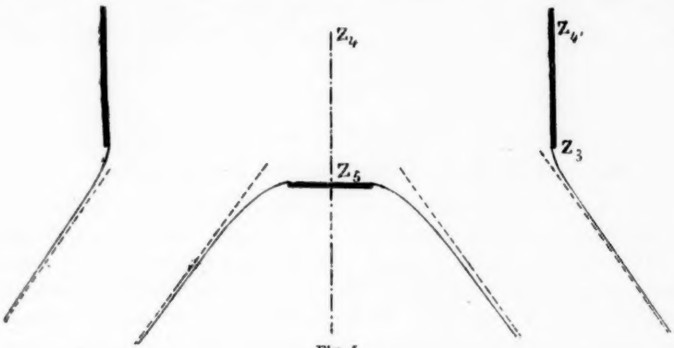


Fig. 5.

Strahls in zwei Strahlen in Folge einer festen Querwand, die in der Mitte des Canals senkrecht zur Axe angebracht ist.

Die Wand z_5 kann bei gehörigen Werthen von k_0 und k_1 auch in's Innere des Canals fallen.

IX. Ohne mich in ausführliche Rechnungen einzulassen, füge ich im Anschluss an die eben beschriebene die folgende Abbildung bei.

Es seien in den Gleichungen

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad e^{w} = \beta^2 \frac{u^2+k_1^2}{u^2+k_0^2}$$

die Grössen β, k_0, k_1 reell; dann sind

$$w = -\infty, \quad u = -k_1 i, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1-k_1 i}{1+k_1 i}},$$

$$w = +\infty, \quad u = -k_0 i, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1-k_0 i}{1+k_0 i}},$$

$$w = \mathrm{l.}\,\frac{\beta^2 k_1^2}{k_0^2}, \quad u = 0, \quad \zeta = 1$$

zusammengehörige Werthe, und zwar fallen die so definirten ζ-Punkte auf den Einheitskreis (Fig. 6a). Daraus ergiebt sich als Skizze der Strömung die Fig. 6b.

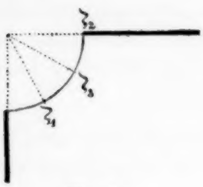


Fig. 6a.

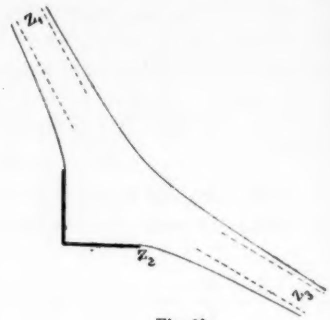


Fig. 6b.

§ 3.

Der Querschnitt des Dammes ist von der Winkelform $\lrcorner$.

X. Die Grenzen des ζ-Gebietes (Fig. 7b) seien: Ein Halbkreis, dessen Endpunkte 3 und 2 auf der ξ-Axe liegen; die aus den Punkten 3 und 2 in's Unendliche laufenden Radien des Kreises; die im Unendlichen gelegenen Quadranten BB; endlich die doppelt zu zählenden Radientheile BA resp. AB, deren Endpunkte B, B im Unendlichen sind, während der Punkt A sich vom Mittelpunkt in einer Entfernung > 1 befindet.

Dieses ζ-Gebiet ist auf einen Parallelstreifen von der Breite 2π abzubilden (Fig. 7a), so dass drei *beliebige* Punkte der Grenzen sich gegenseitig entsprechen. Die Gleichung (3) liefert schon eine solche Abbildung nur bei specieller Zuordnung der Randpunkte. Um die Aufgabe allgemein zu lösen, haben wir nur zu setzen anstatt $e^{\frac{w}{2}}$ die linear-gebrochene Function

$$\frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}},$$

wo α, β, γ, δ zu bestimmende Constanten sind. Wir kommen so auf die Abbildungsformel

$$(18) \qquad \zeta = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \qquad u = k\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}}\right)^2}.$$

Die daraus entspringenden mannigfaltigen Strömungen lassen sich leicht skizziren, man hat nur den Punkten $-\infty$, 0, $+\infty$ des w-Gebietes beliebige, nur in demselben Sinne aufeinander folgende, Randpunkte des ζ-Gebietes zuzuordnen.

Man führe ein v-Gebiet ein mittelst der Substitution:

$$v = \frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}}, \tag{19}$$

d. i.

$$e^{\frac{w}{2}} = \frac{-\alpha + \gamma v}{\beta - \delta v};$$

aus ihr folgt

$$\frac{dw}{dv} = 2\,\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\alpha - \gamma v)(\beta - \delta v)}.$$

Mit Beiziehung von $\zeta = \frac{dz}{dw}$ hat man daher

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha - \gamma v)(\beta - \delta v)},$$

d. i.

$$\frac{dz}{dv} = \frac{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha - \gamma v)(\beta - \delta v)}\,\frac{1 + k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}. \tag{20}$$

Es ist demnach z im Allgemeinen ein elliptisches Integral von v.

Wir berechnen ausführlich bloss die Fälle, wo bei reellem positivem a_0 entweder

$$\text{I.}\quad \begin{array}{lll} \zeta = -a_0, & \zeta = -1, & \zeta = +1. \\ w = -\infty, & w = +\infty, & w = 0 \end{array}$$

oder

$$\text{II.}\quad \begin{array}{lll} \zeta = +a_0, & \zeta = -1, & \zeta = +1, \\ w = -\infty, & w = \infty, & w = 0 \end{array}$$

zugeordnete Punkte sind. Es entspringen aus

$$u = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \quad v^2 = 1 - \frac{u^2}{k^2} = \left(\frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}}\right)^2$$

die folgenden Bestimmungsgleichungen für α, β, γ, δ

$$1 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{a_0^2 - 1}{a_0^2 + 1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2,$$

$$1 = \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2,$$

$$1 = \left(\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}\right)^2.$$

Den Gleichungen geschieht genüge, wenn entweder

a) $\alpha = -2a, \quad \beta = 1 + a, \quad \delta = \quad 1 + a, \quad \gamma = -2;$

oder

b) $\alpha = \quad 2a, \quad \beta = 1 - a, \quad \delta = -1 + a, \quad \gamma = \quad 2.$

Im ersten Falle ist $\frac{\beta}{\gamma} = +1$, im zweiten $= -1$.

Der Werth von $\frac{\alpha}{\gamma}$ ist in beiden Fällen $= a$.

Der Werth von $\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$ ist im ersten Fall $= -1$, im zweiten $= +1$.

Im Falle a) hat man

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -2a(1+a) + 2(1+a) = 2(1-a^2).$$

Im Falle b)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \quad 2a(a-1) - 2(1-a) = 2(a^2-1),$$

und in derselben Reihenfolge

(20a) $$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1-a)}{(v-a)(1-v)} \frac{1 + k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}};$$

(20b) $$\frac{dz}{dv} = \frac{2(1+a)}{(a-v)(1+v)} \frac{1 + k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}.$$

Diese Gleichungen gehen in einander über, wenn man statt v, a setzt $-v$, $-a$.

Zur ersteren Gleichung (Fall I) gehört die Substitution:

(19a) $$v = \frac{-2a + (1+!)e^{\frac{w}{2}}}{-2 \quad + (1+a)e^{\frac{w}{2}}}:$$

zur zweiten (Fall II)

(19b) $$v = \frac{2a + (1-a)e^{\frac{w}{2}}}{2 + (-1+a)e^{\frac{w}{2}}}.$$

XI. Im ersten Fall strömt die Flüssigkeit (Fig. 7) in einem Canal von der Breite c aus der Unendlichkeit gegen einen Damm von der Breite g, der mit einer Einbiegung von der Länge h versehen ist,

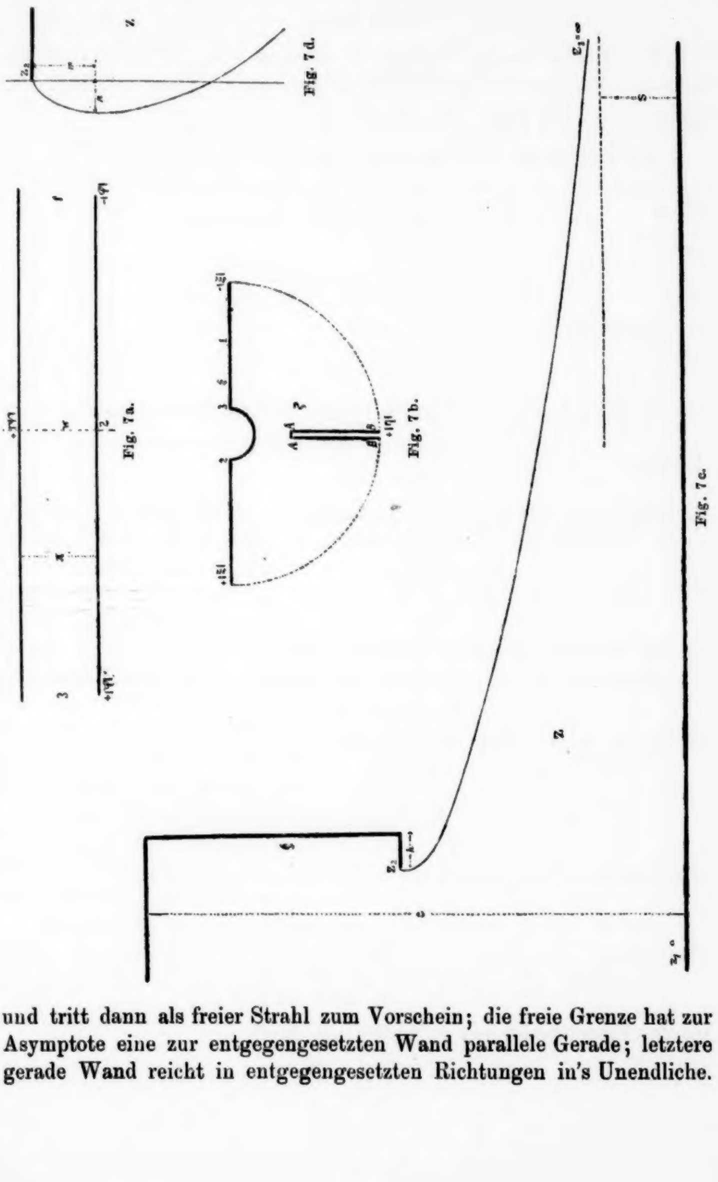


Fig. 7a. Fig. 7b. Fig. 7c. Fig. 7d.

und tritt dann als freier Strahl zum Vorschein; die freie Grenze hat zur Asymptote eine zur entgegengesetzten Wand parallele Gerade; letztere gerade Wand reicht in entgegengesetzten Richtungen in's Unendliche.

Zu berechnen sind c, g, h und die Dicke des Strahls im Unendlichen s.

Man hat

$$s = 2\pi,$$
$$c = 2\pi a_0.$$

Die Breite des w-Streifens ist nämlich $= s = 2\pi$, und die Geschwindigkeit der Strömung hat im unendlich entfernten Querschnitt ($w = -\infty$) des Canals den Werth $\frac{1}{a_0}$.

Zur Berechnung von g und h setze man

$$(20\text{a}) \qquad \frac{dz}{dv} = \frac{2(1-a)}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}},$$

und

$$(21) \qquad f(v) = \frac{2(1-a):k}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}},$$

wo gesetzt ist

$$\lambda^2 = \frac{k^2-1}{k^2}.$$

Da im Bereich der Breite g die Ungleichheiten Bestand haben:

$$-\lambda < v < +\lambda; \quad \lambda < 1$$

demnach

$$v^2 < \lambda^2 < 1,$$

so ist $f(v)$ überall imaginär. Daher ist

$$(22) \qquad g = \frac{2(1-a)}{k} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{(a-v)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{\lambda^2-v^2}} dv,$$

wo die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Ebenso ist in allen Punkten des Einsprungs von der Tiefe h

$$\lambda < -v < 1,$$

daher $f(v)$ überall reell und demzufolge

$$(23) \qquad h = \frac{2(1-a)}{k} \int_{\lambda}^{1} \frac{1}{(a+v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}} dv.$$

Die Differentialgleichungen der freien Grenze sind endlich:

$$(24) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= \frac{2(1-a)}{k} \frac{1}{(v-a)(1-v)\sqrt{v^2-\lambda^2}}, \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{2(1-a)}{k} \frac{\sqrt{v^2-1}}{(v-a)(1-v)\sqrt{v^2-\lambda^2}}, \end{aligned}$$

wo das Zahlengebiet von v gegeben ist durch

$$1 \leqq v^2 \leqq \infty,$$

XII. Bezüglich der Reduction von g und h auf Normalintegrale verweise ich auf die oben angeführte Publication. Ich unterlasse auch die nähere Beschreibung des in Fig. 8 skizzirten Falles, welcher der An-

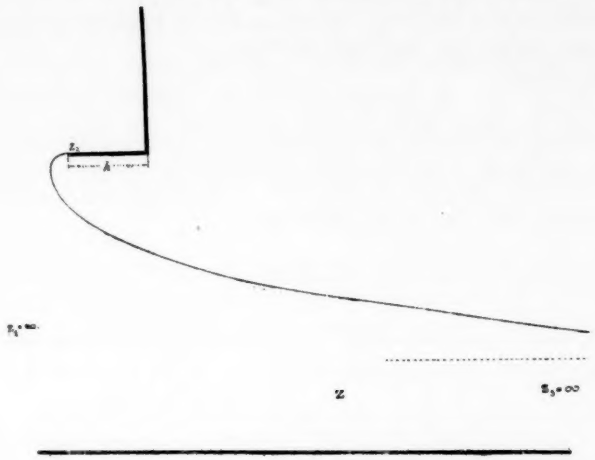


Fig. 8.

nahme $a = \lambda$ entspricht und übergehe zur Beschreibung des in X skizzirten zweiten Falles. Die Flüssigkeit strömt aus der Unendlichkeit in einem Canal von der Breite c (Fig. 9) gegen eine Wand von der Länge $g > c$, die mit den Wänden des Canals einen rechten Winkel einschliesst und die Fortsetzung der einen Wand bildet; die Wand g ist ein Theil des Dammes, der zweite Theil läuft parallel den Wänden des Canals und reicht in die Unendlichkeit. Die Berechnung der Dimensionen der Strömung, wie auch die der freien Grenzen finden sich a. a. O.

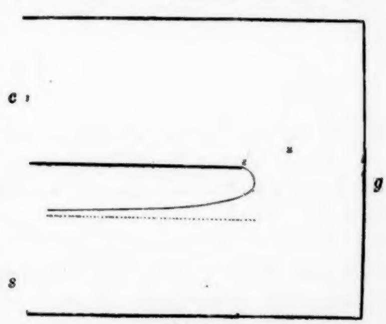


Fig. 9.

Es versteht sich von selbst, dass man durch Spiegelung aus den bisher beschriebenen, wie auch aus den im folgenden Paragraphen zu beschreibenden Strömungen scheinbar andere Formen ableiten kann.

§ 4.

Allgemeinere Strömungsformen mit freier Grenze.

XIII. Man erhält in gewisser Hinsicht eine Zusammensetzung von einfachen Strömungen auf folgende Weise:

Es mögen
$$\zeta_j = f_j(\omega); \quad (j = 1, 2, \ldots m)$$
in beschränkten Gebieten im *Innern überall* isogonale Abbildungen darstellen, bei welchen einem speciellen Stücke der Geraden $\psi = 0$ der w-Ebene in den ζ_j-Ebenen, für sämmtliche j, Kreisbögen mit dem Radius 1 entsprechen; dann liefert die Beziehung
$$\zeta = \prod_{j=1}^{m} \zeta_j$$
eine im Innern des schmälsten der w-Streifen überall isogonale Abbildung der Art, dass die Beziehung
$$z = \int \zeta \, dw$$
eine Strömung mit freier Grenze beschreibt.

Es seien insbesondere φ_j reelle, k_j und n_j positive Zahlen, und zwar $n_j < 1$. Es seien ferner
$$U_j = \frac{1 + u_j}{1 - u_j}; \quad u_j = k_j (e^{\varphi_j} - e^w)^{\frac{1}{2}},$$
$$\zeta = \prod_{j=1}^{m} U_j^{n_j},$$
wo Π das Symbol der Multiplication bedeutet.

Wenn keines der k_j kleiner ist als 1, und keines der e_j kleiner als 0, so erhalten wir jedenfalls eine Strömung mit freier Grenze, wenn wir die Abbildung der ζ-Ebene auf die w-Ebene, auf den zwischen $\psi = 0$ und $\psi = h$ befindlichen Streifen beschränken; dabei h so bestimmen, dass im *Innern* des Streifens kein Punkt sich befinde, in welchen $\frac{dz}{dw} = 0$ oder ∞ wird.

Da nämlich keiner der Factoren $U_j^{n_j}$, dem absoluten Betrag nach, < 1 wird, so ist auch das Product Aller, nämlich $\zeta < 1$. Da ferner sämmtliche u_j imaginär werden, wenn w über einen gewissen positiven Werth w_0 hinaus wächst, so werden auch sämmtliche U_j, daher auch ζ gleich der complexen Einheit. *Jenem Theil der Geraden $\psi = 0$, auf welchem $\varphi > w_0$ ist, entspricht daher auf der Strömungslinie eine freie Grenze;* denn auf dieser Linie ist die Geschwindigkeit, wie soeben

gezeigt wurde, $= 1$, während sie im Innern der Strömungsebene überall < 1 ist. Unendlich kann ζ nur in den Punkten werden, wo

$$u_j = 1, \quad \text{d. i.} \quad e^w = e^{\varphi_j} = \frac{1}{k_j^2}$$

wird; hier wie auch dort, wo $\frac{dz}{dw} = 0$ oder $= \infty$ wird, müssen sich feste Wände befinden.

Die Bedingung, dass keiner der k_j kleiner sei als 1, und keines der e_j kleiner als 0, ist aber keinesfalls eine nothwendige.

Die Strömung wird am einfachsten, wenn sämmtliche $\varphi_j = 0$ werden, und

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = 1$$

stattfindet; *die Strömungsebene wird in diesem Fall durch* Figur 10b *dargestellt; die Seitenanzahl des Dammpolygons ist* $= m$*;* die Grössen der Winkel werden durch die Exponenten n_j, die Seiten durch die

Fig. 10 a.

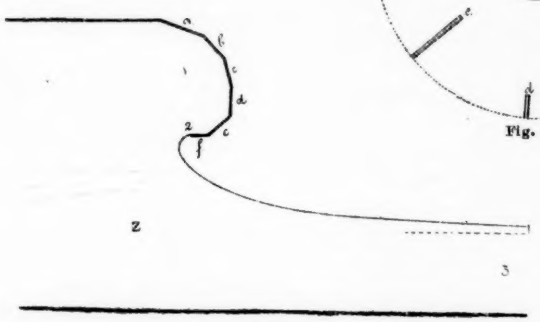


Fig. 10 b.

Werthe von n_j und k_j bestimmt. Die Geschwindigkeit wird $= 0$ *in allen Ecken* des Polygons, während sie sich auf den Seiten continuirlich ändert (Fig. 10a). Der Uebergang von Damm-*Polygon* auf stetig gekrümmte Damm-*Curven* ist demzufolge auf diesem Weg nicht statthaft.

1. Als Beispiel zur Zusammensetzung von einfachen Strömungen diene

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 + k_1 u}{1 - k_1 u}} \sqrt{\frac{1 + k_2 u}{1 - k_2 u}},$$

$$u = \sqrt{1 - e^w}, \quad k_1 > k_2 > 1.$$

Die w-Ebene sei der Parallelstreifen zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$.

Die einzelnen

$$\zeta_j = \sqrt{\frac{1 + k_j u}{1 - k_j u}} \quad (j = 1, 2)$$

werden durch Fig. 1 b und 11 a_1, daher die aus ihnen entspringende ζ-Ebene durch Fig. 7 dargestellt. Die Abbildungsformel und demzufolge auch die Strömung selbst ist enthalten in der im vorigen Paragraphen zu Grunde liegenden. Ich unterdrücke den Beweis, und füge nur hinzu, dass dies auch dann zutreffen kann, wenn k_1 und k_2 complex conjugirt sind; auch kann das Eine von ihnen < 1, zugleich muss aber das Andere > 1 sein.

2. Als zweites Beispiel sei angeführt

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 + k_1 u}{1 - k_1 u}} \sqrt{\frac{1 + k_2 u}{1 - k_2 u}} \sqrt{\frac{1 + k_3 u}{1 - k_3 u}}, \quad u = \sqrt{1 - e^w},$$

Die Figur 11 a und 11 b zeigen bei speciellen Annahmen für $k_1 > k_2 > k_3 > 1$ die entsprechenden reciproken Geschwindigkeits-

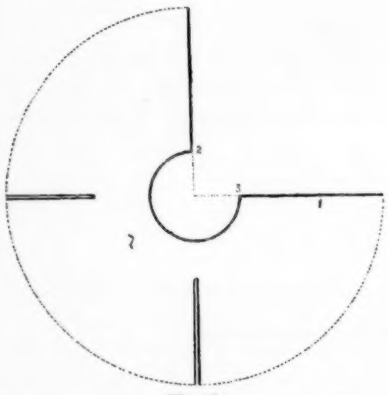


Fig. 11 a.

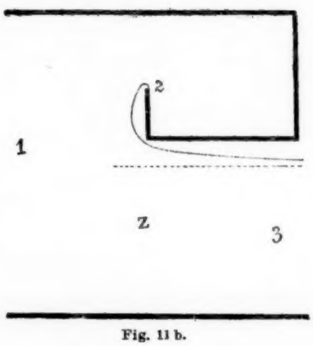


Fig. 11 b.

und Strömungs-Gebiete, während das w-Gebiet ein Parallelstreifen von der Breite π ist.

Dass ζ und u (nach getroffener Wahl der Wurzelzeichen in einem Punkt) sich auf einander eindeutig beziehen, folgt daraus, dass $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$ nur in Randpunkten 0 oder ∞ wird. Es ist nämlich

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\zeta}{2}\left(\frac{k_1}{1 - k_1^2 u^2} + \frac{k_2}{1 - k_2^2 u^2} + \frac{k_3}{1 - k_3^2 u^2}\right);$$

dies wird aber nur unendlich, wenn einer der Werthe $1 - k_j u$ ver-

schwindet, also in Punkten wo $\zeta = \infty$ wird d. i. in Randpunkten. Ferner wird $\frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0$ in zwei Punkten, die aber reellen u entsprechen, demzufolge ebenfalls Punkte der Grenzen sind; es entsprechen denselben auf der ζ-Ebene die beiden Cuspidalpunkte der Grenze.

Ist die Anzahl der ζ_j grösser als 3, so erhält man Strömungen mit freier Grenze, deren Beschreibung mittelst hyperelliptischer Integrale geschieht. Sind alle Grössen k_j reell, so sind auf jeden Fall sämmtliche feste Wände gerade; der allgemeinere Fall bleibt spätern Untersuchungen vorbehalten.

3. Zur Beschreibung der Strömung genügen hyperelliptische Integrale, sobald im allgemeinen Ausdruck für ζ (Art. XIII, pag. 266) sämmtliche $n_j = \frac{1}{2}$ sind. Ich beschränke mich auf die nähere Betrachtung des Falles, wo nur zwei ζ_j auftreten, demzufolge zur Beschreibung elliptische Integrale genügen. Es sei demnach

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 + k_1 u_1}{1 - k_1 u_1}} \sqrt{\frac{1 + k_2 u_2}{1 - k_2 u_2}},$$

$$u_1 = \sqrt{e^{\varphi_1} - e^{w}};$$

$$u_2 = \sqrt{e^{\varphi_2} - e^{w}}.$$

Man setze

$$u = e^{w},$$

$$a_1 = e^{\varphi_1},$$

$$a_2 = e^{\varphi_2};$$

man erhält

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u} \frac{(1 + k_1\sqrt{a_1 - u})(1 + k_2\sqrt{a_2 - u})}{\sqrt{(1 - k_1^2(a_1 - u))(1 - k_2^2(a_2 - u))}}.$$

Wir setzen speciell fest, dass die Grössen k_j und φ_j reell seien, u. zw.

$$k_1 > k_2 \geqq 1; \quad \varphi_1 > \varphi_2.$$

Die Gebiete der ζ_j seien dieselben wie (pag. 250, 257) mit dem Unterschiede, dass die Punkte $\zeta_j = 1$ nicht dem Punkt $w = 0$ sondern $w = \varphi_j$ entsprechen (Fig. 12a$_1$, 12a$_2$; 13a$_1$, 13a$_2$).

Ist $\psi = 0$, und $\varphi < \varphi_2$, so beschreibt das ζ-Bild des untern Randes vom w-Streifen dieselbe Linie wie im ersten Beispiel (pag. 267); wenn hingegen

$$\varphi_1 > \varphi > \varphi_2,$$

so ist ζ_2 gleich der complexen Einheit, während bezüglich ζ_1 zwei Fälle möglich sind: entweder ist ζ_1 reell und positiv im *ganzen* Intervall, oder es ist in der ersten Hälfte noch imaginär.

In Fig. 12b, 12c ist der erste Fall, in Fig. 13b, 13c der zweite skizzirt; ich bemerke, dass im zweiten Fall die beiden krummen Aeste

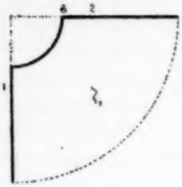


Fig. $12a_1$.

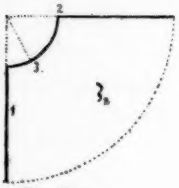


Fig. $12a_2$.

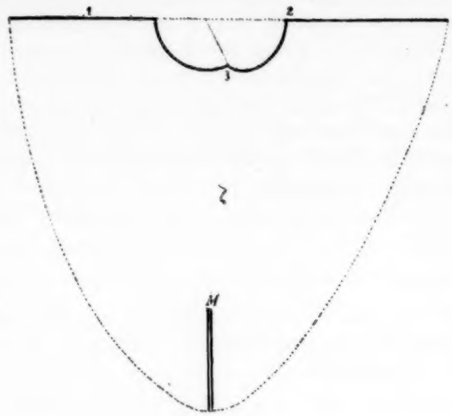


Fig. 12b.

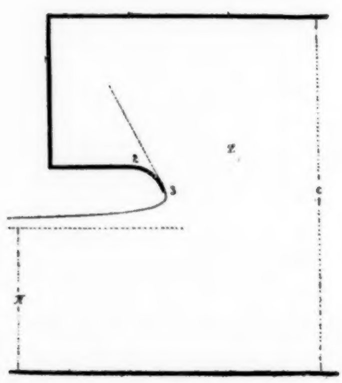


Fig. 12c.

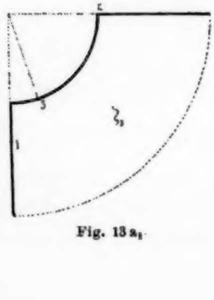


Fig. $13a_1$.

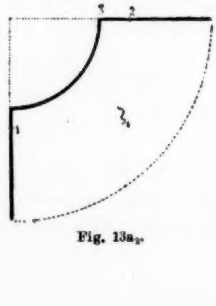


Fig. $13a_2$.

auf dem Rand der ζ-Ebene eine gemeinschaftliche Asymptote besitzen. Eine leichte Rechnung, die ich hier unterdrücke, zeigt, dass ausser den Punkten, wo $\zeta = 0$ oder $= \infty$ wird, noch in jenen Punkten Singularitäten auftreten, wo die Gleichung stattfindet

$$k_2(1-k_1{}^2u_1{}^2)\,u_1 + k_1(1-k_2{}^2u_2{}^2)\,u_2 = 0;$$

in diesen Punkten ist nämlich $\frac{dz}{dw} = 0$.

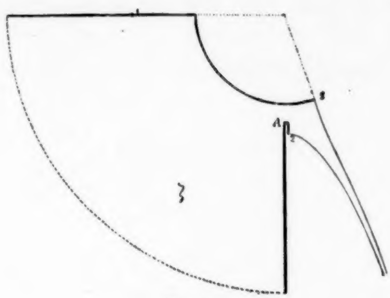


Fig. 13b.

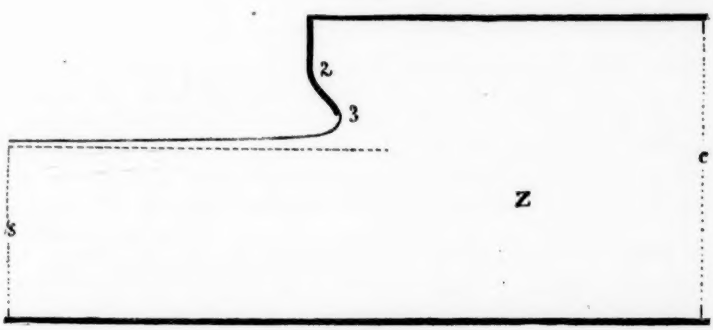


Fig. 13c.

XVII. Die eine Seite des Strömungs-Gebietes endet in den hier beschriebenen Fällen in einer freien Grenze des ausfliessenden Strahls, was eine Folge dessen ist, dass dem Punkt $w = \infty$ imaginäre u_j Werthe entsprechen für alle j. Man entfernt diese Beschränkung, wenn man in den ζ-Formeln an Stelle von e^w eine linear-gebrochene Function von e^w einführt. Man erhält so Strömungsebenen, die zu den ursprünglichen dieselbe Beziehung darbieten, wie Strömungen in § 2 zu denen in § 1.

Man erhält ähnliche Strömungen von allgemeinerer Natur bei Zugrundelegung der Beziehung

$$\zeta = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{u_j + k_j v_j}{u_j - k_j c_j}\right)^{n_j},$$

$$u_j = \left((a_{j_1} - e^w) \ldots (a_{j_p} - e^w)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$v_j = \left((b_{j_1} - e^w) \ldots (b_{j_p} - e^w)\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo die a, b, k, n Constante bezeichnen, und die Breite des w-Streifens so zu bestimmen ist (pag. 266), dass die Abbildung im *Innern* überall conform bleibt.

Budapest, December 1893.

Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

1.

Auf Veranlassung meines verehrten Collegen, Herrn A. Stodola, beschäftigte ich mich vor einiger Zeit mit der Frage, wann eine Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

nur solche Wurzeln besitzt, deren reelle Bestandtheile negativ sind. Wenn auch die Erledigung dieser Frage nach den Methoden von Sturm, Liouville, Cauchy und Hermite keine principielle Schwierigkeit bietet, so erlaube ich mir doch das Resultat, zu welchem ich gelangt bin, hier mitzutheilen, weil dasselbe wegen seiner einfachen, für die Anwendungen brauchbaren Gestalt vielleicht einiges Interesse verdient*).

Die Herleitung des Resultates giebt mir zugleich Gelegenheit, die Methode von Hermite-Jacobi in einer Form darzustellen, in welcher sie eine Verallgemeinerung nach verschiedenen Richtungen zulässt.

Man darf sich, was hier geschehen soll, offenbar auf den Fall beschränken, wo der Coefficient a_0 positiv ist. Denn andernfalls kann man die linke Seite der Gleichung mit dem Factor -1 multipliciren. Man bilde nun die Determinante

*) Herr Stodola benutzt mein Resultat in seiner Abhandlung über „die Regulirung von Turbinen“ (Schweiz. Bauzeitung, Bd. 23, Nr. 17, 18), deren Ergebnisse bei der Turbinenanlage des Badeortes Davos mit glänzendem Erfolge Anwendung gefunden haben. — Die obige Frage wird auch, worauf mich Herr Stodola aufmerksam machte, in Thomson und Tait's Natural Philosophy (1886. Theil I, pag. 390) aufgeworfen und ihre Erledigung als wünschenswerth bezeichnet.

$$(1)\qquad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0, & a_2, & a_4, & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0, & a_1, & a_3, & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_\lambda \end{vmatrix}$$

nach der Maassgabe, dass die Indices in der ersten Horizontalreihe immer um zwei Einheiten wachsen, in jeder Verticalreihe immer um eine Einheit abnehmen. Dabei ist allgemein $a_\varkappa = 0$ zu setzen, wenn der Index $\varkappa$ negativ oder grösser als n ist.

Dies vorausgeschickt, gilt der Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung

$$(2)\qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

in welcher der Coefficient a_0 positiv vorausgesetzt wird, nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandtheilen besitzt, ist die, dass die Werthe der Determinanten

$$(3)\qquad \Delta_1 = a_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, \dots \Delta_n$$

sämmtlich positiv sind.

Zu diesem Satze ist noch folgendes zu bemerken. Die Determinante Δ_n ist, wie man leicht erkennt, indem man sie nach den Elementen der letzten Verticalreihe entwickelt, gleich $a_n \cdot \Delta_{n-1}$.

Daher ist die Forderung, dass Δ_{n-1} und Δ_n positiv sein sollen, gleichbedeutend mit der anderen, dass Δ_{n-1} und a_n positiv sein sollen. Der obige Satz bleibt also richtig, wenn a_n an Stelle von Δ_n gesetzt wird. Eine andere Bemerkung ist diese:

Betrachtet man die Reihe der Determinanten

$$(4)\qquad \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4, \dots,$$

so verschwinden die Glieder dieser Reihe vom $(n+1)^{\text{sten}}$ ab identisch, d. h. für unbestimmt gedachte Werthe von $a_0, a_1, \dots a_n$. Denn die Elemente der letzten Verticalreihe von Δ_λ sind für $\lambda > n$ sämmtlich Null. Die Bedingung des Satzes kann also auch dahin ausgesprochen werden, dass die nicht identisch verschwindenden Glieder der Reihe (4) sämmtlich positiv sein müssen. Die Glieder dieser Reihe sind ausführlich geschrieben diese:

$$a_1,\quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ a_0, & a_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5 \\ a_0, & a_2, & a_4 \\ 0, & a_1, & a_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & a_7 \\ a_0, & a_2, & a_4, & a_6 \\ 0, & a_1, & a_3, & a_5 \\ 0, & a_0, & a_2, & a_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

und man bildet hiernach ohne Weiteres die Bedingungen für jeden speciellen Werth von n.

Beispielsweise lauten die Bedingungen für die Gleichung 4ten Grades ($n = 4$):

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ a_0, & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & 0 \\ a_0, & a_2, & a_4 \\ 0, & a_1, & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad a_4 > 0.$$

Herr Stodola hat bemerkt, dass eine *nothwendige* Bedingung dafür, dass die Gleichung (2) nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandtheilen besitzt, die ist, dass sämmtliche Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ positiv sind. In der That: wenn die reellen Bestandtheile aller Wurzeln der Gleichung (2) negativ sind, so hat jeder reelle Linearfactor der linken Seite der Gleichung die Form $x + p$ und jeder reelle quadratische Factor die Form $(x+p_1)^2 + p_2^2 = x^2 + p'x + p''$, wo p, p_1, p_2, p', p'' positive Grössen bezeichnen. Da aber das Product von ganzen Functionen mit positiven Coefficienten ebenfalls positive Coefficienten besitzt, so wird auch die linke Seite der Gleichung (2) nur positive Coefficienten aufweisen.

2.

Die ganze rationale Function $f(x)$, deren Coefficienten zunächst auch complexe Werthe besitzen können, möge der einen Bedingung unterworfen sein, dass sie für keinen rein imaginären Werth von x verschwindet. Bezeichnen dann N bez. P die Anzahlen der Nullstellen von $f(x)$, die negativen bez. positiven reellen Theil besitzen, so ist

(5) $$N + P = n,$$

unter n den Grad von $f(x)$ verstanden. Es sei nun c eine beliebige (complexe) Constante und

(6) $$cf(x) = \varrho \, . \, e^{i\pi\varphi},$$

so dass ϱ den absoluten Betrag und $\pi\varphi$ das Argument von $cf(x)$ bezeichnet. Der Winkel φ ändert sich stetig mit dem Werthe von x und nimmt insbesondere um

(7) $$N - P = \Delta$$

Einheiten ab, wenn x die rein imaginären Zahlen von $+i\infty$ bis $-i\infty$ durchläuft. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man, unter Benutzung der üblichen geometrischen Darstellung der complexen Zahlen, die Aenderung des Argumentes des einzelnen Linearfactors von $f(x)$ verfolgt. Nach (5) und (7) ist nun

(8) $$N = \frac{n + \Delta}{2}, \quad P = \frac{n - \Delta}{2}.$$

Die Bestimmung von Δ wird jetzt in bekannter Weise auf die

eines Cauchy'chen Index*) zurückgeführt. Allgemein hat man unter dem Index einer Grösse R, die in jedem Punkte einer in bestimmtem Sinne zu durchlaufenden Linie L einen bestimmten reellen Werth besitzt, die folgendermassen zu bildende Zahl zu verstehen. Man ordne jedem Punkte von L, in welchem R unendlich wird, die Zahl 0, oder $+1$ oder -1 zu, je nachdem R beim Ueberschreiten des Punktes das Zeichen nicht wechselt oder von negativen zu positiven oder von positiven zu negativen Werthen übergeht. Der Index von R bezüglich der Linie L ist dann die Summe aller den Unendlichkeitspunkten von R zugeordneten Zahlen. Man setzt hierbei stillschweigend voraus, dass R nur in einer endlichen Zahl von Punkten unendlich werdend das Zeichen wechselt, und dass $\frac{1}{R}$ in der Umgebung dieser Punkte stetig ist.

Dies in Erinnerung gebracht, sei z eine reelle Veränderliche und

$$cf(-iz) = U + iV, \tag{9}$$

wo U und V ganze Functionen von z mit reellen Coefficienten bezeichnen. Wird nun

$$\frac{V}{U} = R(z) \tag{10}$$

gesetzt, so hat man

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} R(z),$$

und aus dieser Gleichung folgt, dass Δ übereinstimmt mit dem Index von $R(z)$ bezüglich der im Sinne der wachsenden z zu durchlaufenden reellen z-Axe (die als eine im Unendlichen geschlossene Linie anzusehen ist). Im Folgenden nehme ich an, dass $R(z)$ für $z = \infty$ nicht unendlich wird, was offenbar gestattet ist, da man über die Constante c willkürlich verfügen kann.

3.

Es sei jetzt $R(z)$ irgend eine rationale Function von z mit reellen Coefficienten, die für $z = \infty$ endlich bleibt.

Der Index von $R(z)$ (bezüglich der im Sinne der wachsenden z zu durchlaufenden Axe der reellen Zahlen) lässt sich bekanntlich durch das Sturm'sche Divisionsverfahren oder nach Hermite durch Aufstellung einer quadratischen Form bestimmen, deren Signatur mit dem gesuchten Index übereinstimmt. Unter „Signatur" einer quadratischen Form mit reellen Coefficienten verstehe ich dabei mit Hrn. Frobenius**)

---

*) Journal de l'école polytechnique, XV. (1837). Der Cauchy'sche Index ist als specieller Fall in dem von Kronecker eingeführten Begriff der Charakteristik von Functionensystemen (Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften 1869) enthalten.

**) Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. (Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften. 1894).

die Differenz zwischen der Zahl der positiven und der negativen Quadrate, die bei der Darstellung der Form durch ein Aggregat von möglichst wenigen Quadraten reeller Linearfunctionen auftreten.

Man wird zu dieser Hermite'schen Bestimmungsweise des Index von $R(z)$ auf folgendem Wege geführt. Bezeichnet

$$\Theta(z) = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_{m-1} z^{m-1} \tag{11}$$

eine ganze rationale Function von z, deren Coefficienten als willkürliche Parameter angesehen werden, so stellt das Integral

$$F_m = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,[\Theta(z)]^2\,dz, \tag{12}$$

erstreckt durch eine alle Pole von $R(z)$ einschliessende Curve, eine quadratische Form der Parameter $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$ dar, die als Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $R(z)[\Theta(z)]^2$ nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ leicht gebildet werden kann*). Andererseits ist das Integral gleich der Summe der Residuen von $R(z)[\Theta(z)]^2$, die den Polen von $R(z)$ entsprechen. Es sei $z = a$ ein einfacher Pol von $R(z)$ und

$$R(a+t) = \frac{c}{t} + c_1 + c_2 t + \cdots, \tag{13}$$

dann ist das auf $z = a$ bezügliche Residuum

$$c \cdot [\Theta(a)]^2.$$

Wenn a reell ist, so liefert der Pol $z = a$ den Beitrag $+1$ oder -1 zu dem Index von $R(z)$ je nachdem c positiv oder negativ ist. Wenn a imaginär ist und $\bar{a}$ den zu a conjugirten Pol bezeichnet, so ist die Summe der auf a und $\bar{a}$ bezüglichen Residuen

$$c[\Theta(a)]^2 + \bar{c}[\Theta(\bar{a})]^2 = (P + iQ)^2 + (P - iQ)^2 = 2P^2 - 2Q^2,$$

wo P und Q reelle Linearfunctionen sind. Hieraus folgt — zunächst unter der Voraussetzung, dass $R(z)$ nur einfache Pole besitzt — der Satz:

Bezeichnet n die Zahl der Pole von $R(z)$, so lässt sich die quadratische Form F_m als ein Aggregat von n Quadraten darstellen, wobei

---

*) An Stelle des Integrales (2) kann man mit gleichem Erfolge auch das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int R(z)\cdot\frac{[\Theta(z)]^2}{(z-\alpha)^{2m}}\,dz$, erstreckt um die Stelle $z = \alpha$, betrachten, unter α einen reellen Werth verstanden, für welchen $R(z)$ endlich bleibt. Für dieses Integral spielt $z = \alpha$ dieselbe Rolle, wie $z = \infty$ für das Integral (12). Im Zusammenhange hiermit steht die unmittelbar einleuchtende Thatsache, dass der Index von $R\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ gleich ist dem Index von $R(z)$, falls a, b, c, d reelle Constanten bedeuten, deren Determinante $ad - bc$ positiv ist.

zugleich die Differenz zwischen der Zahl der positiven und der Zahl der negativen Quadrate gleich dem Index von $R(z)$ ist.

Dieser Satz gilt aber auch für den Fall, dass $R(z)$ Pole von beliebiger Multiplicität besitzt, wo dann unter n die Zahl der Pole, jeder mit seiner Multiplicität gezählt, zu verstehen ist*). Es sei, um dies zu beweisen, $z = a$ ein λ-facher Pol von $R(z)$ und

$$R(a+t) = \frac{c}{t^\lambda} + \frac{c_1}{t^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{c_{\lambda-1}}{t} + \cdots,$$

$$\Theta(a+t) = \Theta_0(a) + \Theta_1(a)t + \Theta_2(a)t^2 + \cdots,$$

wo $\Theta_0(a), \Theta_1(a), \ldots$ lineare Formen der Parameter $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$ bezeichnen. Das $z = a$ entsprechende Residuum lautet dann:

$$c_{\lambda-1}\Theta_0^2 + 2c_{\lambda-2}\Theta_0\Theta_1 + \cdots + c(2\Theta_0\Theta_{\lambda-1} + 2\Theta_1\Theta_{\lambda-2} + \cdots).$$

Je nachdem nun λ gerade oder ungerade ist, lässt sich dieses Residuum in die Gestalt

$$\Theta_0\psi_0 + \Theta_1\psi_1 + \cdots + \Theta_{\mu-1}\psi_{\mu-1} \qquad (\lambda = 2\mu)$$

oder

$$\Theta_0\psi_0 + \Theta_1\psi_1 + \cdots + \Theta_{\mu-1}\psi_{\mu-1} + c\Theta_\mu^2 \qquad (\lambda = 2\mu+1)$$

setzen, wo $\psi_0, \psi_1, \ldots$ lineare Functionen der Parameter bedeuten.

Ist a reell, so sind die Coefficienten von $\Theta_0, \Theta_1, \ldots \psi_0, \psi_1, \ldots$ ebenfalls reell und das Residuum kann in die Form

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\psi_0)\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\psi_0)\right]^2 + \cdots + \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}+\psi_{\mu-1})\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}-\psi_{\mu-1})\right]^2 \quad (\lambda = 2\mu)$$

oder

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\psi_0)\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\psi_0)\right]^2 + \cdots + \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}+\psi_{\mu-1})\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}-\psi_{\mu-1})\right]^2 + c\Theta_\mu^2 \quad (\lambda = 2\mu+1)$$

gebracht werden, in welcher es als Aggregat von λ Quadraten reeller Linearformen erscheint.

Dabei treten, wenn λ gerade ist, genau so viele positive wie negative Quadrate auf; dagegen tritt, wenn λ ungerade ist, ein positives oder ein negatives Quadrat mehr auf, je nachdem c positiv oder

*) Dass die auf die Sturm'schen Reihen bezüglichen Deductionen mit den geeigneten Modificationen auch noch gültig bleiben, wenn die in Betracht kommenden ganzen Functionen mehrfache Linearfactoren besitzen, bemerkt Kronecker in seiner Abhandlung: Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen (Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften, 1881).

negativ ist. Die Discussion des Falles, wo $z = a$ complex ist, ist in ähnlicher Weise zu erledigen, und man erkennt so die allgemeine Gültigkeit des obigen Satzes.

4.

Ist $m > n$, so besitzt die quadratische Form F_m eine verschwindende Determinante, da sich die Form als Aggregat von n Quadraten, also als eine Form von weniger als m linearen Verbindungen der Parameter $y_0, y_1, \dots y_{m-1}$ darstellen lässt. Hingegen ist die Determinante der Form F_n von Null verschieden. Man kann dies entweder dadurch beweisen, dass man die Uebereinstimmung dieser Determinante mit der Resultante von Zähler und Nenner der in reducirter Form geschriebenen rationalen Function $R(z)$ zeigt (vgl. unten Nr. 6), oder auch auf folgendem Wege:

Würde die Determinante von F_n verschwinden, so könnte man solche nicht sämmtlich verschwindende Werthe von $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ finden, für welche $\frac{\partial F_n}{\partial y_0}, \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, \dots \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}$, d. h. also die Integrale

$$(14)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,.\,\Theta(z)\,.\,z^{\lambda}\,dz \quad (\lambda = 0, 1, \dots n-1)$$

sämmtlich Null sind. Wenn nun

$$(15)\qquad R(z)\,.\,\Theta(z) = G(z) + R_1(z)$$

ist, wo $G(z)$ eine ganze rationale Function von z und

$$(16)\qquad R_1(z) = R(z)\,.\,\Theta(z) - G(z) = \frac{k'}{z} + \frac{k''}{z^2} + \cdots$$

eine für $z = \infty$ verschwindende rationale Function bezeichnet, so ist für das Verschwinden jener Integrale erforderlich, dass

$$k' = k'' = \cdots = k^{(n)} = 0$$

ist, dass also $R_1(z)$ mindestens von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung für $z = \infty$ verschwindet. Da aber $R_1(z)$ nur an den Polen von $R(z)$, also höchstens n Mal unendlich werden kann, so muss $R_1(z)$ identisch verschwinden. Die hieraus folgende Gleichung $R(z)\,.\,\Theta(z) = G(z)$ ist aber unmöglich, da $\Theta(z)$ höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist und $R(z)$ n Pole besitzt.

5.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun folgendes Verfahren zur Bestimmung des Index von $R(z)$:

Es sei

$$(17)\qquad R(z) = c + \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \cdots$$

die Entwicklung von $R(z)$ in der Umgebung von $z=\infty$. Der Factor von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung des Productes aus $R(z)$ und

(18) $$[\Theta(z)]^2 = \sum_{i,k} y_i y_k z^{i+k} \quad (i,k=0,1\ldots m-1)$$

ist dann

(19) $$F_m = \sum_{i,k} c_{i+k} y_i y_k \quad (i,k=0,1,\ldots m-1),$$

und die Determinante der Form F_m stellt sich dar in der Gestalt:

(20) $$D_m = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots & c_{m-1} \\ c_1, & c_2, & \ldots & c_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m-1}, & c_m, & \ldots & c_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

In der Reihe der Determinanten

(21) $$D_1, D_2, D_3, \ldots$$

sind nun alle Glieder von einem bestimmten, etwa D_{n+1}, ab gleich Null, während D_n von Null verschieden ist. Es giebt dann n die Zahl der Pole von $R(z)$ an, und der Index von $R(z)$ ist gleich der Signatur der Form F_n.

Die Signatur der Form F_n kann man in jedem Falle aus den Vorzeichen der nicht verschwindenden unter den Determinanten $D_1, D_2, \ldots D_{n-1}$ ablesen.*) In dem Falle, wo keine dieser Determinanten verschwindet, lässt sich F_n, wie bekannt und übrigens leicht zu zeigen ist, in der Form

$$F_n = D_1 u_0^2 + \frac{D_2}{D_1} u_1^2 + \cdots + \frac{D_n}{D_{n-1}} u_{n-1}^2$$

darstellen, wo u_i eine reelle Linearform von $y_i, y_{i+1}, \ldots y_{n-1}$ ist. Der Index von $R(z)$ ist dann also gleich der Differenz zwischen der Zahl der positiven und der Zahl der negativen Glieder der Reihe

$$D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \ldots \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Dieser Fall tritt insbesondere ein, wenn der Index von $R(z)$ seinen Maximalwerth n besitzt. Denn es ist dann F_n eine definite positive Form und ebenso $F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots F_1$, da die letzteren Formen durch Nullsetzen einiger der Parameter $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ aus F_n entstehen. Die

*) Frobenius. l. c. pag. 410.

Determinante einer definiten positiven Form ist aber stets positiv. Es gilt hiernach der Satz:

Der Index von $R(z)$ hat stets und nur dann seinen Maximalwerth n, wenn die Determinanten $D_1, D_2, \ldots D_n$ positiv sind.

6.

Es sei jetzt $R(z)$ in der Gestalt gegeben

$$R(z) = \frac{b_0 z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + \cdots + b_\nu}{a_0 z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + \cdots + a_\nu}, \tag{22}$$

wo der Coefficient a_0 von Null verschieden vorausgesetzt wird. Der Grad ν des Nenners von $R(z)$ ist grösser oder gleich n, je nachdem Zähler und Nenner von $R(z)$ einen gemeinsamen Theiler haben oder nicht. Man kann nun die Determinante D_m (20) umformen in eine Determinante, in welcher die Coefficienten $a_0, \ldots a_\nu$, $b_0, \ldots b_\nu$ die Elemente bilden. Diese Umformung lässt sich mit Hülfe des folgenden Satzes ausführen, den man leicht aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten ableitet.

Es seien

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m, \ldots \tag{23}$$

gewöhnliche Potenzreihen von z, die durch Multiplication mit

$$\mathfrak{P} = k + k_1 z + k_2 z^2 + \cdots \tag{24}$$

in die neuen Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_m', \ldots \tag{25}$$

übergehen mögen, so dass also allgemein $\mathfrak{P}_m' = \mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{P}_m$ ist. Trennt man dann von jeder der Reihen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_m$ (bez. $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots \mathfrak{P}_m'$) die ersten m Glieder ab und bezeichnet mit Δ_m (bez. Δ_m') die Determinante der so entstehenden m ganzen Functionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von z, so ist

$$\Delta_m' = k^m \,.\, \Delta_m. \tag{26}$$

Diesen Satz wende ich nun auf folgenden Fall an. Es sei

$$\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots} = c + c_0 z + c_1 z^2 + \cdots,$$

und die Reihen (23) mögen, wie folgt, angenommen werden:

$$\mathfrak{P}_1 = 1, \ \mathfrak{P}_2 = c + c_0 z + c_1 z^2 + \cdots, \ \mathfrak{P}_{2\lambda+1} = z^\lambda \mathfrak{P}_1, \ \mathfrak{P}_{2\lambda+2} = z^\lambda \mathfrak{P}_2$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots),$$

während die Reihe (24) mit

$$\mathfrak{P} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

identificirt werden soll. Die Reihen (25) lauten dann:

$$\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}, \ \mathfrak{P}_2' = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots, \ \mathfrak{P}_{2\lambda+1}' = z^\lambda \mathfrak{P}_1'. \ \mathfrak{P}_{2\lambda+2}' = z^\lambda \mathfrak{P}_2'$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Ersetzt man noch in der Gleichung (26) den Index m durch $2m$, so giebt nun diese Gleichung die gewünschte Umformung der Determinante D_m. Es kommt nämlich:

(27) $$a_0^{2m} . D_m = R_m,$$

wo R_m die Determinante

(28) $$R_m = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{2m-1} \\ b_0, & b_1, & \dots & b_{2m-1} \\ 0, & a_0, & \dots & a_{2m-2} \\ 0, & b_0, & \dots & b_{2m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_m \\ 0 & 0 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

bedeutet. Diese verschwindet sicher, sobald $m > \nu$ ist, da dann die Elemente der letzten Verticalreihe sämmtlich Null sind. Man hat hiernach zur Bestimmung des Index (und zugleich der Zahl n der Pole) der rationalen Function (22) so zu verfahren: Man bildet die Reihe der Determinanten

$$R_1, R_2, \dots R_\nu.$$

Wenn R_n das letzte nicht verschwindende Glied dieser Reihe ist, so giebt n die Zahl der Pole, oder, was dasselbe ist, den Grad des Nenners von $R(z)$ an, wenn $R(z)$ in reducirter Gestalt geschrieben wird. Der Index von $R(z)$ wird sodann aus den Vorzeichen der nicht verschwindenden Glieder der Reihe $R_1, R_2, \dots R_n$ abgeleitet.

7.

Insbesondere ergiebt sich jetzt leicht der unter Nr. 1 angegebene Satz. Es sei

(29) $$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

eine Gleichung mit reellen Coefficienten. Dann ist

(30) $$i^n f(-iz) = (a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \cdots) + i(a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \cdots)$$

und die in Nr. 2 mit Δ bezeichnete Zahl ist der Index von

(31) $$R(z) = \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \cdots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \cdots}.$$

Die Gleichung (29) hat nun, wie aus (8) in Nr. 2 hervorgeht, stets und nur dann ausschliesslich Wurzeln mit negativen reellen Theilen, wenn $\Delta = n$ ist. Hieraus folgt, dass Zähler und Nenner von $R(z)$ theilerfremd sein müssen. Denn andernfalls würde $R(z)$ dargestellt werden können als ein Quotient, dessen Nenner vom Grade $n' < n$ ist und der Index von $R(z)$ wäre höchstens gleich n'.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (29) nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, ist also die, dass die Form

$$F_n = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,[\Theta(z)]^2\,dz \tag{32}$$

eine definite positive Form von $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ ist. In Folge des Umstandes, dass $R(z)$ eine ungerade Function von z ist, lässt sich F_n in zwei Formen zerlegen, von denen die eine nur die Parameter $y_0, y_2, y_4, \ldots$, die andere nur die Parameter $y_1, y_3, y_5, \ldots$ enthält. In der That sei

$$H(z) = \frac{a_1 z^{\lambda-1} - a_3 z^{\lambda-2} + \cdots}{a_0 z^{\lambda} - a_2 z^{\lambda-1} + \cdots} \quad \left(\lambda = \frac{n}{2} \text{ oder } \frac{n+1}{2}, \text{ je nachdem } n \text{ gerade oder ungerade ist}\right), \tag{33}$$

so ist offenbar

$$R(z) = z\,.\,H(z^2).$$

Ferner fasse man in $\Theta(z)$ die Glieder mit geraden und die mit ungeraden Potenzen von z zusammen, setze also

$$\Theta(z) = \Theta_0(z^2) + z\Theta_1(z^2).$$

Führt man nun in dem Integral (32) $z^2 = \zeta$ als neue Integrationsvariable ein und schreibt dann wieder z an Stelle von ζ, so findet man die in Rede stehende Zerlegung

$$F_n = \frac{1}{2\pi i}\int H(z)\,[\Theta_0(z)]^2\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int zH(z)\,[\Theta_1(z)]^2\,dz. \tag{34}$$

Die hierin enthaltene Thatsache, dass der Index von $R(z)$ gleich der Summe der Indices von $H(z)$ und $zH(z)$ ist, lässt sich übrigens, beiläufig bemerkt, auch unmittelbar aus dem Begriff des Index ableiten. Stellt man jetzt nach Nr. 5 und 6 die Bedingung auf, dass F_n oder was auf dasselbe hinauskommt, jedes der beiden Integrale (34) eine positive definite Form darstellt, so wird man nach einer leichten Umformung der zu bildenden Determinanten auf den Satz von Nr. 1 geführt.

8.

Durch die Gleichung (8) von Nr. 2 und die in Nr. 6 entwickelte Methode zur Bestimmung des Index einer rationalen Function ist allgemein die Aufgabe gelöst, die Anzahl derjenigen Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen, die einen negativen reellen Theil besitzen, unter der Voraussetzung, dass die Gleichung durch keinen rein imaginären Werth von x befriedigt wird. (Die letztere Beschränkung kann man übrigens fallen lassen, wenn man festsetzt, dass jede rein imaginäre Wurzel mit der Multiplicität $\frac{1}{2}$ sowohl als

Wurzel mit negativem wie mit positivem Theil gezählt werden soll.) Diese Aufgabe ist, wie die Substitution von $-ix$ an Stelle von x zeigt, nicht wesentlich verschieden von der anderen, die Zahl der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades

$$f_1(x) + if_2(x) = 0, \tag{35}$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen mit reellen Coefficienten bezeichnen, zu bestimmen, welche einen positiv-imaginären Bestandtheil besitzen. Diese Zahl wird ebenfalls durch die erste Formel (8) also durch $\frac{n+\Delta}{2}$ angegeben, unter Δ den Index von $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ verstanden.

Mit der letzteren Aufgabe beschäftigt sich Herr Hermite in zwei Abhandlungen*), auf die ich hier verweise. Zum Schluss bemerke ich noch Folgendes: Aus dem Begriff des Index geht unmittelbar hervor, dass eine rationale Function $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ stets und nur dann den Index $\pm n$ besitzt, wenn der Nenner $f_1(x)$ in n Punkten der reellen Axe verschwindet (wobei $x = \infty$ als Nullstelle von $f(x)$ anzusehen ist, falls $f_1(x)$ nur den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad erreicht) und wenn zugleich $f_2(x)$ in je zwei aufeinanderfolgenden dieser Punkte Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen annimmt. Hieraus folgert man weiter, dass der Maximalwerth $\pm n$ des Index von $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ stets und nur dann eintritt, wenn jede der Gleichungen $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ n reelle von einander verschiedene Wurzeln besitzt und zugleich die Wurzeln der einen Gleichung durch die der anderen getrennt werden. Insbesondere haben also die n Wurzeln der Gleichung (35) stets und nur dann sämmtlich positiv-imaginären oder sämmtlich negativ-imaginären Bestandtheil, wenn die Wurzeln der Gleichungen $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ die eben erwähnte Beschaffenheit besitzen**).

Zürich, den 12. December 1894.

---

*) Crelle's Journal Bd. 52, pag. 39, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 7, pag. 128.

**) Vgl. Biehler, Crelle's Journal Bd. 87, pag. 350, Laguerre, ib. Bd. 89, pag. 339.

Ueber die Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage.

Von

Gustav Kohn in Wien.

Der Gedanke, den Doppelverhältnissbegriff zu erweitern, ist nicht neu. Eine solche Erweiterung, welche sich freilich mehr nach der formalen Seite hin bewegt, liegt schon in den Möbius'schen Vieleckssclnittverhältnissen vor.

Erwägungen mannigfacher Art haben mich dazu geführt, die Staudt'sche Modification des Doppelverhältnissbegriffs, seinen Wurfbegriff, einer Erweiterung zu Grunde zu legen. Ich schreibe nicht nur vier, sondern allgemein n Elementen eines einförmigen Trägers einen Wurf zu durch die Festsetzung, dass zwei Reihen von je n Elementen dann denselben Wurf bestimmen sollen, wenn sie sich durch eine projective Beziehung ihrer Träger in einander transformiren lassen; ich verstehe weiterhin unter dem Wurf von fünf Punkten der Ebene, ihren Wurf auf der durch sie hindurchgehenden Curve zweiter Ordnung, unter dem Wurf von sechs Punkten des Raumes ihren Wurf auf der hindurchgehenden Curve dritter Ordnung, unter dem Wurf von n Punkten der R_{n-3} ihren Wurf auf der hindurchgehenden Normcurve dieses Raumes.

In dem hier vorliegenden ersten Theil meiner Untersuchungen bin ich bestrebt, die Zweckmässigkeit dieser ungemein naheliegenden Begriffserweiterung darzuthun. Ich zeige, wie zu mehreren sehr bekannten Sätzen niedrigerer Gebiete stricte Analoga in höheren Gebieten existiren, wobei sich überall herausstellt, dass an die Stelle vierelementiger Würfe (Doppelverhältnisse) Würfe von mehr als vier Elementen treten. Dabei fällt, wie mir scheint, auf die Theorie der Collineationen ein neues Licht.

Sowohl über die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit als auch über die Resultate meiner Untersuchungen über die von den n-elementigen Würfen gebildete Mannigfaltigkeit habe ich bereits in der Versammlung der deutschen Mathematikervereinigung in Wien 1894 berichtet.

§ 1.

Definition des Wurfs von n Elementen eines einförmigen Trägers.

1. *In Erweiterung der Staudt'schen Begriffsbildung schreiben wir n in gewisser Reihenfolge genommenen Elementen eines einförmigen (d. i. einstufigen und rationalen) Trägers einen Wurf zu, und definiren diesen Wurf durch die Festsetzung, dass der Wurf von n Elementen $a_1\, a_2 \ldots a_n$ eines einförmigen Trägers α gleich sein soll dem Wurf von n Elementen $a_1'\, a_2' \ldots a_n'$ eines einförmigen Trägers α', wenn es eine projective Beziehung der beiden Träger giebt, vermöge welcher den Elementen $a_1\, a_2 \ldots a_n$ der Reihe nach die Elemente $a_1'\, a_2' \ldots a_n'$ entsprechen.*

Durch die vorstehende Definition erscheint die Bedeutung, in welcher v. Staudt das Wort „Wurf" ursprünglich*) eingeführt hat und in welcher es seither von hervorragenden Geometern**) gebraucht worden ist, nicht nur verallgemeinert, sondern auch modificirt.

Indessen hat sich Staudt selbst später***) des Ausdruckes „Wurf" wesentlich in dem Sinne bedient, in welchem der obigen Definition zufolge von einem Wurf *von vier Elementen* zu reden sein wird. Aus diesem Grunde habe ich es vorgezogen, statt für den allgemeinen Begriff einen neuen Namen einzuführen, das Staudt'sche Wort zu adoptiren.

2. Zur Bezeichnung des Wurfs der n Elemente $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ des einförmigen Trägers α bedienen wir uns des Zeichens

$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n),$$

wobei wir, wo es der Deutlichkeit keinen Eintrag macht, die Beistriche zwischen der Bezeichnung der einzelnen Elemente weglassen. Wenn,

---

*) Im ersten Heft seiner Beiträge zur Geometrie der Lage (1856) definirt Staudt im Art. 24 einen Wurf mit den Worten:

„Der Inbegriff von vier Elementen A, B, C, D eines und desselben Elementargebildes, mit Rücksicht auf die Ordnung, in der dieselben angeschrieben werden, und mit Rücksicht auf das Elementargebilde selbst, soll ein Wurf heissen."

Weiter wird dort festgesetzt:

„Zwei Würfe $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, nämlich der Wurf $ABCD$ im Elementargebilde G und der Wurf $A_1B_1C_1D_1$ im Elementargebilde G_1 sollen zu einander projectivisch heissen, wenn die Gebilde GG_1 projectivisch so auf einander bezogen werden können, dass den Elementen $ABCD$ des einen die Elemente $A_1B_1C_1D_1$ des andern entsprechen."

**) Vergl. Reye, Geometrie der Lage, Sturm, Liniengeometrie.

***) Im zweiten Heft der Geometrie der Lage (1857) beginnt der § 19 mit den Worten: „Von nun an werden Würfe, welche zu einander projectivisch sind, als gleich betrachtet, daher auch von einem Wurfe gesagt wird, dass er bestimmt sei, wenn irgend ein zu ihm projectivischer Wurf gegeben ist."

wie dies in der Regel der Fall ist, auch über den Träger kein Zweifel obwalten kann, so schreiben wir den Wurf kürzer

$$(a_1 a_2 \dots a_n).$$

Einen Wurf, welcher aus irgendwelchen r von den n Elementen des Wurfs $(a_1 a_2 \dots a_n)$ gebildet ist, bezeichnen wir als r-elementigen *Theilwurf* des Wurfs $(a_1 a_2 \dots a_n)$.

§ 2.

Der Wurf von fünf Punkten der Ebene.

3. Fünf Punkte $ABCDE$ der Ebene, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, bestimmen einen Kegelschnitt K und definiren als Elemente dieses Kegelschnitts einen gewissen Wurf, den wir auch kurz als den *Wurf der fünf Punkte der Ebene* bezeichnen, ohne des Trägerkegelschnitts K ausdrücklich Erwähnung zu thun.

Von fünf Punkten der Ebene sagen wir dann und lediglich dann, ihr Wurf sei ein *eigentlicher* *), wenn keine drei von ihnen in einer Geraden liegen.

Wir können jetzt den Satz aussprechen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es eine collineare Beziehung der ebenen Felder η und η_1 giebt, vermöge welcher den fünf Punkten $ABCDE$ eigentlichen Wurfs von η der Reihe nach die fünf Punkte eigentlichen Wurfs $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ von η_1 entsprechen, besteht in der Gleichheit der beiden fünfpunktigen Würfe.

Die Gleichheit der Würfe besagt nämlich, dass der Kegelschnitt K, der die Punkte $ABCDE$ enthält, auf den durch die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ gehenden Kegelschnitt K_1 sich projectiv so beziehen lässt, dass den ersten fünf Punkten die zweiten fünf Punkte der Reihe nach homolog sind. Es wird nun einerseits, wenn eine Collineation der Felder η und η_1 existirt, vermöge welcher den Punkten $ABCDE$ die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ der Reihe nach homolog sind, durch diese Collineation eine projective Beziehung der Kegelschnitte K und K_1 von der angegebenen Art vermittelt; andererseits giebt es unter Voraussetzung einer solchen Projectivität, wie bekannt,**) stets eine bestimmte Collineation der zwei Felder, welche sie hervorruft.

4. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt:

Es giebt in der Ebene einen einzigen bestimmten Punkt, welcher vier in bestimmter Folge gegebene Punkte, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, zu einem Quintupel von gegebenem, eigentlichem Wurf ergänzt.

---

*) Dasselbe Attribut ertheilt Staudt Würfen von vier durchaus verschiedenen Elementen eines einförmigen Trägers (Beitr. z. Geom. d. Lage, Art. 256).

**) Siehe z. B. Reye, Geom. d. Lage, II. Bd., p. 10/11 der 3. Aufl.

Der Punkt E_1, welcher die vier Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ zu einem Quintupel ergänzt, dessen Wurf gleich dem der fünf Punkte $ABCDE$ ist, wird nämlich in eindeutiger Weise erhalten, als der dem Punkte E in derjenigen Collineation homologe Punkt, welche durch die vier Paare von homologen Punkten AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 festgelegt ist.

5. Für die Charakterisirung des Wurfs von fünf Punkten der Ebene ist der folgende Satz wesentlich:

Die fünf Punkte (zwei Ecken und drei Diagonalpunkte), welche auf jeder Seite eines ebenen vollständigen Fünfecks $ABCDE$ *als Durchschnittspunkte entstehen, wenn man dessen sämmtliche Seiten zieht, bestimmen in gewisser Reihenfolge genommen auf jeder der zehn Seiten denselben Wurf und zwar den Wurf der fünf Ecken* $ABCDE$ *des Fünfecks.*

Die fünf Punkte, welche man auf jeder Seite als Durchschnittspunkte mit den übrigen Seiten erhält, werden für zwei Seiten wie BC und DE, welche keinen Eckpunkt gemein haben, von dem fünften Eckpunkt A aus durch dieselben fünf Strahlen projicirt, nämlich durch die vier Strahlen nach den Eckpunkten $BCDE$ und dem nach dem Schnittpunkt A' von BC und DE gehenden Strahl. Daraus folgt die Gleichheit der fünfpunktigen Würfe auf zwei Seiten ohne gemeinsamen Eckpunkt. Auf zwei Seiten wie AB und BC, welche in einem Eckpunkt zusammenstossen, folgt aber jetzt die Gleichheit der fünfpunktigen Würfe daraus, dass jeder von beiden dem fünfpunktigen Wurfe auf der Seite DE gleich ist, die weder mit AB noch mit BC einen Eckpunkt gemein hat.

Es ist jetzt gezeigt, wie in einem Lehrgang der Geometrie der Lage noch vor Einführung der Curven 2. O. constatirt werden könnte, dass durch fünf Punkte der Ebene ein gewisser fünfelementiger Wurf gegeben ist, von dem sich dann herausstellt, dass er für die Geometrie der Ebene in mancher Hinsicht eine ähnliche Bedeutung besitzt, wie das Doppelverhältniss für die Geometrie auf der Geraden.

Sehen wir von diesem methodischen Gesichtspunkt ab, so wird die eben angestellte Betrachtung durch den folgenden Nachweis dafür überflüssig, dass der Wurf der fünf Punkte, welche auf irgend einer Seite des vollständigen Fünfecks $ABCDE$ als Durchschnittspunkte mit den übrigen Seiten entstehen, gleich ist dem Wurf der fünf Ecken des Fünfecks auf dem umschriebenen Kegelschnitt K.

Der Wurf der fünf Punkte $ABCDE$ auf dem Kegelschnitt K ist gleich dem Wurf der fünf Punkte, die ihnen in der Involution entsprechen, welche auf K durch BC und DE als Paare bestimmt ist. Die Paare dieser Involution werden durch die Strahlen des Büschels ausgeschnitten, dessen Scheitel der Schnittpunkt A' der Geraden BC und DE ist. Die Strahlen, welche von A aus die fünf Punkte von K

projiciren, welche den Punkten A, B, C, D, E in der betrachteten Involution entsprechen, sind der Reihe nach: AA', AC, AB, AE, AD. Der Wurf dieser fünf Strahlen des Büschels A ist daher gleich dem Wurf der fünf Punkte $ABCDE$ und dasselbe gilt von dem Wurf der Schnittpunkte dieser fünf Strahlen mit der Geraden DE, worin der zu beweisende Satz liegt. Diese Schnittpunkte sind der Reihe nach $A'B'C'ED$, wenn mit B' und C' die Schnittpunkte der Strahlen AC und AB mit der Geraden DE bezeichnet werden und in dieser Reihenfolge bestimmen sie auf dieser Geraden denselben Wurf wie die fünf Punkte $ABCDE$ auf dem Kegelschnitt K.

Um diese Reihenfolge festzulegen, sprechen wir unseren Satz nochmals und zwar in der folgenden Form aus:

Schneidet die Verbindungslinie u der beliebig in der Ebene eines Dreiecks ABC angenommenen Punkte D und E die Gegenseiten der drei Ecken A, B, C in den Punkten A', B', C', so ist:

$$(ABCDE) = u(A'B'C'ED).$$

6. In der Figur eines vollständigen ebenen Fünfecks $ABCDE$ treten fünf Elemente, welche den Wurf der fünf Ecken bestimmen, noch in mehrfacher Weise auf.

Versteht man unter dem Wurf von fünf Geraden der Ebene den Wurf, den sie als Elemente des von ihnen berührten Kegelschnitts bestimmen, so kann man einen hierher gehörigen Satz folgendermassen aussprechen:

In einem einfachen ebenen Fünfeck ist der Wurf der fünf Seiten gleich dem Wurf ihrer fünf Gegenecken.

Dieser Satz fliesst unmittelbar aus der Staudt'schen Bemerkung*), dass durch ein ebenes Fünfeck ein Polarsystem bestimmt ist, in welchem jeder Seite deren Gegenecke als Pol zugehört.

7. Es mag noch eine Bemerkung über die Theilwürfe des Wurfs $(ABCDE)$ von fünf Punkten der Ebene hier ihren Platz finden.

Die Werthe der Theilwürfe des Wurfs von fünf Punkten der Ebene lassen sich in übersichtlicher Weise durch die Inhalte der von je drei unter den Punkten gebildeten Dreiecke ausdrücken.

Es ist z. B. der Werth des Theilwurfs $(BCDE)$ d. h. das Doppelverhältniss der Punkte $BCDE$ auf dem Kegelschnitt K, der ausser ihnen auch noch den Punkt A enthält,

$$= \frac{ABD}{ACD} : \frac{ABE}{ACE}.$$

Dieser Werth ist nämlich gleich dem Doppelverhältniss

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD} : \frac{\sin BAE}{\sin CAE}$$

*) Siehe: Staudt, Geom. d. Lage, Art. 238; Reye, Geom. d. Lage, 3. Aufl. II, S. 125.

der vier Strahlen, welche von A aus die vier Punkte $BCDE$ projiciren, wie man sofort erkennt, wenn man jeden Dreiecksinhalt durch das halbe Product der in A zusammenstossenden Dreiecksseiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels ausdrückt.

Es ist übrigens zu bemerken, dass schon Möbius*) auf die Unveränderlichkeit des Werthes von $\frac{ABD}{ACD} : \frac{ABE}{ACE}$ bei collinearen Transformationen der Ebene aufmerksam gemacht hat.

8. Bisher haben wir nur solchen fünf Punkten $ABCDE$ der Ebene einen (eigentlichen) Wurf zugeschrieben, durch die eine eigentliche Curve 2. O. hindurchgeht. Jetzt wollen wir festsetzen, dass fünf Punkten $ABCDE$, durch die keine eigentliche Curve 2. O. hindurchgeht, als *uneigentlicher Wurf* der Wurf $(A'B'C'ED)$ zugeschrieben werden soll, der auf der Verbindungslinie der beiden letzten von den Punkten $ABCDE$ bestimmt wird von den Schnittpunkten $A'B'C'$ der Seiten des von den drei ersten gebildeten Dreiecks im Verein mit dem letzten und vorletzten Punkte selbst. Wir können diesen uneigentlichen Wurf auch als Grenze von fünfpunktigen Würfen erhalten, indem wir die fünf Punkte uneigentlichen Wurfs $ABCDE$ durch Grenzübergang aus fünf Punkten eigentlichen Wurfs entstehen lassen (Art. 7).

Dieser Festsetzung gemäss ist z. B. der uneigentliche Wurf der fünf Punkte $ABCDE$, wenn die Verbindungslinie DE durch den Punkt C hindurchgeht, gleich dem Wurf $(CCC'ED)$ auf der Geraden ED, wobei C' ihren Schnittpunkt mit der Geraden AB bedeutet. Wenn aber die Gerade DE mit der Geraden BC zusammenfällt, so ist jener uneigentliche Wurf unbestimmt, aber nicht vollständig; der Theilwurf der vier letzten Elemente bleibt bestimmt.

§ 3.

Der Wurf einer Collineation der Ebene.

9. Für eine projective Beziehung zweier conjectiver einförmiger Grundgebilde ist ein vierelementiger Wurf charakteristisch, nämlich der constante Wurf, den die beiden Doppelelemente mit irgend zwei homologen Elementen bestimmen.

In ähnlicher Weise ist für die collineare Beziehung zweier conjectiver ebener Felder η und η_1 ein fünfelementiger Wurf charakteristisch, von dem wir zeigen wollen, dass er in mehrfacher Gestalt auftritt. Zunächst führen wir ihn ein als den Wurf, welchen die drei Doppelpunkte ABC der Collineation mit einem willkürlich gewählten

*) Werke, p. 462.

Paar PP_1 von homologen Punkten bestimmen, indem wir die Constanz dieses fünfelementigen Wurfs beweisen.

Entsprechen den Punkten P und P' des Feldes η die Punkte P_1 und P_1' des Feldes η_1, so wird der Geraden PP' die Gerade P_1P_1' zugewiesen sein und der Schnittpunkt S dieser beiden Strahlen wird daher sowohl auf dem Kegelschnitt K liegen, den die vermöge der Collineation projectiv auf einander bezogenen Büschel P und P_1 als auch auf dem Kegelschnitt K', den die beiden vermöge der Collineation projectiv auf einander bezogenen Büschel P' und P_1' erzeugen. Da die drei übrigen Schnittpunkte der Kegelschnitte K und K' die Doppelpunkte ABC der Collineation sind, so werden die fünf Punkte $ABCPP_1$ von K vom Punkte S aus durch dieselben fünf Strahlen projicirt wie die fünf Punkte $ABCP'P_1'$ von K', so dass

$$(ABCPP_1) = (ABCP'P_1')\text{*)}$$

und wir sagen können:

Der fünfelementige Wurf, den die drei Doppelpunkte einer Collineation der Ebene zusammen mit irgend einem Paar homologer Punkte bestimmen, ist constant, und soll als der Wurf der Collineation bezeichnet werden.

10. Der in Rede stehende Wurf ist für eine Collineation charakteristisch, ihre projectiven Eigenschaften hängen nur von diesem Wurf ab, indem eine Collineation durch ihre drei in bestimmter Folge genommene Doppelpunkte und diesen Wurf vollständig bestimmt ist. Mit Rücksicht darauf, dass, wenn von fünf Punkten gegebenen Wurfs vier fest sind, auch der fünfte gegeben ist (Art. 4), können wir nämlich sagen:

Die Punktepaare, welche drei nicht in Gerader liegende Punkte ABC der Ebene zu einem Punktquintupel von gegebenem Wurf ergänzen, sind die Paare homologer Punkte einer Collineation, für welche A, B, C die Doppelpunkte darstellen.

Es ist damit auch deutlich, dass von zwei Collineationen mit demselben Wurf die eine in die andere übergeführt wird durch jede collineare Beziehung, welche die drei Doppelpunkte der einen Collineation in die entsprechenden drei Doppelpunkte der anderen transformirt. Insbesondere wird also eine Collineation durch jede Collineation mit denselben Doppelpunkten in sich selbst übergeführt. (Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. II, S. 90).

11. Der Wurf einer Collineation der Ebene tritt auch in jedem Strahlenbüschel der Ebene auf. In jedem Strahlenbüschel giebt es nämlich zwei homologe Strahlen, die Verbindungsstrahlen des Scheitels

---

*) Dass die Punkte $ABCPP_1$ collinear verwandt sind den Punkten $ABCP'P_1'$ hat schon Staudt bewiesen (Beitr. z. Geom. d. Lage, Art. 515).

mit dem ihm im einen und anderen Sinn homologen Punkte, und es gilt der Satz:

In jedem Strahlenbüschel bestimmen die Strahlen nach den drei Doppelpunkten in Verbindung mit den beiden homologen Strahlen des Büschels einen constanten fünfelementigen Wurf und zwar den Wurf der Collineation.

Zum Zwecke des Beweises betrachten wir irgend zwei homologe Strahlen u und u_1 mit dem Schnittpunkt S und wählen auf u den Punkt P beliebig, dessen homologer Punkt P_1 dann auf u_1 liegt. Der Kegelschnitt K, welchen die Schnittpunkte der homologen Strahlen der Büschel P und P_1 erfüllen, wird jetzt durch den Punkt S hindurchgehen und ausserdem die Doppelpunkte der Collineation so wie die Punkte P und P_1 enthalten. Da die fünf Punkte $ABCPP_1$ auf K den Wurf der Collineation bestimmen, so gilt dasselbe auch für die fünf Strahlen, welche sie von S aus projiciren.

12. Auch auf jeder Geraden der Ebene haben wir fünf Elemente, die den Wurf der Collineation bestimmen, indem der Satz besteht:

Der fünfelementige Wurf, den auf einer beliebigen Geraden g, deren Schnittpunkte $A'B'C'$ mit den drei Doppelgeraden der Collineation in Verbindung mit den beiden auf g vorhandenen homologen Punkten P_1 und P bestimmen, ist constant und gleich dem Wurf der Collineation.

In Art. 5 wurde nämlich bewiesen, dass der Wurf von fünf Punkten $ABCPP_1$ der Ebene gleich ist dem Wurf der fünf Punkte $A'B'C'P_1P$ auf der Verbindungslinie von P und P', wenn $A'B'C'$ die Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks ABC mit dieser Linie bedeuten.

13. Wir haben endlich den Satz:

Der fünfelementige Wurf, den die drei Doppelgeraden a, b, c der Collineation mit irgend zwei homologen Strahlen u_1 und u zusammen bestimmen, ist constant und gleich dem Wurf der Collineation.

Der Kegelschnitt, welcher die drei Doppelgeraden a, b, c der Collineation und die Geraden u_1 und u berührt, ist das Erzeugniss der projectiven Beziehung der Punktreihen u und u_1, welche durch die Collineation vermittelt wird. Die Verbindungslinie g eines beliebigen Punktes P von u mit dem ihm homologen P_1 von u_1 ist also eine Tangente dieses Kegelschnitts, der Wurf der fünf Tangenten a, b, c, u_1, u auf diesem Kegelschnitte ist gleich dem Wurf ihrer Schnittpunkte A', B', C', P_1, P mit der Geraden g und von diesem war gezeigt, dass er dem Wurf der Collineation gleich ist.

14. Der Wurf der Collineation stellt sich dar als der Wurf $(ABCPP_1) = (abcu_1u)$ von fünf Punkten oder fünf Geraden der Ebene. Wir können daher die Sätze der Art. 5 und 6 zur Verwendung bringen, welche aus fünf Punkten oder fünf Geraden der Ebene fünf

andere denselben Wurf bestimmende Elemente in einfacher Weise auf mehrere Arten abzuleiten lehren. Wir erhalten so neben den Sätzen der Art. 11 und 12 noch eine Reihe von weiteren über das Auftreten des Collineationswurfs. Von diesen Sätzen wollen wir hier nur einen besprechen.

Bezeichnet man durch P' und P_1' die Punkte, in denen die Doppelgerade $BC = a$ von den Strahlen AP und AP_1 getroffen wird und mit $\mathfrak{A}$ ihren Schnittpunkt mit dem Strahl PP_1, so ist nach Art. 5

$$(ABCPP_1) = a(\mathfrak{A}CBP_1'P').$$

Da AP und AP_1 homologe Strahlen, also ihre Schnittpunkte $P'P_1'$ mit a homologe Punkte sind, so können wir unser Resultat folgendermassen in Worte fassen:

Auf jeder der drei Doppelgeraden a, b, c der Collineation wird durch dieselbe eine Projectivität inducirt, deren Wurf ein Theilwurf des Collineationswurfes $(ABCPP_1)$ ist. Auf der Geraden $a = BC$ z. B. ist, wenn $P'P_1'$ homologe Punkte dieser Geraden bedeuten, dieser Wurf

$$(BCP'P_1') = (CBP_1'P')$$

dem Theilwurf $(BCPP_1)$ gleich. Auf dieser Geraden giebt es deshalb einen ganz bestimmten Punkt $\mathfrak{A}$, der so beschaffen ist, dass $(\mathfrak{A}CBP_1'P')$ gleich dem Collineationswurf wird, und die geometrische Bedeutung des Punktes $\mathfrak{A}$ besteht darin, das er das Centrum für die perspective Beziehung ist, die vermöge der Collineation zwischen den Strahlen AP' und AP_1' herrscht.

Natürlich gilt auch ein diesem Satze dual entgegenstehender.

§ 4.

Besondere Collineationen der Ebene und deren Würfe.

15. Schon in Art. 10 war gezeigt, dass die projectiven Eigenschaften einer Collineation der Ebene nur von ihrem Wurf abhängen. Da in diesem Wurf $(ABCPP_1)$ die drei ersten Elemente die simultan gegebenen Doppelpunkte der Collineation sind, so werden die absoluten Invarianten der Collineation übereinstimmen mit den absoluten Invarianten des simultanen Systems einer cubischen und zweier linearer Formen. Es haben in der That Clebsch und Gordan (Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln, Math. Ann. Bd. I) gezeigt, dass die Invarianten der Collineation sich als die ganzen Functionen der Coefficienten einer gewissen cubischen Form*) ergeben; allein über die Bedeutung, welche den Wurzeln dieser Form in Verbindung mit dem Null- und Unendlichkeitspunkt der Parameterdarstellung zukommt, findet sich nichts in der genannten Abhandlung.

*) S. a. a. O. Seite 356, wo die Form mit $\Delta(l)$ bezeichnet ist.

Aus dem Umstand, dass die Natur einer Collineation und die ihres Wurfs einander bedingen, erwächst die Aufgabe, für geometrisch ausgezeichnete Collineationen die besondere Natur ihres Wurfs zu bestimmen und die umgekehrte, bei vorgelegter besonderer Natur des Wurfs die geometrischen Eigenthümlichkeiten der Collineation zu finden. Wir wollen einige der einfachsten Aufgaben dieser Art behandeln.

16. Wir fragen zunächst, wie der Wurf einer Collineation beschaffen sein muss, wenn sie einen Kegelschnitt K in sich transformiren soll.

Durch die Collineation wird auf dem Kegelschnitt K eine Projectivität inducirt. Deren Doppelpunkte B und C sind zwei Doppelpunkte der Collineation und ihre Verbindungslinie a bildet mit ihren Tangenten c und b zusammen das Hauptviereck der Collineation. Sind PP_1 zwei homologe Punkte auf dem Kegelschnitt K und $A'B'C'$ die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit den Geraden abc, so ist (Art. 5) $(A'B'C'P_1P)$ gleich dem Wurf der Collineation. Die besondere Natur des Wurfs $(A'B'C'P_1P)$ lässt der Satz von Desargues unmittelbar erkennen. Der Kegelschnitt K schneidet auf der Verbindungslinie von P und P_1 diese beiden Punkte, der in die Geraden b und c zerfallende Kegelschnitt die Punkte B', C' aus, während von der Geraden a, die doppelt gezählt einen Kegelschnitt des von den beiden ersten bestimmten Büschels darstellt, der Punkt A' ausgeschnitten wird. Wir finden (vergl. Sturm, Ueber Collineationen und Correlationen ... Art. 14, Math. Ann. Bd. 26):

Der Wurf einer Collineation, die einen Kegelschnitt in sich transformirt, hat die Eigenthümlichkeit, dass die Involution, für welche die beiden letzten Elemente des Wurfs sowie gewisse zwei von den drei ersten je ein Paar bilden, im übrig bleibenden fünften Element ein Doppelelement besitzt.

Dass umgekehrt jede Collineation mit derartigem Wurf einen Kegelschnitt (und dann auch schon ein ganzes Büschel) in sich transformirt, ist aus der Herleitung deutlich. Es mag nur erwähnt werden, dass die erkannte Eigenthümlichkeit des Wurfs mannigfach in geometrische Eigenschaften der Collineation umgesetzt werden kann. Denken wir uns z. B. den durch die Punkte $ABCPP_1$ gehenden Kegelschnitt gelegt, so folgt, dass sich die Geraden PP_1, BC und die Kegelschnittstangente in A im selben Punkte schneiden. Liegt dieser Punkt unendlich fern, so wird das Fünfeck P_1CABP ein symmetrisches sein, da es durch Umlegung um die Polare des unendlich fernen Punktes in sich übergehen wird. Allgemein können wir also sagen:

Damit die Collineation mit den Doppelpunkten ABC, für die PP_1 ein Paar homologer Punkte ist, einen Kegelschnitt in sich transformirt,

ist nothwendig und hinreichend, dass das Fünfeck $ABCPP_1$ symmetrisch oder in ein symmetrisches projicirbar ist, so zwar, dass einer der Punkte ABC als sein eigenes Symmetriebild auftritt.

17. Wir fragen zweitens nach dem Wurf einer cyklischen Collineation mit n-elementigem Cyklus. Damit die Collineation durch n-malige Anwendung die Identität ergiebt, ist erforderlich und ausreichend, dass dies für die Projectivitäten, die sie auf den drei Doppelgeraden inducirt, gelte. Da die Würfe dieser Projectivitäten (Art. 14) Theilwürfe des Collineationswurfs sind, so folgt:

Bei einer cyklischen Collineation mit n-elementigen Cyklen ist der Wurf $(ABCPP_1)$ so beschaffen, dass in der cyklischen Projectivität mit n-elementigen Cyklen, welche durch PP_1 als Doppelelemente bestimmt ist, ABC demselben Cyklus angehören.

Soll indessen ein Cyklus der Collineation n *verschiedene* Elemente aufweisen, so muss der Werth mindestens eines von den Theilwürfen, welche die Punkte PP_1 als zwei und zwei von den Punkten ABC als die übrigen Elemente aufweisen, durch eine *primitive* n^{te} Einheitswurzel gegeben sein; es muss nämlich mindestens für eine der Doppelgeraden die inducirte Projectivität Cyklen von n *verschiedenen* Punkten aufweisen.

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass man alle Collineationen, deren Wurf einen Theilwurf von der angegebenen Art hat, passend als $\frac{1}{n}$-*perspectiv* bezeichnen könnte. Denn durch n-malige Anwendung einer solchen Collineation entsteht eine Perspectivität.

18. Um auch ein Beispiel für den Schluss auf die geometrische Natur der Collineation aus der Beschaffenheit ihres Wurfs zu geben, machen wir für den Wurf $(ABCPP_1)$ die einfache Annahme, dass der Punkt P_1 die zweite Polargruppe des Pols P in Bezug auf das Tripel ABC darstellt.

Da nach Art. 5 $(ABCPP_1) = (A'B'C'P_1P)$, wo $A'B'C'$ die Schnittpunkte der Geraden PP_1 mit den Seiten des Dreiecks ABC bedeuten, so liegt der Punkt P auf der Polargeraden des Pols P_1 in Bezug auf das Dreieck. Weiter aber brauchen wir die geometrischen Eigenschaften nicht zu verfolgen, denn die Collineationen mit dieser Eigenschaft sind schon mehrfach von anderer Seite untersucht. Clebsch und Gordan zeigen (a. a. O. p. 392), dass, wenn man diese Collineation auf einen Punkt 0 wiederholt anwendet, wodurch die Punkte 1, 2, 3, ... successive aus ihm hervorgehen, die Punkte 0, 1, 3 in einer Geraden liegen. Pasch sagt (Math. Ann. Bd. 23) von einer solchen Collineation, sie befinde sich in eingeschriebener Dreieckslage, weil, wie er zeigt, ein Dreieck (und damit schon ∞^4) existirt, welches dem zugeordneten umschrieben ist. Derselbe findet dann (Math. Ann. Bd. 26)

die geometrische Beziehung zwischen entsprechenden Vierecken und Vierseiten, welche diese Collineation charakterisirt. Unser Resultat lautet:

Der Wurf $(ABCPP_1)$ *einer Collineation in eingeschriebener Dreieckslage ist so beschaffen, dass* P_1 *die zweite Polargruppe des Pols* P *in Bezug auf das Tripel* ABC *darstellt.*

19. Da eine Collineation mit gegebenem Hauptdreieck ABC durch Annahme von zwei homologen Punkten PP_1 bestimmt ist, so entsteht auch dann eine Collineation, wenn man PP_1 in einer Geraden u mit dem Punkt C annimmt, ihr Wurf ist aber ein uneigentlicher. Dieser Wurf ist nach Art. 8 gleich dem Wurf $(CC'P_1P)$ auf der Geraden u, und dieser Wurf oder, was dasselbe besagt, das Doppelverhältniss $(CC'PP_1)$ bleibt ungeändert, wenn man PP_1 durch ein anderes Paar homologer Punkte ersetzt. Man findet also zu einem Punkte P den entsprechenden, indem man ihn mit C verbindet, als Punkt P_1, der auf dieser Verbindungslinie mit P, C und dem Schnittpunkt C' der Geraden c zusammen ein constantes Doppelverhältniss bestimmt. Eine solche Collineation ist unter den Namen centrale Collineation, Perspectivität, Homologie wohl bekannt.

§ 5.

Der Wurf von sechs Punkten des dreidimensionalen Raums und n Punkten des R_{n-3}.

20. Wenn wir jetzt dazu übergehen, unsere bisherigen Betrachtungen in der Ebene auf den dreidimensionalen Raum und allgemein auf den Raum von n Dimensionen auszudehnen, werden wir uns vielfach kürzer fassen und Schlüsse, welche im allgemeinen Falle ganz mit denen des schon behandelten Specialfalls übereinstimmen, ab und zu auch ganz unterdrücken dürfen.

Vor allem definiren wir den Wurf von n Elementen eines R_{n-3} d. h. eines linearen Gebiets von $n-3$ Dimensionen.

Unter dem Wurf von n Elementen eines R_{n-3}, *von denen keine* $n-2$ *demselben* R_{n-4} *angehören, verstehen wir den Wurf, den sie als Elemente der Normcurve des* R_{n-3} *bestimmen, welche diese n Elemente enthält.*

Wir reden hier absichtlich von Elementen und nicht von Punkten eines R_{n-3}, um besser hervortreten zu lassen, dass wir auch für diejenigen linearen Gebiete von $n-3$ Dimensionen, deren Elemente nicht Punkte sind, den Wurf von n Elementen definirt wissen wollen.

Unter einer Normcurve eines R_{n-3} versteht man bekanntlich eine eigentliche (nicht zerfallende) Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung dieses Raums. Eine solche Curve ist rational und durch die Angabe von n Punkten, von denen keine $n-2$ demselben R_{n-4} angehören, durch die sie gehen soll, eindeutig bestimmt. Von n solchen Punkten, welche eine eigentliche Normcurve bestimmen, sagen wir, ihr Wurf sei ein *eigentlicher.*

Wir verstehen also z. B. unter sechs Punkten eigentlichen Wurfs im (dreidimensionalen) Raum, sechs Punkte, von denen keine vier derselben Ebene angehören, durch die dann eine eigentliche cubische Raumcurve hindurchgeht. Die Bedingung, dass es eine Collineation giebt, welche sechs Punkte eigentlichen Wurfs im Raume in sechs andere Punkte eigentlichen Wurfs überführt, ist äquivalent mit der Bedingung, dass beide Punktsextupel denselben Wurf bestimmen und *wenn wir allgemein zwei Systeme von je n Punkten eigentlichen Wurfs, jedes in einem R_{n-3} haben, so führt eine collineare Beziehung zwischen diesen beiden Räumen das eine System in das andere dann und nur dann über, wenn Wurfgleichheit vorhanden ist.* (Vgl. Art. 3).

21. Projicirt man die einzelnen Punkte einer Normcurve C^{n-3} des R_{n-3} aus einem in diesem Raum enthaltenen R_k $(k=0,1,2,\ldots n-5)$, d. h. legt man durch jeden Punkt der Curve C^{n-3} den Raum R_{k+1}, der ihn mit dem gegebenen R_k verbindet, so erhält man einen R_k-Kegel von der Ordnung $n-3-s$, wenn s die Anzahl der Punkte der Curve C^{n-3} angiebt, durch die der gegebene R_k hindurchgeht, und die Elemente (Räume R_{k+1}) dieses R_k-Kegels erscheinen projectiv bezogen auf die in ihnen liegenden Punkte der Normcurve.

Es bilden nun die R_{k+1} des R_{n-3}, die durch einen in ihm gegebenen R_k hindurchgehen, ein lineares Gebiet von $(n-3)-(k+1)=n-k-4$ Dimensionen und eine Normcurve in diesem Gebiet wird dargestellt durch einen R_k-Kegel von der Ordnung $(n-k-4)$, dessen Scheitelraum der gegebene R_k ist. In Folge dessen wird unter dem Wurf von $(n-k-1)$ durch denselben R_k hindurchgehenden Räumen R_{k+1} im R_{n-3} der Wurf zu verstehen sein, den sie als Elemente des R_k-Kegels der Ordnung $(n-k-4)$ bestimmen, dem sie angehören.

Aus diesen zwei Bemerkungen folgt:

Wenn von n Elementen $A_1 A_2 \ldots A_n$ eigentlichen Wurfs im R_{n-3} irgend welche $(k+1)$ z. B. $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$ herausgegriffen werden $(k=1,2,\ldots n-5)$, so bestimmen sie einen R_k. Projicirt man die übrigen $(n-k-1)$ Punkte $A_{k+2} A_{k+3} \ldots A_n$ aus diesem R_k, so ist der Wurf der projicirenden $(n-k-1)$ Räume R_{k+1} gleich dem $(n-k-1)$-elementigen Theilwurf $(A_{k+2} A_{k+3} \ldots A_n)$ des Wurfs $(A_1 A_2 \ldots A_n)$.

Sind also speciell $ABCDEF$ sechs Punkte eigentlichen Wurfs im Raum, so erhält man den von fünf unter diesen Punkten bestimmten Theilwurf ihres Gesammtwurfs als Wurf der fünf Strahlen, welche sie aus dem sechsten projiciren, und den Theilwurf von vier unter ihnen als Wurf der vier Ebenen, welche sie aus der Verbindungslinie der beiden übrigen projiciren.

Die Werthe der vierelementigen Theilwürfe kann man hier in einfacher Weise durch Tetraederinhalte darstellen; es ist z. B. der Werth des Theilwurfs

$$(CDEF) = \frac{ABCE}{ABCF} : \frac{ABDE}{ABDF}$$

(Vgl. Art. 8).

22. Die Verallgemeinerung des in Art. 5 für die Ebene bewiesenen Satzes lautet für den (dreidimensionalen) Raum:

Die sechs Punkte, welche auf jeder Kante des räumlichen vollständigen Sechsecks $ABCDEF$ entstehen, wenn man die Kante mit allen Seitenflächen des Sechsecks zum Durchschnitt bringt, bestimmen in gewisser Reihenfolge genommen auf jeder Kante denselben Wurf und zwar den Wurf der sechs Ecken. Es ist z. B.

$$(A'B'C'D'FE) = (ABCDEF),$$

wenn $A'B'C'D'$ die Treffpunkte der Kante EF und der Ebenen des Tetraeders $ABCD$ bedeuten.

Projicirt man zum Zwecke des Beweises aus dem Punkte A die Punkte $BCDEF$, so erhält man fünf Strahlen, deren Wurf gleich dem Theilwurf $(BCDEF)$ ist (Art. 21). Für diese fünf Strahlen des Bündels A, als fünf Elemente eines linearen Gebiets zweiter Stufe, kann man den Satz des Art. 5 zur Verwendung bringen, welcher hier sagt, dass der Wurf dieser fünf Strahlen gleich ist dem Wurf von gewissen fünf Strahlen des Büschels A in der Ebene AEF. Diese fünf Strahlen sind: die Durchschnittslinien der Ebenen des von den Kanten AB, AC, AD gebildeten Dreikants mit der Ebene AEF nebst den Strahlen AF und AE d. h. es sind die fünf Strahlen, welche von A aus die fünf Punkte $B'C'D'FE$ projiciren. Es stimmt also der Wurf dieser fünf Strahlen mit dem Wurf dieser fünf Punkte überein und die Wurfgleichung

$$(BCDEF) = (B'C'D'FE)$$

ist bewiesen. Da man dieser Gleichung auch alle jene an die Seite stellen kann, welche durch Vertauschung von A mit einem der Punkte BCD aus ihr hervorgehen, so ist damit der Nachweis für den oben ausgesprochenen Satz erbracht.

Allgemein kommt man zu dem folgenden Ergebniss:

Sind $A_1 A_2 \ldots A_n$ n Punkte des R_{n-3} und sind $A_1' A_2' \ldots A_{n-2}'$ die Punkte, in denen die Verbindungslinie $A_{n-1} A_n$ von den $(n-4)$-dimensionalen Ebenen des $(n-2)$-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_{n-2}$ getroffen wird, so ist

$$(A_1' A_2' \ldots A_{n-2}' A_n A_{n-1}) = (A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n).$$

Wir beweisen den Satz unter der Voraussetzung, dass er giltig ist, wenn man in ihm die Zahl $n-1$ an Stelle der Zahl n treten lässt.

Unter dieser Voraussetzung kann man ihn für die $n-1$ Strahlen des $(n-4)$-dimensionalen Bündels A_1 zur Verwendung bringen, welche durch Projection der Punkte $A_2 A_3 \ldots A_n$ aus A_1 entstehen. Der Satz ergiebt hier, dass der Wurf dieser $n-1$ Strahlen, gleich ist

dem Wurf der Strahlen, welche die Punkte $A_2'A_3' \dots A_{n-2}'A_nA_{n-1}$ der Geraden $A_{n-1}A_n$ aus A_1 projiciren, womit die Gleichung

$$(A_2'A_3' \dots A_{n-2}'A_nA_{n-1}) = (A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n)$$

bewiesen ist. Da man A_1 mit jedem der Punkte $A_2A_3 \dots A_{n-2}$ vertauschen kann, so ist damit der beabsichtigte Nachweis erbracht.

23. Die vollständige Figur eines räumlichen Sechsecks weist nicht nur auf jeder Kante, sondern, wie wir jetzt zeigen wollen, auch auf jeder Hauptdiagonale sechs Punkte auf, deren Wurf gleich dem Wurf der Ecken des Sechsecks ist.

Schneiden sich die gegenüberliegenden Seitenflächen ABC und DEF des räumlichen Sechsecks $ABCDEF$ in der Hauptdiagonale h und wird diese von den Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten $(A)(B)(C)$, von den Seiten des Dreiecks DEF in den Punkten $(D)(E)(F)$ getroffen, so ist

$$h\big((A)(B)(C)(D)(E)(F)\big) = (ABCDEF).$$

Man kann nämlich leicht die Gleichheit von gewissen entsprechenden Theilwürfen der beiden Würfe einsehen.

Projicirt man von A aus die Punkte $BCDEF$, so erhält man fünf Strahlen, deren Wurf gleich dem Theilwurf $(BCDEF)$ ist (Art. 21). Für diese fünf Strahlen des Bündels A als Elemente eines linearen Gebiets zweiter Stufe kann man den Satz des Art. 5 zur Verwendung bringen, welcher hier sagt, dass der Wurf der fünf Strahlen gleich ist dem Wurf von gewissen fünf Strahlen des Büschels A in der Verbindungsebene der Strahlen AE und AF. Diese fünf Strahlen sind: die Durchschnittslinien der Ebenen des von den Strahlen AB, AC, AD gebildeten Dreikants mit der Ebene der beiden Strahlen AF und AE im Vereine mit diesen beiden Strahlen selbst. Es sind also die fünf Strahlen, welche von A aus die fünf Punkte $(B)(C)(D)EF$ der Geraden EF projiciren, ihr Wurf ist daher gleich dem Wurf dieser fünf Punkte und damit ist die Gleichung

$$(BCDEF) = \big((B)(C)(D)FE\big)$$

bewiesen. Da wir dieser Gleichung alle jene an die Seite stellen können, die durch Vertauschung von A mit einem der Punkte BCD aus ihr hervorgehen, so ist damit auch der Nachweis für den oben ausgesprochenen Satz erbracht.

Allgemein kommt man zu dem folgenden Ergebniss:

Theilt man die n Punkte $A_1A_2 \dots A_n$ der R_{n-3} in zwei Gruppen von $(k+1)$ und $(n-k-1)$ Punkten $A_1A_2 \dots A_{k+1}$ und $A_{k+2}A_{k+3} \dots A_n$ $(k = 2, 3, 4, \dots n-3)$, so wird durch die ersteren ein Raum von k Dimensionen $R_k^{(1,2,\dots k+1)}$, durch die letzteren ein Raum von $(n-k-2)$ Dimensionen $R_{n-k-2}^{(k+2,k+3,\dots n)}$ bestimmt und diese beiden Räume schneiden

sich in einer Hauptdiagonale h des n-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_n$. *Bezeichnen wir mit* $(A_1)(A_2)\ldots(A_{k+1})$ *die Punkte, in denen die Gerade h von den Seitenflächen der Fundamentalpyramide* $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$ *des* $R_k^{(1,2,\ldots k+1)}$ *getroffen wird und mit* $(A_{k+2})(A_{k+3})\ldots(A_n)$ *die Punkte, in denen sie von den Seitenflächen der Fundamentalpyramide* $A_{k+2} A_{k+3} \ldots A_n$ *des* $R_{n-k-2}^{(k+2,k+3,\ldots n)}$ *getroffen wird, so ist:*

$$h\big((A_1)(A_2)\ldots(A_n)\big) = (A_1 A_2 \ldots A_n).$$

Genau so wie in dem behandelten Specialfall $n = 6$ kann man auch hier die Gleichheit von gewissen entsprechenden Theilwürfen der Würfe $(A_1 A_2 \ldots A_n)$ und $h\big((A_1)(A_2)\ldots(A_n)\big)$ einsehen. Der Theilwurf $(A_k A_{k+1} \ldots A_n)$ z. B. ist zunächst nach Art. 21 gleich dem Wurf der $(n-k+1)$ Räume R_{k-1}, welche der Reihe nach die Punkte $A_k A_{k+1} \ldots A_n$ aus dem von den Punkten $A_1 A_2 \ldots A_{k-1}$ bestimmten Raum $R_{k-2}^{(1,2,\ldots k-1)}$ projiciren. Für diese Räume R_{k-1} kann man nun, weil sie $(n-k+1)$ Elemente eines linearen Gebiets $(n-k-2)^{\text{ter}}$ Stufe darstellen, den Satz des Art. 22 zur Verwendung bringen. Die ersten zwei von diesen Räumen R_{k-1}, nämlich die beiden, welche die Punkte A_k und A_{k+1} projiciren, werden durch den Raum $R_k^{(1,2,\ldots,k+1)}$ verbunden; man erhält daher in diesem Raum $(n-k+1)$ $(k-1)$-dimensionale Ebenen durch $R_{k-2}^{(1,2,\ldots k-1)}$, welche denselben Wurf bestimmen wie die $(n-k+1)$ Räume R_{k-1}. Es sind dies die $(k-1)$-dimensionalen Ebenen, welche aus $R_{k-3}^{(1,2,\ldots k-1)}$ der Reihe nach die Punkte $(A_k)(A_{k+1})\ldots(A_n)$ projiciren, deren Wurf mit dem Wurf der Punkte $(A_k)(A_{k+1})\ldots(A_n)$ übereinstimmt. Damit ist die Gleichung

$$(A_k A_{k+1} \ldots A_n) = \big((A_k)(A_{k+1})\ldots(A_n)\big)$$

begründet, und da auch alle analogen Geltung haben werden, so erscheint die Gleichung

$$(A_1 A_2 \ldots A_n) = \big((A_1)(A_2)\ldots(A_n)\big)$$

vollständig erwiesen.

24. Geht durch die n Punkte $A_1 A_2 \ldots A_n$ des R_{n-3} keine eigentliche Curve n^{ter} Ordnung, so wollen wir ihnen als *uneigentlichen Wurf* den Wurf $(A_1' A_2' \ldots A_{n-2}' A_n A_{n-1})$ zuschreiben, wobei $A_1' A_2' \ldots A_{n-2}$ die Schnittpunkte der $(n-4)$-dimensionalen Ebenen der von den Punkten $A_1 A_2 \ldots A_n$ gebildeten Fundamentalpyramide mit der Geraden $A_{n-1} A_n$ bedeuten.

Eine hieher gehörige Bemerkung lautet:

Von den n Punkten $A_1 A_2 \ldots A_n$ *des* R_{n-3} *mögen die* $n-k+2$ *letzten in einem und demselben Raume* R_{n-k} *liegen, und dessen Schnittpunkt mit dem durch die* $k-2$ *übrigen bestimmten* R_{k-3} *möge S heissen.*

Dann ist der Wurf der Punkte $A_1 A_2 \dots A_n$ *des* R_{n-3} *ein uneigentlicher und geht aus dem Wurf* $(S A_{k-1} A_k \dots A_n)$ *im* R_{n-k} *hervor, wenn in demselben das erste Element* $(k-2)$*-mal gesetzt wird.*

Zunächst ist, wenn A den Schnittpunkt des von den Punkten $A_{k-1} A_k \dots A_{n-2}$ bestimmten R_{n-k-1} mit der Geraden $A_{n-1} A_n$ bedeutet, der Definition zufolge der uneigentliche Wurf der Punkte $A_1 A_2 \dots A_n$ des R_{n-3} durch den Wurf $(AA \dots A A'_{k-1} A'_k \dots A'_{n-2} A_n A_{n-1})$ gegeben, die mit $k-2$ gleichen Elementen beginnt. Gemäss Art. 22 gilt nun die unsere Behauptung bestätigende Gleichung

$$(A A'_{k-1} A'_k \dots A'_{n-2} A_n A_{n-1}) = (S A_{k-1} A_k \dots A_n).$$

Die Punkte $A A'_{k-1} A'_k \dots A'_{n-2}$ werden nämlich auch durch Schnitte der Geraden $A_{n-1} A_n$ mit den $(n-k-1)$-dimensionalen Ebenen der Fundamentalpyramide $S A_{k-1} A_k \dots A_n$ des R_{n-k} erhalten, da diese Ebenen des R_{n-k} die Durchschnitte dieses Raumes mit den $(n-4)$-dimensionalen Ebenen der Fundamentalpyramide $A_1 A_2 \dots A_n$ des R_{n-3} darstellen.

§ 6.

Verallgemeinerung dreier Sätze von Staudt.

25. In Art. 22 ist gezeigt, dass, wenn die vier Seitenflächen eines Tetraeders $ABCD$ von der Verbindungslinie der Punkte EF in den Punkten $A'B'C'D'$ getroffen werden,

$$(ABCDEF) = (A'B'C'D'FE)$$

ist. Hierin liegt speciell auch die Gleichheit der Theilwürfe $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$, von denen der erste nach Art. 21 gleich ist dem Wurf der vier Ebenen, welche die Punkte $ABCD$ aus der Geraden EF projiciren. Die Gleichheit dieser Theilwürfe liefert also einen Satz von Staudt, nach welchem die vier Schnittpunkte einer Geraden mit den Seitenflächen eines Tetraeders denselben Wurf bestimmen, wie die vier Ebenen, welche aus der Geraden die Ecken des Tetraeders projiciren.

Wir gelangen nun sofort zu einer Verallgemeinerung dieses Staudt'schen Satzes für den R_{n-3}, wenn wir an Stelle der angezogenen Wurfgleichung des Art. 22, für den Raum R_3, die eben dort auch allgemein für den R_{n-3} bewiesene Wurfgleichung heranziehen.

Wir haben die Bezeichnungen des Art. 22 beibehaltend die Gleichung

$$(A_1 A_2 \dots A_n) = (A_1' A_2' \dots A'_{n-2} A_n A_{n-1})$$

und es ist daher der Theilwurf

$$(A_1 A_2 \dots A_{n-2}) = (A_1' A_2' \dots A'_{n-2}).$$

Der Theilwurf $(A_1 A_2 \dots A_{n-2})$ ist aber nach Art. 21 gleich dem Wurf der zweidimensionalen Ebenen des R_{n-3}, welche die Punkte $A_1 A_2 \dots A_{n-2}$ aus der Verbindungslinie der Punkte A_{n-1} und A_n projiciren, so

dass wir die folgende Verallgemeinerung des Staudt'schen Satzes erlangen:

Der Wurf der $(n-2)$ *Punkte, in denen eine Gerade des* R_{n-3} *die* $(n-4)$*-dimensionalen Seitenflächen einer Fundamentalpyramide des* R_{n-3} *trifft, ist gleich dem Wurf der* $(n-2)$ *zweidimensionalen Ebenen, welche die Gerade mit den Ecken der Fundamentalpyramide verbinden.*

Da der Staudt'sche Satz zu sich selbst dual ist, so kann mit demselben Rechte wie der eben ausgesprochene Satz auch der zu ihm duale als Verallgemeinerung des Staudt'schen angesehen werden. Der duale Satz lautet:

Der Wurf der $(n-2)$ $(n-4)$*-dimensionalen Ebenen, welche einen* R_{n-5} *des* R_{n-3} *mit den Ecken einer Fundamentalpyramide in diesem Raum verbinden, ist gleich dem Wurf, den im* R_{n-5} *seine Schnittpunkte mit den* $(n-2)$ $(n-4)$*-dimensionalen Seitenflächen der Fundamentalpyramide bestimmen.*

Eine von den beiden hier gegebenen verschiedene Verallgemeinerung des in Rede stehenden Staudt'schen Satzes hat, wie wir hier anmerken wollen, Herr Veronese gegeben*). Seine Verallgemeinerung lautet:

„Jeder Raum R_m schneidet eine $(2m+2)$-eckige Pyramide im R_{2m+1} in einer Configuration, die reciprok der Configuration ist, welche durch Projection derselben Pyramide aus R_m entsteht."

26. Schon in der Wurfgleichung für die Ebene

$$(ABCDE) = (A'B'C'ED),$$

in der $A'B'C'$ die Schnittpunkte der Geraden $DE = d$ mit den Seiten des Dreiecks ABC bedeuten, ist ein (zweiter) Staudt'scher Satz enthalten, der im Wesen die Gleichheit der Theilwürfe $(ABCE)$ und $(A'B'C'D)$ aussagt. Der erste von diesen beiden Würfen ist nämlich gleich dem Wurf der vier Strahlen, welche aus dem Punkte D die vier Punkte $ABCE$ projiciren (Art. 21) und deswegen setzt sich die Gleichheit der beiden Theilwürfe in den Staudt'schen Satz**) um, nach welchem, wenn in der Ebene eines Dreiecks ABC ein Punkt D und ein durch ihn hindurchgehender Strahl d gegeben ist, der Wurf, den die nach den Ecken ABC des Dreiecks gerichteten Strahlen des Büschels D zusammen mit dem Strahl d bestimmen, gleich ist dem Wurf, den die Schnittpunkte ihrer Gegenseiten zusammen mit dem Punkt D in der Punktreihe d definiren.

---

*) Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. Math. Ann. Bd. XIX, Art. 18.

**) Beiträge z. Geom. d. Lage, Art. 34.

Im Raum lautet nun, wenn wir die Bezeichnungen des Art. 22 beibehalten, die entsprechende Wurfgleichung

$$(ABCDEF) = (A'B'C'D'FE),$$

in welcher die Gleichheit der Theilwürfe $(ABCDF)$ und $(A'B'C'D'E)$ enthalten ist. Da der Theilwurf $(ABCDF)$ gleich ist dem Wurf der fünf Strahlen, welche die Punkte $ABCDF$ aus E projiciren, so stellt folgender Satz das räumliche Analogon des Staudt'schen Satzes dar:

Ist im Raume ein Tetraeder $ABCD$, ein Punkt E und eine hindurchgehende Gerade e gegeben, so ist der Wurf, den die nach den Ecken $ABCD$ des Tetraeders gerichteten Strahlen des Bündels E zusammen mit dem Strahl e bestimmen, gleich dem Wurf, den die Schnittpunkte der Geraden e mit den Seitenflächen des Tetraeders mit dem Punkt E zusammen bestimmen.

Als Analogon des Staudt'schen Satzes, der sich selbst dual gegenübersteht, ist auch das duale Gegenbild des eben ausgesprochenen anzusehen, welches lautet:

Sind im Raume ein Tetraeder $ABCD$ und eine Gerade e nebst einer hindurchgehenden Ebene ε gegeben, so ist der fünfelementige Wurf, welchen in der Ebene ε deren Schnittlinien mit den vier Seitenflächen des Tetraeders zusammen mit der Geraden e bestimmen, gleich dem fünfelementigen Wurf, den die vier Ebenen, welche aus e die Ecken des Tetraeders projiciren, mit der Ebene ε zusammen bestimmen.

Die jetzt schon für Ebene und Raum durchgeführte Schlussweise für den R_n nochmals zu wiederholen, dürfte überflüssig sein. Sie liefert den folgenden Satz:

Ist im R_n eine Fundamentalpyramide und ein Punkt nebst einer hindurchgehenden Geraden gegeben, so ist der Wurf, den im Strahlenbündel, dessen Scheitel der Punkt ist, die Gerade in Verbindung mit den nach den Ecken der Fundamentalpyramide zielenden Strahlen bestimmt, gleich dem Wurf, den auf der Geraden der Punkt in Verbindung mit ihren Schnittpunkten mit den Seitenflächen definirt.

Den zu diesem Satze dualen auch noch auszusprechen, dürfte nicht nöthig sein.

27. Schon in Art. 6 haben wir die Staudt'sche Bemerkung verwerthet, dass durch ein einfaches ebenes Fünfeck ein Polarsystem bestimmt ist, das jeder Ecke ihre Gegenseite als Polare zuweist. Diese Bemerkung ist in folgender Weise zu verallgemeinern:

Durch ein einfaches n-Eck im R_{n-3} ist ein Polarsystem in diesem Raume gegeben, welches jedem Eckpunkt des n-Ecks seine $(n-4)$-dimensionale Gegenebene als Polarebene zuweist.

Man kann nämlich für ein Polarsystem im R_{n-3} $\frac{n(n-3)}{2}$ Paare von conjugirten Punkten beliebig wählen. Ebenso viel Paare liefert

aber die Bedingung, dass jeder Eckpunkt des einfachen n-Ecks mit Ausnahme seiner zwei Nachbarecken allen $(n-3)$ übrigen Eckpunkten conjugirt sein soll, was zur Folge hat, dass ihm die $(n-4)$-dimensionale Ebene dieser $(n-3)$ Eckpunkte, d. i. seine Gegenebene, als Polarebene zugewiesen ist.

Aus der eben bewiesenen Verallgemeinerung der Staudt'schen Bemerkung folgt unmittelbar:

Der Wurf der n Eckpunkte eines einfachen n-Ecks im R_{n-3} ist gleich dem Wurf ihrer $(n-4)$-dimensionalen Gegenebenen.

§ 7.

Der Wurf einer Collineation des Raums R_3 und des R_n.

28. Eine Collineation des Raums hat i. A. vier Doppelpunkte $ABCD$. Die projectiven Eigenschaften der Collineation hängen von einem sechselementigen Wurf ab, nämlich dem Wurf, den die Doppelpunkte $ABCD$ zusammen mit einem Paar homologer Punkte PP_1 bestimmen. Dieser Wurf ändert sich nicht, wenn man das Paar homologer Punkte PP_1 durch irgend ein anderes Paar $P'P_1'$ ersetzt, wie man folgendermassen beweist:

Vermöge der Collineation sind die Bündel P und P_1 collinear auf einander bezogen und erzeugen eine cubische Raumcurve C^3, welche die sechs Punkte $ABCDPP_1$ enthält; ebenso erzeugen die collinearen Bündel P' und P_1' eine cubische Raumcurve C'^3, welche die Punkte $ABCDP'P_1'$ enthält. Jeder durch die Gerade PP' hindurchgehenden Ebene entspricht eine Ebene durch die Gerade P_1P_1', und zwei solche Ebenen sind sowohl in den Bündeln P und P_1 als auch in den Bündeln P' und P_1' homolog. Ihre Schnittlinie ist also sowohl Sehne der Raumcurve C^3 als auch der Raumcurve C'^3. Daher erzeugen die vermöge der Collineation projectiven Ebenenbüschel mit den Axen PP' und P_1P_1' die eine Regelschaar einer Fläche 2. O., welche aus Doppelsecanten der auf der Fläche gelegenen Curven C^3 und C'^3 besteht. Diese cubischen Raumcurven werden daher die Geraden der anderen Regelschaar der Fläche 2. O. zu einfachen Secanten haben und durch sie projectiv auf einander bezogen erscheinen. Da die Axen PP' und P_1P_1' der erzeugenden Büschel Strahlen dieser zweiten Regelschaar sind, so sind PP' und P_1P_1' Paare entsprechender Punkte der Curven C^3 und C'^3, deren Schnittpunkte $ABCD$ sich in der projectiven Beziehung selbst entsprechen, d. h. es besteht die Wurfgleichung

$$(ABCDPP_1) = (ABCDP'P_1')$$

und wir können sagen:

Der Wurf, den die vier Doppelpunkte einer Collineation des Raums mit irgend einem Paar homologer Punkte bestimmen, ist constant und soll als Wurf der Collineation bezeichnet werden.

Da die Geraden PP' und $P_1 P_1'$ zwei beliebige homologe Strahlen darstellen, so liegt in dieser Betrachtung auch der Satz:

Irgend zwei homologe Strahlen können mit den vier Doppelpunkten der Collineation durch eine Fläche 2. O. verbunden werden, und in der Regelschaar dieser Fläche, der sie angehören, bestimmen die Strahlen durch die vier Doppelpunkte zusammen mit diesen beiden homologen Strahlen den Wurf der Collineation.

In jedem Strahlenbündel giebt es zwei homologe Strahlen, nämlich die beiden Strahlen, welche den Scheitel mit dem ihm im einen und andern Sinn homologen Punkt verbinden. Der letzte Satz besagt also speciell:

In jedem Strahlenbündel tritt der Collineationswurf auf als Wurf, den die nach den vier Doppelpunkten der Collineation gerichteten Strahlen in Verbindung mit den beiden homologen Strahlen des Bündels bestimmen.

29. Es bestehen die zwei folgenden Sätze:

Auf der Verbindungslinie von irgend zwei homologen Punkten PP_1 ist der Wurf $(A'B'C'D'P_1P)$ gleich dem Wurf der Collineation wenn mit $A'B'C'D'$ die Schnittpunkte mit den Seitenflächen des Haupttetraeders $ABCD$ bezeichnet werden.

In dem durch irgend zwei homologe Ebenen π und π_1 bestimmten Ebenenbüschel ist der Wurf $(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\pi_1\pi)$ gleich dem Wurf der Collineation, wenn $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ die durch die Doppelpunkte $ABCD$ der Collineation gelegten Ebenen bedeuten.

Von diesen beiden Sätzen sagt der erste die in Art. 22 bewiesene Gleichung $(A'B'C'D'P_1P) = (ABCDPP_1)$ aus; die Richtigkeit des zweiten sieht man folgendermassen:

Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene π, P_1 der homologe in π_1, so erzeugen die vermöge der Collineation collinearen Bündel P und P_1 die cubische Raumcurve C^3, welche die Punkte PP_1 mit den Doppelpunkten der Collineation $ABCD$ verbindet und die Schnittlinie u der homologen Ebenen π und π_1 ist eine Sehne dieser Curve. Hieraus folgt, dass die Ebenen, welche aus dieser Sehne die Punkte $ABCDPP_1$ projiciren, denselben Wurf bestimmen, wie diese Punkte, und das ist der zweite Satz.

Die Constanz jedes der beiden Würfe $(A'B'C'D'P_1P)$ und $(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\pi\pi_1)$ hat schon Herr Sturm*) bewiesen, ihre Gleichheit ist ihm entgangen.

Der zu dem Satze, welcher die Gleichheit der Würfe $(A'B'C'D'P_1P)$

*) Liniengeometrie, II.

und $(ABCDPP_1)$ aussagt, duale besagt die Gleichheit der Würfe $(\alpha'\beta'\gamma'\delta'\pi_1\pi)$ und $(\alpha\beta\gamma\delta\pi\pi_1)$, wenn α, β, γ, δ die Doppelebenen der Collineation bedeuten, welche der Reihe nach den Doppelpunkten A, B, C, D gegenüberliegen. Es gilt also der Satz:

Die vier Doppelebenen $\alpha\beta\gamma\delta$ der Collineation bestimmen zusammen mit irgend einer Ebene π_1 des zweiten Systems und der homologen Ebene π des ersten den Wurf der Collineation.

30. Wenn mit $(P)(P')$ die Projectionen der beiden homologen Punkte P und P_1 vom Doppelpunkte A aus in die Ebene der drei übrigen Doppelpunkte BCD bezeichnet werden, wenn ferner $\mathfrak{A}$ den Schnittpunkt der Verbindungslinie PP_1 mit dieser Ebene bedeutet, so liegen die drei Punkte $(P)(P_1)\mathfrak{A}$ in der Schnittlinie h der Ebenen APP_1 und BCD. Trifft die Gerade h die Seiten des Dreiecks BCD in den Punkten $(B)(C)(D)$, so ist nach Art. 23:

$$(ABCDPP_1) = h\big(\mathfrak{A}(B)(C)(D)(P_1)(P)\big)$$

und wir können deshalb mit Rücksicht darauf, dass $(P)(P_1)$ homologe Punkte in der Ebene BCD sind, den folgenden Satz aussprechen:

Die Würfe der Collineationen, welche von einer Collineation des Raums in ihren vier Doppelebenen inducirt werden, sind Theilwürfe des Wurfs der Raumcollineation. Der Wurf der in der Verbindungsebene der Doppelpunkte BCD inducirten Collineation z. B., der durch $\big((B)(C)(D)(P_1)(P)\big)$ gegeben ist, wenn $(P)(P_1)$ zwei homologe Punkte dieser Ebene und $(B)(C)(D)$ die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie h mit den Seiten des Dreiecks BCD bedeuten, erweist sich als gleich dem Theilwurf $(BCDPP_1)$ des Wurfs $(ABCDPP_1)$ der Raumcollineation. Es giebt daher in dieser Verbindungslinie h einen ganz bestimmten Punkt $\mathfrak{A}$, so beschaffen, dass der Wurf $\big(\mathfrak{A}(B)(C)(D)(P_1)(P)\big)$ gleich dem Wurfe der Raumcollineation wird. Die geometrische Bedeutung dieses Punktes $\mathfrak{A}$ besteht darin, dass er das Centrum der perspectiven Beziehung ist, die zwischen den homologen Strahlen $A(P)$ und $A(P_1)$ herrscht.

Ein zweiter Lehrsatz von ähnlicher Natur liegt in der Gleichung

$$(ABCDPP_1) = (B'A'DCP_1'P'),$$

welche nach Art. 22 besteht, wenn mit A' und B' die Projectionen der Punkte A und B aus der Geraden PP_1 auf die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte B und C und mit P' und P_1' die Projectionen der Punkte P und P_1 aus der Doppellinie AB in die Doppellinie CD bezeichnet werden. Es folgt:

Die Würfe der Projectivitäten, welche von einer Collineation des Raums auf ihren sechs Doppelgeraden inducirt werden, sind Theilwürfe

des Collineationswurfes. Z. B. ist, wenn $P'P_1'$ zwei homologe Punkte auf der Verbindungslinie der Doppelpunkte C und D bedeuten, der Wurf $(DCP_1'P') = (CDP'P_1')$ gleich dem Theilwurf $(CDPP_1)$. Es giebt in Folge dessen auf der Geraden CD zwei bestimmte Punkte $A'B'$ von der Eigenschaft, dass der Wurf $(B'A'DCP_1'P')$ gleich dem Collineationswurf wird. Die geometrische Bedeutung der Punkte A' und B' besteht nun darin, dass sie bez. mit den Doppelpunkten A und B verbunden, die Axen des Strahlengebüsches (*der linearen Congruenz*) *liefern, das von den Verbindungslinien homologer Punkte der beiden homologen Ebenen ABP' und ABP_1' gebildet wird.*

31. Es dürfte überflüssig sein, alle für Collineationen des R_3 in diesem Paragraph gemachten Entwicklungen auf den R_n zu übertragen. Nur den Hauptsatz, der die Constanz des Wurfs $(A_1A_2\ldots A_{n+1}PP_1)$ aussagt, wo $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ die Doppelpunkte, PP_1 zwei homologe Punkte der Collineation des R_n bedeuten, beweisen wir unter der Voraussetzung, dass er für den R_{n-1} richtig sei. Wir haben damit die Richtigkeit des Satzes für die Collineation angenommen, welche im Strahlenbündel A_1 inducirt wird. Nun ist aber nach Art. 21 der Wurf der Strahlen, welche aus A_1 die Punkte $A_2A_3\ldots A_{n+1}PP_1$ projiciren, gleich dem Theilwurf $(A_2A_3\ldots A_{n+1}PP_1)$ des Collineationswurfs $(A_1A_2\ldots A_{n+1}PP_1)$; somit ist dieser Theilwurf und ebenso sind alle analogen constant und daher gilt ein Gleiches vom Collineationswurf.

32. Von den Collineationen mit besonderen Würfen sollen nur die mit uneigentlichen Würfen mit einigen Worten berührt werden.

Sind die Eckpunkte $ABCD$ eines Tetraeders als Doppelpunkte für eine Collineation des R_3 vorgelegt, so ist die Collineation durch Annahme von zwei ganz beliebigen ausserhalb der Tetraederebenen gelegenen homologen Punkten PP_1 in allen Fällen eindeutig gegeben. Der Wurf dieser Collineation ist, auch wenn er ein uneigentlicher sein sollte, durch $(A'B'C'D'P_1P)$ dargestellt; wenn $A'B'C'D'$ die Schnittpunkte der Geraden PP_1 mit den Ebenen des Tetraeders $ABCD$ bedeuten (Art. 24) und die Constanz dieses Wurfs steht dann auch ausser Frage. Denn, statt für eine Collineation die Constanz des Wurfs $(ABCDPP_1)$ direct zu begründen und die Constanz des Wurfs $(A'B'C'D'P_1P)$ aus ihr zu schliessen, hätten wir auch umgekehrt vorgehen können.

Der Collineationswurf ist ein uneigentlicher, wenn von den sechs Punkten $ABCDPP_1$ vier in dieselbe Ebene fallen. Dies geschieht, da die Punkte PP_1 ausserhalb der Ebenen des Tetraeders $ABCD$ vorausgesetzt werden, nur, wenn die Verbindungslinie PP_1 eine Kante des Tetraeders trifft. Wir nehmen an, die Kante CD und diese allein werde von den Geraden PP_1 getroffen. Die Ebene

$CDPP_1$ ist dann sich selbst homolog, also auch ihr Schnittpunkt S mit der Kante AB. Auf dieser Geraden haben wir in den Punkten ABS drei sich selbst homologe Punkte; es entspricht also jeder ihrer Punkte sich selbst. Eine solche Collineation hat Herr Schur als eine axiale bezeichnet*).

Der Satz des Art. 22 erlaubt uns das folgende Ergebniss auszusprechen:

Eine axiale Collineation des Raums ist durch die Gerade g, welche sich punktweise selbst entspricht, die beiden ausserdem vorhandenen Doppelpunkte C und D und einen fünfelementigen Wurf bestimmt. Zwei homologe Punkte liegen immer mit den Doppelpunkten C und D in derselben Ebene und bestimmen in ihr mit dem Durchstosspunkte der Geraden g und den Punkten CD zusammen den constanten Wurf.

Diesem Satz lässt sich ein dualer gegenüberstellen.

Schneidet die Gerade PP_1 neben der Kante CD auch noch ihre Gegenkante AB, so ist in dem Collineationswurf $(A'B'C'D'P_1P)$ $A' = B'$ und $C' = D'$. Es wird also die Verbindungslinie von je zwei homologen Punkten die Geraden AB und CD schneiden und die Schnittpunkte werden mit den homologen Punkten einen constanten Wurf bestimmen. Wir haben die *geschaarte Collineation* mit den Axen AB und CD.

Einen dritten Fall einer Collineation des R_3 mit uneigentlichem Wurf liefert die noch übrig bleibende Annahme, dass die Gerade PP_1 zwei anstossende Tetraederkanten trifft. Diese Gerade geht dann, weil sie in keine Tetraederebene fallen soll, durch eine Tetraederecke z. B. D und die Punkte $A'B'C'$ werden mit dieser Ecke D identisch. Die Constanz des Wurfs $(A'B'C'D'P_1P)$ besagt, dass die Verbindungslinie von irgend zwei homologen Punkten PP_1 durch D geht und auf ihr der Wurf $(DD'PP_1)$, constant ist. Wir haben eine *Centralcollineation* mit D als Centrum und ABC als Ebene.

Nimmt man zur Bestimmung einer Collineation des R_n neben der Fundamentalpyramide der Doppelpunkte noch ein Paar homologer Punkte PP_1 so an, dass deren Verbindungslinie einen Raum R_{n-k} der Fundamentalpyramide trifft, so erlaubt uns der Satz des Art. 22 über die entstehende Collineation des R_n mit uneigentlichem Wurf eine Aussage zu machen, die der hier über die axiale Collineation des R_3 gemachten analog ist. Die Annahme, dass die Gerade PP_1 zwei Gegenräume der Fundamentalpyramide trifft (d. h. zwei solche Räume, deren einer durch gewisse von den Ecken der Fundamentalpyramide, der andere durch die übrigen Ecken bestimmt ist) führt zu folgendem Satz:

*) Ueber besondere Lagen zweier Tetraeder, Math. Ann. Bd. 19.

Ist im R_n ein Raum R_k und ein Raum R_{n-k-1} gegeben, so geht durch einen beliebigen Punkt P des R_n ein Strahl, der die beiden Räume R_k und R_{n-k-1} trifft. Weist man dem Punkt P auf diesem Strahl den Punkt P_1 zu, der mit ihm und den beiden Treffpunkten einen gegebenen Wurf bestimmt, so hat man eine Collineation des R_n festgesetzt.

Die so bestimmte Collineation ist in dem Specialfall $k = 0$ eine Centralcollineation.

Ueber einen Lüroth-Gordan'schen Satz.

Von

Eugen Netto in Giessen.

Herr Lüroth hat im neunten Bande der Annalen (S. 163—165) den Satz bewiesen, dass man eine unicursale Curve so auf eine Gerade beziehen kann, dass die Punkte beider sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Diesen Satz hat Herr Gordan in Band XXIX der Annalen (S. 318) dahin erweitert, dass „wenn zwei rationale Functionen

$$f_1(x, y, z, \ldots), \quad f_2(x, y, z, \ldots)$$

einer algebraischen Gleichung genügen, deren Coefficienten von $x, y, z, \ldots$ unabhängig sind, $G(f_1, f_2) = 0$, dann eine rationale Function λ von f_1, f_2 gefunden werden kann, durch welche umgekehrt f_1 und f_2 rational darstellbar sind.“ Ich habe den Beweis des Lüroth'schen Satzes aufgenommen, um zu zeigen, wie derselbe bei rein algebraischer Begründung eine Wendung zulässt, der zu Folge er ohne Weiteres auch die Richtigkeit der Gordan'schen Erweiterung vor Augen führt. Gern hätte ich dabei den rein arithmetischen Satz, dass der grösste gemeinsame Theiler zweier ganzen Functionen von der Gestalt

$$\varphi_1(x)\,\psi(x') - \varphi_1(x')\,\psi(x), \qquad \varphi_2(x)\,\psi(x') - \varphi_2(x')\,\psi(x)$$

wieder die Form

$$\chi(x)\,\varpi(x') - \chi(x')\,\varpi(x)$$

besitzt, ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen bewiesen, doch ist mir das bisher noch nicht gelungen.

Wir wollen unter $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi(x)$ drei ganze Functionen der Variablen x verstehen, welche keinen, allen dreien gemeinsamen Theiler besitzen, und deren Coefficienten einem beliebigen Rationalitätsbereich angehören. Wir betrachten dann die beiden rationalen Functionen

$$(1) \qquad g_1 = \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}, \qquad g_2 = \frac{\varphi_2(x)}{\psi(x)}.$$

Keine der beiden Gleichungen

$$\varphi_i(x)\,\psi(x') - \varphi_i(x')\,\psi(x) = 0 \qquad (i=1,2) \tag{2}$$

hat, so lange x' einen unbestimmten Parameter bedeutet, eine Doppelwurzel. Wäre nämlich x_0 eine solche, so müsste nicht nur

$$\varphi_i(x_0)\,\psi(x') - \varphi_i(x')\,\psi(x_0) = 0 \tag{3}$$

sein, sondern es müsste auch noch

$$\frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)}{x - x_0}\,\psi(x') - \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}\,\varphi_i(x')$$

für $x = x_0$ verschwinden. Diese letzte Bedingung geht für

$$\varphi_i = a_i x^{p_i} + b_i x^{p_i - 1} + \cdots,\ \psi = \alpha x^q + \beta x^{q-1} + \cdots \tag{4}$$

in

$$\left(a_i p_i x_0^{p_i - 1} + b_i(p_i - 1)x_0^{p_i - 2} + \cdots\right)\psi(x')$$
$$-\left(\alpha q x_0^{q-1} + \beta(q-1)x_0^{q-2} + \cdots\right)\varphi_i(x') = 0$$

über; und hieraus würde in Verbindung mit (3) folgen

$$\left(a_i p_i x_0^{p_i - 1} + b_i(p_i - 1)x_0^{p_i - 2} + \cdots\right)\left(\alpha x_0^q + \beta x_0^{q-1} + \cdots\right)$$
$$-\left(a_i x_0^{p_i} + b_i x_0^{p_i - 1} + \cdots\right)\left(\alpha q x_0^{q-1} + \beta(q-1)x_0^{q-2} + \cdots\right)$$
$$= \alpha a_i (p_i - q) x_0^{p_i + q - 1}$$
$$+ [\alpha b_i(p_i - q - 1) + a_i \beta(p_i - q + 1)]\, x_0^{p_i + q - 2} + \cdots = 0.$$

Identisch kann diese Gleichung nicht erfüllt sein, da dies nur für

$$p_i = q;\quad a_i : b_i : \cdots = \alpha : \beta : \cdots$$

möglich wäre, was durch die Voraussetzungen ausgeschlossen ist; sie kann also nur für eine endliche Anzahl von Werthen für x_0 befriedigt werden, und daraus ergiebt sich auch nur eine endliche Anzahl von Werthen für x', welche (3) erfüllen.

Wir suchen nun für die beiden ganzen Functionen

$$\begin{aligned} f_1(x;x') &= \varphi_1(x)\,\psi(x') - \varphi_1(x')\,\psi(x), \\ f_2(x;x') &= \varphi_2(x)\,\psi(x') - \varphi_2(x')\,\psi(x) \end{aligned} \tag{5}$$

nach dem Euklid'schen Verfahren den grössten gemeinsamen Theiler in x. Hier bedeutet x' einen willkürlichen Werth. Wir bilden

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 Q_2 + f_3, \\ f_2 &= f_3 Q_3 + f_3, \\ &\cdots\cdots \\ f_{r-1} &= f_r Q_r \qquad \left(f_{r+1}(x, x') \equiv 0\right). \end{aligned} \tag{E_1}$$

Die $f_1, f_2, \ldots f_r;\ Q_2, Q_3, \ldots Q_r$ sind dabei ganz in x und rational

in x'; alle diese Functionen sollen bereits auf ihre kleinsten Nenner gebracht sein. So möge

$$f_r(x, x') = \frac{c_0(x') F_r(x, x')}{d(x')}$$

die Form von f_r werden, wobei die Coefficienten von $F_r(x, x')$ keinen gemeinsamen Theiler mehr besitzen. Dann ist

$$F_r(x, x') = c(x')x^n + c_1(x')x^{n-1} + c_2(x')x^{n-2} + \cdots + c_n(x')$$

der grösste gemeinsame Theiler von f_1, f_2 nach der Variablen x, und also, wenn μ_i eine passend gewählte ganze positive Zahl bedeutet

$$c(x')^{\mu_i} f_i(x, x') = F_r(x, x') \, T_i(x, x') \qquad (i = 1, 2).$$

Da jedoch F_r keinen, allen seinen Coefficienten gemeinsamen Theiler besitzt, so muss $c(x')^{\mu_i}$ in allen Coefficienten von T_i aufgehen; hebt man ihn fort, so ergiebt sich

$$(6) \qquad f_i(x, x') = F_r(x, x') \, U_i(x, x') \qquad (i = 1, 2),$$

wobei U_i wie F_r in x und x' ganz ist.

$F_r(x, x') = 0$ kann keine Doppelwurzeln $x = x_0$ besitzen, da dies sonst bei den beiden Functionen (5) und folglich bei (3) eintreten würde. Wir wollen die Wurzeln von $F_r = 0$ mit

$$(7) \qquad x = x', \; x_1', \; x_2', \ldots x_{n-1}'$$

bezeichnen. Das Auftreten von $x = x'$ ist klar.

Vertauscht man nun in (6) x mit x' und berücksichtigt (5), so entsteht

$$f_i(x, x') = - F_r(x', x) \, U_i(x', x) \qquad (i = 1, 2).$$

Hier haben $U_1(x', x)$, $U_2(x', x)$ keinen Theiler gemeinsam; denn sonst hätten auch $U_1(x, x')$, $U_2(x, x')$ einen solchen, und das widerspräche der Definition von $F_r(x, x')$. Folglich ist auch $F_r(x', x)$ grösster gemeinsamer Theiler von f_1, f_2; und da $F_r(x, x')$ keinen Factor hat, der nur von x' abhängt, so ist

$$F_r(x', x) = F_r(x, x') \cdot \text{const.}$$

Es steigt also auch $F_r(x', x)$ nach x' bis zum n^{ten} Grade auf, und folglich auch $F_r(x, x')$ nach x' bis zum gleichen Grade.

Bildet man nun

$$(8) \qquad \frac{F_r(x, x')}{c(x')} = x^n + \frac{c_1(x')}{c(x')} x^{n-1} + \frac{c_2(x')}{c(x')} x^{n-2} + \cdots$$
$$= (x - x')(x - x_1')(x - x_2') \ldots (x - x_{n-1}'),$$

so bleibt jeder Coefficient als symmetrische Function der Wurzeln bei jeder Vertauschung derselben untereinander ungeändert; d. h. es ist

$$(8a) \qquad \frac{c_\varkappa(x')}{c(x')} = \frac{c_\varkappa(x_1')}{c(x_1')} = \cdots = \frac{c_\varkappa(x_{n-1}')}{c(x_{n-1}')} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

so dass die Gleichungen

$$(9)\qquad c_\varkappa(x)\,c(x') - c_\varkappa(x')\,c(x) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

die Grössen (7) als Wurzeln besitzen. Da aber, wie wir bewiesen haben, $c(x)$ und alle $c_\varkappa(x)$ höchstens bis zum n^{ten} Grade aufsteigen, so ist eine jede der Gleichungen (9) entweder identisch erfüllt, oder die Grössen (7) liefern ihre sämmtlichen Wurzeln. Die erste Eventualität kann nicht für sämmtliche $\varkappa$ eintreten, da sonst alle $c_\varkappa(x)$ gleich $c(x)$ wären und also $F_r(x, x')$ einen von x unabhängigen Theiler hätte. Da nun (9) mit $F_r(x, x') = 0$ alle Wurzeln gemeinsam hat, so können sich beide Polynome höchstens durch einen von x' allein abhängigen Factor unterscheiden; bei passend gewähltem $\varkappa$ ist sonach

$$A(x')\,F_r(x, x') = c_\varkappa(x)\,c(x') - c_\varkappa(x')\,c(x).$$

Wandelt man hierin x in x' um und x' in x, so würde folgen, dass die rechte Seite von höherem als dem n^{ten} Grade in x ist, falls der Grad von A grösser ist als Null. Folglich hat man bis auf einen constanten Factor, den wir unterdrücken können,

$$(10)\qquad F_r(x, x') = c_\lambda(x)\,c(x') - c_\lambda(x')\,c(x),$$

wobei λ einer der Indices ist, für welche die rechte Seite nicht identisch verschwindet. Bezeichnen wir

$$\frac{c_\lambda(x')}{c(x')} = \lambda',$$

so folgt aus dem Vergleiche von (8) mit (10), dass sich jeder Coefficient aus (8) als lineare ganze Function von λ' ausdrücken lässt,

$$(11)\qquad \frac{c_\varkappa(x')}{c(x')} = d_\varkappa \cdot \lambda' + e_\varkappa,$$

wobei die $d_\varkappa$, $e_\varkappa$ weder x noch x' enthalten.

Jetzt bestimmen wir für ein willkürliches x' die beiden Grössen g_1', g_2' durch die Gleichungen

$$\frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')} = g_1', \qquad \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')} = g_2';$$

dann folgt aus dem Umstande, dass die Grössen (7) zu den Wurzeln von (2) gehören

$$g_1' = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')} + \frac{\varphi_1(x_1')}{\psi(x_1')} + \cdots + \frac{\varphi_1(x'_{n-1})}{\psi(x'_{n-1})}\right],$$

$$g_2' = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')} + \frac{\varphi_2(x_1')}{\psi(x_1')} + \cdots + \frac{\varphi_2(x'_{n-1})}{\psi(x'_{n-1})}\right],$$

und daraus, dass g_1', g_2' als symmetrische Functionen der Wurzeln von $F_r(x, x') = 0$ durch die Coefficienten von (8) und folglich wegen (11) durch λ' rational ausdrückbar sind, d. h. es ergiebt sich

$$(12)\qquad g_1 = R_1(\lambda), \quad g_2 = R_2(\lambda).$$

Die Unterdrückung der Accente soll andeuten, dass man von dem x' zu der Bezeichnung x übergegangen ist.

An den Euklid'schen Algorithmus knüpfen wir noch die folgende Bemerkung: $f_{r+1}(x, x')$ verschwindet für jeden Werth von x'. Es kann nun vorkommen, dass schon ein früheres $f_\alpha(x, x')$ für gewisse Werthe $x' = x_0'$ verschwindet, und zwar tritt dies stets dann und nur dann ein, wenn die sämmtlichen Coefficienten des f_α einen und denselben Factor $h_\alpha(x')$ besitzen, der durch $x' = x_0'$ zum Verschwinden gebracht wird. x_0' gehört dann zu den singulären Werthen von x', für welche die Gleichungen

$$f_1(x; x_0') = 0, \quad f_2(x; x_0') = 0$$

mehr als n gemeinsame Wurzeln besitzen.

Wir wenden jetzt das Euklid'sche Verfahren auf die beiden Ausdrücke

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \varphi_1(x) - \gamma_1 \psi(x), \\ \varphi_2(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \varphi_2(x) - \gamma_2 \psi(x) \end{aligned}$$

an, in denen x als Variable, γ_1, γ_2 als Parameter betrachtet werden sollen. Hierbei möge dann entstehen

$$(E_2)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 K_2 + \varphi_3, \\ \varphi_2 &= \varphi_3 K_3 + \varphi_4, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{r-1} &= \varphi_r K_r + \varphi_{r+1}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

alle φ und alle K sollen dabei ganz in x und rational in γ_1, γ_2 sein, und zwar derart, dass jede einzelne Function auf ihren kleinsten Nenner gebracht ist.

Wir vergleichen nun die beiden ersten Gleichungen der beiden Schemata (E_1) und (E_2)

$$f_1 = f_2 Q_2 + f_3$$

und

$$\varphi_1 = \varphi_2 K_2 + \varphi_3.$$

Setzen wir in die letzte

$$(14)\qquad \gamma_1 = \frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')}, \quad \gamma_2 = \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}$$

ein, so wird

$$\begin{aligned} \varphi_1(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \frac{f_1(x, x')}{\psi(x')}, \\ \varphi_2(x; \gamma_1, \gamma_2) &= \frac{f_2(x, x')}{\psi(x')} \end{aligned}$$

und also

$$f_1 = f_2 \cdot K_2(x;\, \gamma_1, \gamma_2) + \psi(x')\, \varphi_3(x;\, \gamma_1, \gamma_2),$$
$$f_2 \cdot \{Q_2(x, x') - K_2(x;\, \gamma_1, \gamma_2)\} + \{f_3(x, x') - \psi(x')\varphi_3(x;\, \gamma_1, \gamma_2)\} = 0.$$

Der Grad von f_2 nach x ist höher als der von f_3 und der von φ_3; darum muss jede der beiden Klammern verschwinden:

$$Q_2(x, x') = K_2(x;\, \gamma_1, \gamma_2),$$
$$f_3(x, x') = \psi(x')\, \varphi_3(x;\, \gamma_1, \gamma_2);$$

d. h. wenn man in den Functionen

$$K_2(x;\, \gamma_1, \gamma_2), \qquad \varphi_3(x;\, \gamma_1, \gamma_2)$$

die Substitution (14) macht, gehen sie in die Functionen

$$Q_2(x, x'), \qquad \frac{f_3(x, x')}{\psi(x')}$$

über. Mit Hülfe dieses Resultates folgt aus

$$f_2 = f_3 Q_3 + f_4, \qquad \varphi_2 = \varphi_3 K_3 + \varphi_4$$

das Entsprechende für

$$K_3,\ \varphi_4 \quad \text{und} \quad Q_3,\ \frac{f_4(x, x')}{\psi(x')}$$

u. s. f. und man erhält allgemein: die Functionen

$$K_\alpha(x;\, \gamma_1, \gamma_2), \quad \varphi_{\alpha+1}(x;\, \gamma_1, \gamma_2) \qquad (\alpha = 2, 3, 4, \ldots)$$

gehen durch die Substitutionen (14) in die Functionen

$$Q_\alpha(x, x'), \qquad \frac{f^{\alpha+1}(x, x')}{\psi(x')}$$

über. Insbesondere wird

$$\varphi_{r+1}\left(x;\, \frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')}, \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}\right) = \frac{f_{r+1}(x, x')}{\psi(x')} = 0 \tag{15}$$

werden. Aus diesem letzten Umstande folgt, dass in

$$\varphi_{r+1}(x;\, \gamma_1, \gamma_2) = \{t_0(\gamma_1, \gamma_2)x^\mu + t_1(\gamma_1, \gamma_2)x^{\mu-1} + \cdots\} : T(\gamma_1, \gamma_2)$$

alle Coefficienten $t_0, t_1, \ldots$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, der durch (14) identisch zu Null gemacht wird. Denn hätten sie keinen gemeinsamen Theiler, dann könnte man ganze Functionen

$$\tau_0(\gamma_1, \gamma_2), \quad \tau_1(\gamma_1, \gamma_2), \ldots$$

so bestimmen, dass

$$t_0(\gamma_1, \gamma_2)\, \tau_0(\gamma_1, \gamma_2) + t_1(\gamma_1, \gamma_2)\, \tau_1(\gamma_1, \gamma_2) + \cdots = u(\gamma_2)$$

eine ganze, nicht verschwindende Function von γ_2 allein würde. Dann würde also auch

$$u\left(\frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}\right) \equiv 0$$

sein, was nicht möglich ist, da das Argument unendlich viele Werthe annehmen kann. Den Factor, dessen Existenz hierdurch nachgewiesen

ist, der also für (14) identisch verschwindet, wollen wir mit $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ bezeichnen und

$$(16) \qquad \varphi_{r+1}(x;\, \gamma_1, \gamma_2) = \Phi(\gamma_1, \gamma_2)\, \overline{\varphi}_{r+1}(x;\, \gamma_1, \gamma_2)$$

setzen. Jeder irreducible Theiler von Φ gehört dann sicher der Eliminationsresultante von x für die Functionen (13) an.

Wäre umgekehrt $h(\gamma_1, \gamma_2)$ ein Factor der Resultante, und unterwerfen wir die Grössen γ_1', γ_2' lediglich der Bedingung $h(\gamma_1', \gamma_2') = 0$, dann besitzen

$$\varphi_1(x) - \gamma_1'\psi(x) = 0, \qquad \varphi_2(x) - \gamma_2'\psi(x) = 0$$

mindestens eine gemeinsame Wurzel ξ, und somit haben

$$\varphi_1(x)\,\psi(\xi) - \varphi_1(\xi)\,\psi(x) = f_1(x, \xi),$$
$$\varphi_2(x)\,\psi(\xi) - \varphi_2(\xi)\,\psi(x) = f_2(x, \xi)$$

einen gemeinsamen Theiler. Setzt man daher ξ statt x' in (E_1) ein, dann wird ein $f_\alpha(x, \xi)$ verschwinden. Für $\alpha \leqq r$ würde dies aber, wie wir gesehen haben, nur für eine endliche Anzahl von Werthen ξ möglich sein. Hier haben wir nun eine unendliche Zahl von γ_1', γ_2' und damit unendlich viele ξ; folglich kann nur $\alpha = r + 1$ sein, d. h. alle die unendlich vielen Lösungen von $h(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ befriedigen auch

$$\varphi_{r+1}(x;\, \gamma_1, \gamma_2) = 0,$$

d. h. nach (16) ist $h(\gamma_1, \gamma_2)$ ein Factor von $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$. Es stimmen also die Primfactoren von $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ mit denen der Resultante von (13) überein.

Gleichwohl braucht Φ nicht die Eliminationsresultante von (13) zu sein. So liefert das Lüroth'sche Beispiel

$$g_1 = \frac{(x^2+1)^2}{x^4 + 3x^2 + 1},$$
$$g_2 = \frac{x(x^2+1)}{x^4 + 3x^2 + 1}$$

als Resultante für (13) den Werth

$$(\gamma_1^2 + \gamma_1 - \gamma_2^2)^2,$$

während die Function $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$ gleich

$$(\gamma_1^2 + \gamma_1 - \gamma_2^2)^1$$

wird.

In (12) haben wir bewiesen, dass g_1 und g_2 rationale Functionen von λ sind. Aus dem obigen Resultate, dass $\varphi_r(x;\, \gamma_1, \gamma_2)$ durch (14) in $f_r(x, x') : \psi(x')$ übergeht, können wir umgekehrt den Schluss ziehen, dass λ eine rationale Function von g_1 und g_2 sei. In der That folgt aus

$$\varphi_r\left(x;\, \frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')}, \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}\right) = \frac{f_r(x, x')}{\psi(x')} = \frac{c_0(x')\,F_r(x, x')}{d(x')}$$
$$= \frac{c_0(x')}{d(x')}\,\{c(x')\,x^n + c_1(x')\,x^{n-1} + \cdots + c_n(x')\}$$

durch Vergleichung der Coefficienten, dass jeder

$$\frac{c_0(x')}{d(x')}c(x'),\ \frac{c_0(x')}{d(x')}c_1(x'),\ \ldots\ \frac{c_0(x')}{d(x')}c_n(x')$$

eine rationale Function der beiden Grössen

$$\frac{\varphi_1(x')}{\psi(x')}=g_1(x'),\qquad \frac{\varphi_2(x')}{\psi(x')}=g_2(x')$$

wird. Dasselbe findet daher auch für den Quotienten

$$\frac{c_0(x')}{d(x')}c_2(x'):\frac{c_0(x')}{d(x')}c(x')=\lambda'$$

statt, d. h. wir haben

$$(16)\qquad \begin{aligned}\lambda' &= R\big(g_1(x'),\ g_2(x')\big),\\ \lambda &= R(g_1, g_2).\end{aligned}$$

Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen. *Man kann also, wenn zwei beliebige Functionen*

$$g_1=\frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)},\qquad g_2=\frac{\varphi_2(x)}{\psi(x)}$$

gegeben sind, eine rational aus g_1, g_2 gebildete Grösse

$$\lambda=R(g_1, g_2)$$

finden, durch welche umgekehrt g_1 und g_2 vermittels

$$g_1=R_1(\lambda),\qquad g_2=R_2(\lambda)$$

rational ausgedrückt werden können.

Wir wollen nun annehmen, dass in den Coefficienten von φ_1, φ_2, ψ in (1) noch beliebig viele Parameter $y, z, \ldots$ vorkommen. Dagegen soll die Eliminationsresultante von x aus den beiden Gleichungen (1) nur von g_1, g_2, jedoch nicht von y, z, ... abhängig sein, oder mit anderen Worten, g_1 und g_2 sollen einer rationalen Gleichung genügen, deren Coefficienten von $x, y, z, \ldots$ unabhängig sind.

Es sei also

$$(17)\qquad g_1=\frac{\varphi_1(x,y,\ldots)}{\psi(x,y,\ldots)},\quad g_2=\frac{\varphi_2(x,y,\ldots)}{\psi(x,y,\ldots)}$$

und $\Phi(g_1, g_2)$ die Eliminationsresultante nach x, welche von $y,\ldots$ frei ist. Unter $a, b, \ldots$ verstehen wir jetzt willkürliche Constanten, setzen

$$\mathfrak{g}_1=\frac{\varphi_1(\xi, a,\ldots)}{\psi(\xi, a,\ldots)},\quad \mathfrak{g}_2=\frac{\varphi_2(\xi, a,\ldots)}{\psi(\xi, a,\ldots)}$$

und fragen nach den Werthepaaren $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi, a,\ldots)-\mathfrak{g}_1\psi(\xi, a,\ldots)&=0,\\ \varphi_2(\xi, a,\ldots)-\mathfrak{g}_2\psi(\xi, a,\ldots)&=0\end{aligned}$$

eine gemeinsame Wurzel ξ besitzen. Die Elimination von ξ liefert $\Psi(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, und da $\mathfrak{g}_1 = g_1$, $\mathfrak{g}_2 = g_2$ die Function Ψ zum Verschwinden bringt, so giebt es für $\mathfrak{g}_1 = g_1$, $\mathfrak{g}_2 = g_2$ eine gemeinsame Wurzel ξ. Man kann deshalb

$$\frac{\varphi_1(x, y, \ldots)}{\psi(x, y, \ldots)} = \frac{\varphi_1(\xi, a, \ldots)}{\psi(\xi, a, \ldots)}, \qquad \frac{\varphi_2(x, y, \ldots)}{\psi(x, y, \ldots)} = \frac{\varphi_2(\xi, a, \ldots)}{\psi(\xi, a, \ldots)}$$

setzen und kommt dadurch auf die Voraussetzungen des Lüroth'schen Satzes zurück.

Wenn also die Functionen

$$g_1 = \frac{\varphi_1(x, y, z, \ldots)}{\psi(x, y, z, \ldots)}, \qquad g_2 = \frac{\varphi_2(x, y, z, \ldots)}{\psi(x, y, z, \ldots)}$$

einer von $x, y, z, \ldots$ unabhängigen Gleichung

$$\Phi(g_1, g_2) = 0$$

genügen, dann kann man eine rational aus g_1, g_2 gebildete Grösse

$$\lambda = R(g_1, g_2)$$

finden, durch welche umgekehrt g_1 und g_2 vermittels

$$g_1 = R_1(\lambda), \qquad g_2 = R_2(\lambda)$$

rational ausgedrückt werden können.

Giessen, den 9. Februar 1895.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft Leipzig im März 1895).

Für das Jahr 1898.

Da die von Poisson, Green, Gauss, Dirichlet u. A. gegebene Theorie der dem Newton'schen Gesetze entsprechenden Kräfte einen der wichtigsten Theile der ganzen mathematischen Physik repräsentirt, andererseits aber die absolute Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes (namentlich für sehr kleine und für sehr grosse Entfernungen) mancherlei Bedenken ausgesetzt ist, so liegt der Gedanke nahe, die Theorie der Fernwirkungen in grösserer Allgemeinheit zu entwickeln und dabei, neben dem Newton'schen, auch andere Gesetze der Fernwirkung in Betracht zu ziehen.

Ein solcher Versuch ist schon im Jahre 1832 von Green gemacht worden in seinen Mathematical Investigations concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid*). Statt der Newton'schen Kräfte vom Gesetze $\frac{1}{r^2}$ werden dort ganz allgemein Kräfte vom Gesetze $\frac{1}{r^n}$ in Betracht gezogen. Doch zeigen sich in jener ebenso wichtigen wie scharfsinnigen Abhandlung mancherlei Lücken und Unklarheiten, auf welche Green zum Theil schon selbst aufmerksam gemacht hat. Auch sind daselbst gewisse Aufgaben (wie z. B. die Aufgabe der elektrischen Vertheilung in einem Ellipsoid oder in einer Kreisscheibe) nur ganz beiläufig besprochen worden. Demgemäss wünscht die Gesellschaft

> eine wirkliche Lösung dieser von Green in seiner Abhandlung nur angedeuteten Aufgaben, so wie auch die Ausfüllung und Aufklärung der in der genannten Schrift vorhandenen Lücken und Dunkelheiten.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer

*) Transactions of the Cambridge Philos. Society 1833, wieder abgedruckt in den Mathematical Papers of G. Green, p. 117—183.

andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Bildung zusammengesetzter Gruppen.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

Will man die Gruppen bilden, die aus einer endlichen Zahl von Operationen bestehen, so kann man zuerst die einfachen Gruppen bestimmen und dann die zusammengesetzten Gruppen aus ihren einfachen Bestandtheilen aufbauen. Der Aufbau einer zusammengesetzten Gruppe G wird durch eine Reihe der Zusammensetzung

$$G, H, K, L, \ldots 1$$

charakterisirt. Hier bedeutet z. B. K eine ausgezeichnete Untergruppe von H, und es soll nicht möglich sein, eine von H und K verschiedene Gruppe zu finden, die K umfasst und in H ausgezeichnet enthalten ist, d. h. es soll K eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe von G sein. So ist in der Reihe der Zusammensetzung jede Gruppe ausgezeichnete Maximaluntergruppe der vorhergehenden. Es sind nun durch die Reihe der Zusammensetzung gewisse Gruppen

$$G|H, H|K, \ldots$$

völlig bestimmt*), welche ich als Factorgruppen von G bezeichne. Trotzdem dieselbe Gruppe G mehrere Reihen der Zusammensetzung zulassen kann, ist doch die Gesammtheit ihrer Factorgruppen eine völlig bestimmte. Man kann jetzt durch Umkehrung der soeben angestellten Betrachtung die Aufgabe formuliren, eine Gruppe zu bilden, welche gegebene Factorgruppen hat. Diese Aufgabe lässt vielfach mehrere Lösungen zu. Die Factorgruppen sind stets einfache Gruppen. Es genügt häufig, statt der Factorgruppen die Ordnungen der Factorgruppen, also blosse Zahlen anzugeben. Die Angabe dieser Zahlen leistet dasselbe wie die Angabe der Factorgruppen, wenn man weiss, dass jede dieser Zahlen nur einer einzigen einfachen Gruppe als Ordnung angehört. Die Ordnungen der Factorgruppen einer Gruppe G

*) Vergl. Mathematische Annalen Bd. 34, p. 31 und C. Jordan, Bulletin de la société mathématique de France. T. I, 1873, p. 46.

sind das, was Herr C. Jordan die Factoren der Zusammensetzung der Gruppe G nennt.

Um nun die Gruppe G aus ihren Factorgruppen zu bilden, hat man die Reihe der Zusammensetzung von ihrem rechten Ende her zu construiren. Man hat dabei mehrmals das Problem zu lösen: *eine Gruppe Δ zu bilden, welche eine gegebene Gruppe Γ auf die Weise ausgezeichnet enthält, dass zugleich $\Delta \mid \Gamma$ mit einer gegebenen Gruppe übereinstimmt.* Bei der Anwendung auf die Reihe der Zusammensetzung ist jedesmal $\Delta \mid \Gamma$ eine einfache Gruppe. Die vorliegende Arbeit enthält nun die Lösung des eben genannten Problems für eine Reihe specieller Fälle, wobei $\Delta \mid \Gamma$ theils als einfache, theils als zusammengesetzte Gruppe angenommen ist. Es ist eine Eintheilung des Ganzen in Abschnitte vorgenommen worden, so dass in jedem der Abschnitte, vom zweiten bis zum elften, eine andere Gruppe die Rolle der gegebenen Gruppe Γ spielt. Dabei wird Γ der Reihe nach angenommen als alternirende Gruppe, als Gruppe der Modulargleichung, cyklische Gruppe, nichtcyklische Gruppe der Ordnung p^2, metacyklische Gruppe u. s. w.

Es ist noch zu bemerken, dass die Gruppe $\Delta \mid \Gamma$ einfach ist oder nicht, je nachdem die ausgezeichnete Untergruppe Γ der Gruppe Δ ausgezeichnete Maximaluntergruppe ist oder nicht; die Ordnung der Gruppe $\Delta \mid \Gamma$ ist zugleich der Index, welcher der Gruppe Γ als Untergruppe von Δ zukommt. Wird nun etwa verlangt, dass Γ eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe der Gruppe Δ ist und den Index 60 besitzt, so heisst dies, dass $\Delta \mid \Gamma$ einfach und von der 60^ten^ Ordnung sein soll. Nun giebt es aber nur eine einfache Gruppe 60^ter^ Ordnung, wesshalb $\Delta \mid \Gamma$ mit der Ikosaedergruppe übereinstimmen muss. So kann z. B. die Aufgabe, eine Gruppe zu bestimmen, welche eine cyklische Gruppe m^{ter} Ordnung als ausgezeichnete Maximaluntergruppe vom Index 60 enthält, auch so ausgedrückt werden: Es ist eine Gruppe Δ zu bilden, die mit der Ikosaedergruppe so meroedrisch isomorph ist, dass jeder Operation von Δ eine Operation der Ikosaedergruppe und der identischen Operation der letzteren eine cyklische Untergruppe m^{ter} Ordnung in der Gruppe Δ entspricht. Diese Aufgabe ist im vierten Abschnitte von § 13 bis § 17 behandelt.

Die Aufgabe der Bestimmung einer Gruppe aus ihren Factorgruppen konnte auch für verschiedene Fälle gelöst werden. Die Fälle, in denen die Factoren der Zusammensetzung zwei oder drei Primzahlen oder vier gleiche Primzahlen sind, sind bereits völlig erledigt*). Ich

*) Vergl. Netto: Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra 1882, p. 133; Young: On the determination of groups whose order is a power of a prime American Journal of Mathematics Vol. XV; Cole and Glover: On groups whose orders are products of three prime factors, Am. Journ. Vol. XV;

gebe im letzten Abschnitt dieser Arbeit noch alle Gruppen, deren Factoren der Zusammensetzung in irgend einer Ordnung mit den Zahlsystemen

$$60, p;\quad 168, p;\quad 60, p, p;\quad 60, p, q;$$
$$168, p, p;\quad 168, p, q;\quad 60, 60, 2$$

übereinstimmen; dabei bedeuten p und q Primzahlen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Hilfsmittel.

§ 1.

Das Grundproblem im Fall einer vollkommenen Untergruppe.

Es ist schon in der Einleitung das fundamentale Problem genannt worden, das in der Bildung einer Gruppe Δ besteht, von der eine ausgezeichnete Untergruppe Γ bekannt ist. Einige zur Lösung dieser Aufgabe dienende Mittel habe ich im 43ten Band dieser Annalen p. 313 ff. entwickelt. Denkt man sich die Gruppe Δ zunächst einmal schon hergestellt, und sind $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ die Operationen der ausgezeichneten Untergruppe Γ, so kann man die Operationen $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$ aus Δ so aussuchen, dass unter den Producten

---

Hölder: Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4, Mathematische Annalen Bd. 43. Hinsichtlich des Zeitverhältnisses der letzten drei Arbeiten bemerke ich, dass die meinige bereits an die Redaction eingesandt war, als die beiden Abhandlungen im Aprilhefte und Julihefte des American Journal (1893) erschienen. Die Untersuchung der Herren Cole und Glover ist in den Beweisen nicht vollständig, auch ist die Zahl der verschiedenen vorhandenen Gruppen nicht immer richtig bestimmt. Als Beispiel mögen gewisse Gruppen der Ordnung pq^2 dienen. Es giebt, wenn $q-1$ durch p theilbar ist, p und q als Primzahlen vorausgesetzt, gewisse besondere Gruppen, die durch die Relationen

$$S^p = 1,\; S^{-1} T_1 S = T_1^{\varrho},\; S^{-1} T_2 S = T_2^{\varrho^{\mu}},\; T_1^q = T_2^q = 1,\; T_1 T_2 = T_2 T_1$$

definirt werden können. Dabei bedeutet ϱ eine Zahl, die mod q zum Exponenten p gehört und μ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots p-1$. Diese Gruppen sind von den Herren Cole und Glover aufgefunden und in ganz entsprechender Weise dargestellt worden. Sie gehen dabei von der Voraussetzung der Existenz der Gruppen aus, leiten daraus die Relationen ab und zeigen hinterher die Erfüllbarkeit solcher Relationen an einem Zahlenbeispiele. Dass aber die gewonnenen Relationen unter den über p, q, ϱ und μ gemachten Annahmen stets eine Gruppe der Ordnung pq^2 definiren, wird von ihnen nicht gezeigt. Ausserdem ist die Anzahl der in den Relationen enthaltenen Gruppen für $p > 2$ gleich zwei angegeben (β_5 und β_6 vergl. a. a. O. S. 206 und S. 207); diese Anzahl ist aber für eine ungerade Primzahl p gleich $\frac{p+1}{2}$.

$$(1) \qquad S_a T_\alpha \qquad \begin{pmatrix} a=0,1,2,\ldots m-1 \\ \alpha=0,1,2,\ldots n-1 \end{pmatrix}$$

jede Operation der Gruppe Δ gerade einmal vorkommt. Dabei kann die Wahl der Operationen S noch insofern abgeändert werden, als man statt S_a stets eine der n Operationen $S_a T_\beta$ ($\beta=0,1,2,\ldots n-1$) einführen kann.

Jede Operation T giebt, wenn sie mit einer Operation S transformirt wird, wieder eine Operation T, d. h. es ist

$$S_a^{-1} T_\alpha S_a = T_{\omega(\alpha,a)}.$$

Somit ergiebt sich durch Transformation mit der Operation S_a ein Isomorphismus der Gruppe Γ in sich, der durch die Formel

$$\begin{pmatrix} T_\alpha \\ T_{\omega(\alpha,a)} \end{pmatrix}$$

ausgedrückt ist. Ich unterscheide cogrediente und contragrediente Isomorphismen. *Ein Isomorphismus der Gruppe Γ in sich ist cogredient, wenn er durch Transformation mit einer der Gruppe Γ selbst angehörigen Operation erzeugt werden kann; im anderen Fall ist der Isomorphismus contragredient.*

Nun kann es vorkommen, wie wir später in einigen Beispielen sehen werden, dass die Gruppe Γ nur cogrediente Isomorphismen zulässt. Wir wollen einmal unter dieser speciellen Voraussetzung das Grundproblem verfolgen. In diesem Fall wird der Isomorphismus der Gruppe Γ in sich, der durch Transformation mit S_a entsteht, auch durch Transformation mit einer Operation T_{β_a} entstehen. Führt man nun

$$S_a' = S_a T_{\beta_a}^{-1}$$

an Stelle von S_a ein, so wird Γ, mit S_a' transformirt, den identischen Isomorphismus ergeben*), d. h. es wird S_a' jede der Operationen T in sich transformiren. Für jede Operation S kann nun so, wenn nöthig, eine neue Operation eingeführt werden. Bezeichnet man nun diese neuen Operationen wieder mit $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$, so werden die Ausdrücke

$$S_a T_\alpha$$

wie früher jede Operation von Δ einmal ergeben, es werden aber zugleich die Relationen

$$T_\alpha S_a = S_a T_\alpha$$

bestehen.

Nun ist $S_a S_b$ auch eine Operation von Δ, somit

$$(2) \qquad S_a S_b = S_{\varphi(a,b)} T_{\psi(a,b)}.$$

*) Hinsichtlich der Zusammensetzung von Isomorphismen vgl. man Annalen Bd. 43, p. 313 und 314.

Im vorliegenden Fall sind S_a, S_b, $S_{\varphi(a,b)}$ mit den sämmtlichen Operationen T vertauschbar; es folgt daher aus der Gleichung (2), dass dasselbe von $T_{\psi(a,b)}$ gilt. Es ist $T_{\psi(a,b)}$ eine in der Gruppe Γ ausgezeichnete Operation. Jetzt unterwerfen wir die Gruppe Γ noch der Voraussetzung, dass sie ausser der Identität keine ausgezeichnete Operation enthält. Es ist dann

$$T_{\psi(a,b)} = 1.$$

Vergleicht man nun dieses Resultat wieder mit der Gleichung (2), so zeigt sich, dass die Operationen S eine Gruppe bilden. Da ausserdem die Operationen S mit den Operationen T vertauschbar und die Ausdrücke (1) verschieden sind, so ist die Gruppe Δ gleich dem directen Product*) der Gruppe der Operationen T und der Gruppe der Operationen S. Es entsteht also in diesem Fall die Gruppe Δ durch eine triviale Combination der Gruppe Γ mit einer andern Gruppe; wir wollen dies dadurch ausdrücken, dass wir sagen, die Gruppe Γ *spalte* sich von der Gruppe Δ *ab*. Zum Zweck einer bequemeren Ausdrucksweise mache ich noch die folgende Festsetzung:

Definition. *Eine Gruppe, die nur cogrediente Isomorphismen in sich zulässt und keine ausgezeichnete Operation, ausser der identischen, besitzt, heisst vollkommen.*

Mit Rücksicht auf diese Definition lässt sich das Ergebniss des vorliegenden Paragraphen so ausdrücken:

Lehrsatz I. *Eine vollkommene Gruppe spaltet sich von jeder Gruppe ab, in der sie ausgezeichnet enthalten ist.*

§ 2.

Weitere Behandlung der Grundaufgabe.

Ich will jetzt zulassen, dass die Gruppe Γ auch contragrediente Isomorphismen in sich besitzen kann. Es muss nun eine genauere Eintheilung der Isomorphismen eingeführt werden. Es sei J irgend ein Isomorphismus und C ein cogredienter Isomorphismus:

$$J = \begin{pmatrix} T_\alpha \\ T_{\omega(\alpha)} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} T_\alpha \\ T_\beta^{-1} T_\alpha T_\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

Man bilde $J^{-1}CJ$. Zu diesem Zweck hat man, da J und T Substitutionen der Elemente $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ sind, nur die Substitution J in dem Ausdruck der Substitution C auszuführen. Die Substitution J setzt aber $T_{\omega(\alpha)}$ an Stelle von T_α und $T_{\omega(\beta)}$ an Stelle von T_β und, da sie einen Isomorphismus von Γ in sich repräsentirt, auch $T_{\omega(\beta)}^{-1} T_{\omega(\alpha)} T_{\omega(\beta)}$ an Stelle von $T_\beta^{-1} T_\alpha T_\beta$. Man erhält somit

*) Vergl. Math. Annalen Bd. 43; p. 330.

(3) $$J^{-1}CJ = \begin{pmatrix} T_{\omega(\alpha)} \\ T^{-1}_{\omega(\beta)}\, T_{\omega(\alpha)}\, T_{\omega(\beta)} \end{pmatrix}.$$

Es ist also der Isomorphismus $J^{-1}CJ$ derjenige, der durch Transformation der Gruppe Γ mit der Operation $T_{\omega(\beta)}$ entsteht. Es ist deshalb ein Isomorphismenproduct von der Form

$$J^{-1}CJ = C'$$

cogredient. *Die Gruppe der cogredienten Isomorphismen ist in der Gruppe aller Isomorphismen ausgezeichnet enthalten.*

Nun lassen die Operationen jeder Gruppe in Beziehung auf eine in dieser ausgezeichnete Untergruppe eine Eintheilung zu*). Wir werden also jetzt auf Grund des soeben gewonnenen Satzes *die Isomorphismen der Gruppe* Γ *in Classen eintheilen.* Zwei Isomorphismen J und J' sollen in dieselbe Classe gehören, wenn

$$J^{-1}J'$$

cogredient ist. Die Zusammensetzung der Isomorphismen geht dann classenweise vor sich, so dass man unmittelbar die Isomorphismenclassen als multiplicirbare Operationen betrachten kann. Alle Classen enthalten dabei gleich viele Isomorphismen; die identische Classe besteht aus den cogredienten Isomorphismen.

Jetzt fassen wir die Gruppe Γ, die soeben für sich betrachtet wurde, wieder als ausgezeichnete Untergruppe einer Gruppe Δ auf. Die Gruppe Δ führt auf die Gruppe $\Delta|\Gamma$, wenn man solche Operationen von Δ als äquivalent betrachtet, die sich nur um einen Factor T unterscheiden. Es ist also eine Operation U_a der Gruppe $\Delta|\Gamma$ durch n Operationen

$$S_a T_\beta \qquad (\beta = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

der Gruppe Δ repräsentirt. Diese n Operationen transformiren die Gruppe Γ auf n Arten in sich. Bezeichnet man nun die Isomorphismen der Gruppe Γ, die durch Transformation mit S_a und mit T_β entstehen, mit J_a und mit C_β, so liefert die Transformation mit den n Operationen $S_a T_\beta$ die n Isomorphismen

$$J_a C_\beta \qquad (\beta = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

welche in dieselbe Classe gehören. Somit entspricht einer Operation U_a der Gruppe $\Delta|\Gamma$ eine einzige Classe von Isomorphismen der Gruppe Γ in sich. Diejenigen Isomorphismenclassen der Gruppe Γ, welche auf diese Weise, d. h. durch Transformation mit Operationen der Gruppe Δ erhalten werden, bilden eine Gruppe Λ. Zwischen dieser Gruppe und der Gruppe $\Delta|\Gamma$ besteht die Beziehung, dass jeder Operation der Gruppe $\Delta|\Gamma$ eine Operation von Λ, einer Operation von Λ möglicherweise mehrere Operationen von $\Delta|\Gamma$ entsprechen. Dabei setzen

*) Vergl. Annalen Bd. 34, p. 31 u. 32.

sich entsprechende Operationen entsprechend zusammen, und es gehören jedenfalls zu je zwei Operationen von Λ gleich viele Operationen von $\Delta|\Gamma$. Diejenigen Operationen der Gruppe $\Delta|\Gamma$, die der Identität der Gruppe Λ entsprechen, machen eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe $\Delta|\Gamma$ aus*).

§ 3.

Specialisirungen.

Die Untersuchung soll nun unter der Voraussetzung fortgeführt werden, dass die Gruppe $\Delta|\Gamma$ einfach ist. Es können jetzt nur die zwei folgenden Fälle eintreten. Entweder entsprechen alle Operationen der Gruppe $\Delta|\Gamma$ der Identität der Gruppe Λ, oder es entspricht dieser Identität nur die identische Operation der Gruppe $\Delta|\Gamma$. Im ersten Fall entsprechen alle Operationen von $\Delta|\Gamma$ der identischen Isomorphismenclasse, d. h. es wird Γ durch jede Operation der Gruppe Δ in cogredienter Weise in sich transformirt. Man kann dann die m Operationen $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$ wiederum (wie in § 1) so auslesen, dass sie mit den Operationen T vertauschbar sind. Nimmt man nun noch an, dass die Identität die einzige ausgezeichnete Operation der Gruppe Γ sein soll, so folgt aus den Gleichungen

$$T_a S_a = S_a T_a,$$
$$S_a S_b = S_{\varphi(a,b)} T_{\psi(a,b)},$$

gerade so wie im ersten Paragraphen, dass die Operationen S eine Gruppe bilden. Die Gruppe Δ erscheint nun als directes Product von Γ und $\Delta|\Gamma$, d. h. es spaltet sich die Gruppe Γ aus der Gruppe Δ ab.

In dem zweiten der genannten Fälle besteht zwischen den Operationen der Gruppe Λ, d. h. zwischen den Isomorphismenclassen und den Operationen der Gruppe $\Delta|\Gamma$ ein wechselseitig eindeutiges Entsprechen. Nimmt man ausserdem wiederum an, dass die Gruppe Γ ausser der Identität keine ausgezeichnete Operation enthält, so kann gezeigt werden, dass auch die Isomorphismen selbst, die in Betracht kommen, und die Operationen der Gruppe Δ sich eindeutig entsprechen. Wir haben zu diesem Zwecke nur zu beweisen, dass zwei verschiedene Operationen

$$S_a T_\alpha, \quad S_{a'} T_{\alpha'}$$

von Δ die Gruppe Γ in verschiedener Weise in sich transformiren. Sind nun zunächst a und a' verschieden, so gehören die durch Trans-

---

*) Cf. Camille Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, 1870, p. 56.

formation mit diesen beiden Operationen erhaltenen Isomorphismen sogar in verschiedene Classen. Ist $a = a'$, so kann man

$$S_{a'} T_{a'} = (S_a T_a) T_\beta$$

setzen, wobei T_β als von der Identität verschieden anzunehmen ist. Da nun die Operation T_β in der Gruppe Γ nicht ausgezeichnet enthalten ist, so ergiebt die Transformation mit T_β einen nichtidentischen Isomorphismus und die Transformationen mit $S_a T_a$ und $(S_a T_a) T_\beta$ oder $S_{a'} T_{a'}$ ergeben Verschiedenes. Es entsprechen somit verschiedenen Operationen der Gruppe Δ verschiedene Isomorphismen der Gruppe Γ in sich. Die Gruppe Δ kann deshalb durch eine Gruppe solcher Isomorphismen dargestellt werden. Diese Gruppe fasst die cogredienten Isomorphismen alle in sich.

Unter Umständen kann man leicht erkennen, welcher der genannten Fälle eintritt. Es sei jetzt $\Delta | \Gamma$ eine einfache Gruppe mit zusammengesetzter Ordnungszahl. In einer solchen giebt es stets Operationen, die nicht mit einander vertauscht werden können; denn alle Gruppen vertauschbarer Operationen sind zusammengesetzt, wenn sie nicht cyklisch und von Primzahlordnung sind. Von den Isomorphismen der Gruppe Γ wollen wir annehmen, dass ihre Classen, als Operationen betrachtet, mit einander vertauschbar sind; dann ist offenbar ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen den Operationen der Gruppe $\Delta | \Gamma$ und den Isomorphismenclassen, d. h. den Operationen der Gruppe Λ unmöglich, es kann also der zweite Fall nicht eintreten. Es wird somit Γ durch alle Operationen von Δ cogredient transformirt. Dabei kann Γ eine nichtidentische ausgezeichnete Operation enthalten oder nicht.

Macht man andererseits nur die Voraussetzungen, dass Γ bloss die identische Operation ausgezeichnet enthält, und dass $\Delta | \Gamma$ irgend eine einfache Gruppe ist, so können noch beide Fälle eintreten. Je nachdem nun der erste oder der zweite Fall eintritt, wird entweder die Gruppe Γ sich von Δ abspalten, oder es wird Δ durch eine Isomorphismengruppe repräsentirt.

Demnach kann man zwei Sätze formuliren:

Satz II. *Wenn die Gruppe Δ eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe Γ von zusammengesetztem Index enthält, und je zwei Isomorphismenclassen der Gruppe Γ vertauschbar sind, so wird Γ durch alle Operationen von Δ in cogredienter Weise in sich transformirt.*

III. *Wenn die ausgezeichnete Maximaluntergruppe Γ einer Gruppe Δ keine ausgezeichnete Operation, ausser der identischen, besitzt, so spaltet sich die Gruppe Γ von Δ ab, oder es wird die Gruppe Δ durch eine Gruppe von Isomorphismen von Γ exact repräsentirt. Unter diesen Isomorphismen kommen dann die cogredienten sämmtlich vor.*

§ 4.

Verschiedenartigkeit gewisser Untergruppen.

Die Anwendungen des letzten Satzes machen noch einige Betrachtungen nothwendig. Es sei Γ eine Gruppe, in der nur die identische Operation ausgezeichnet ist, L sei die Gesammtheit der Isomorphismen der Gruppe Γ in sich und N die Gesammtheit der cogredienten Isomorphismen. Jede Operation von Γ erzeugt einen cogredienten Isomorphismus, und, da nur die identische Operation von Γ den identischen Isomorphismus erzeugt, so entsprechen sich die Operationen von Γ und N ein-eindeutig. Ist nun J irgend ein Isomorphismus der Gruppe Γ in sich,

$$J = \begin{pmatrix} T_\alpha \\ T_{\omega(\alpha)} \end{pmatrix},$$

und C_k der durch Transformation mit T_k entstehende cogrediente Isomorphismus, so ist (vergl. (3) in § 2)

$$J^{-1} C_k J = \begin{pmatrix} T_{\omega(\alpha)} \\ T_{\omega(k)}^{-1} T_{\omega(\alpha)} T_{\omega(k)} \end{pmatrix},$$

d. h. also

$$J^{-1} C_k J = C_{\omega(k)}.$$

Durch die Transformation der Operationen $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$ mit der Operation J werden also die Indices genau ebenso permutirt, wie die Indices der Elemente $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ im Ausdruck der Substitution J selbst permutirt erscheinen. Es ist demnach auch unter den Isomorphismen L, abgesehen von dem identischen, keiner, der mit allen cogredienten Isomorphismen $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$ vertauschbar wäre. In der Gruppe L sind die sämmtlichen Isomorphismen J der Gruppe Γ in sich enthalten, und diese ergeben, wenn man $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$ mit ihnen transformirt, die sämmtlichen Isomorphismen

$$\begin{pmatrix} C_\alpha \\ C_{\omega(\alpha)} \end{pmatrix}$$

der Gruppe N in sich; denn die Gruppe N der Operationen C ist mit der Gruppe Γ der Operationen T holoedrisch isomorph.

Sieht man jetzt von der Bedeutung ab, die den Operationen von L als Isomorphismen in Beziehung auf die ursprünglichen Operationen T zukommt, so liegt Folgendes vor. Eine Gruppe L besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe N; es ist keine Operation von L, ausser der identischen, mit allen Operationen von N vertauschbar, und es werden alle Isomorphismen der Gruppe N in sich durch Transformation mit den Operationen der umfassenderen Gruppe L erhalten. In den An-

wendungen des letzten Satzes von § 3 sind nun die Untergruppen von L, welche die Gruppe N enthalten, zu untersuchen; es fragt sich, unter welchen Umständen zwei solche Untergruppen holoedrisch isomorph sind. Diese Untersuchung wird unter der beschränkenden Voraussetzung geführt werden, dass L ausser N keine mit N holoedrisch isomorphe Untergruppe besitzt. Nun seien M und M' zwei Untergruppen von L, welche die Gruppe N in sich enthalten. Angenommen, es sei ein bestimmter holoedrischer Isomorphismus zwischen M und M' vorhanden, so wird der Gruppe N, sofern sie Untergruppe von M ist, in der Gruppe M' eine mit N holoedrisch isomorphe Gruppe entsprechen; diese muss aber wegen der gemachten Voraussetzung mit N zusammenfallen. Vermöge der zwischen den Operationen von M und von M' bestehenden Zuordnung ist also eine Zuordnung der Operationen C von N zu den Operationen C, d. h. ein Isomorphismus der Gruppe N in sich gegeben. Dieser Isomorphismus muss aber in unserem Fall durch Transformation der Gruppe N mit einer Operation U der Gruppe L erhalten werden können. Es ist also

(4) $$U^{-1} C_k U = C_{\omega(k)} \qquad (k=0, 1, 2, \dots n-1),$$

wenn der Operation C_k von M in M' die Operation $C_{\omega(k)}$ entspricht.

Nun sei V eine beliebige Operation der Gruppe M und V' die dem V vermöge jenes bestimmten Isomorphismus entsprechende Operation von M'. Wenn nun

(5) $$V^{-1} C_k V = C_h$$

ist, so ist wegen des Isomorphismus auch

(6) $$V'^{-1} C_{\omega(k)} V' = C_{\omega(h)}.$$

Aus der Gleichung (5) erhält man aber unmittelbar

$$U^{-1} V^{-1} U U^{-1} C_k U U^{-1} V U = U^{-1} C_h U$$

oder

$$(U^{-1} V U)^{-1} (U^{-1} C_k U) (U^{-1} V U) = U^{-1} C_h U,$$

d. h. mit Rücksicht auf (4):

(7) $$(U^{-1} V U)^{-1} C_{\omega(k)} (U^{-1} V U) = C_{\omega(h)}.$$

In den letzten Gleichungen kann k alle Werthe von $0, 1, 2, \dots n-1$ durchlaufen, wobei zugleich h, $\omega(k)$, $\omega(h)$ dieselben Werthe nur in anderer Ordnung durchlaufen. Nun ergiebt der Vergleich der Relationen (6) und (7), dass die Operationen V' und $U^{-1} V U$ die Gruppe N in gleicher Weise in sich transformiren. Die Operation

$$(U^{-1} V U) V'^{-1}$$

der Gruppe L ist also mit allen Operationen C der Gruppe N vertauschbar und deshalb der Identität gleich. Somit ist

$$V' = U^{-1} V U.$$

Dasselbe gilt nun für jede Operation V der Gruppe M und die ihr zugeordnete V' in der Gruppe M'; die Operation U der Gruppe L ist dabei dieselbe. Diese Operation transformirt die Gruppe M in M'. Es sind also die Gruppen M und M' innerhalb der Gruppe L gleichberechtigt. Man sieht ausserdem, dass man jede holoedrisch isomorphe Beziehung, die zwischen M und M' möglich ist, dadurch herstellen kann, dass man M mit einer geeigneten Operation U von L transformirt. Das letzte Ergebniss ist auch in dem Fall noch von Bedeutung, dass M und M' miteinander und mit L zusammenfallen. Man sieht in diesem Fall, dass jeder Isomorphismus der Gruppe L in sich durch Transformation mit einer in L enthaltenen Operation erzielt werden kann. Da die Gruppe L ferner keine nichtidentische Operation besitzt, die auch nur mit jeder Operation C vertauschbar wäre, so ist L eine vollkommene Gruppe.

Man kann jetzt den folgenden Lehrsatz formuliren:

Lehrsatz IV. *Wenn die Gruppe L die Gruppe N auf ausgezeichnete Weise und ausserdem keine mit N holoedrisch isomorphe Untergruppe enthält, wenn L keine mit allen Operationen von N vertauschbare Operation, ausser der identischen, enthält, und alle Isomorphismen der Gruppe N in sich durch Transformation vermittelst der Operationen von L erhalten werden, so können zwei Untergruppen von L, welche beide die Gruppe N umfassen, nur dann holoedrisch isomorph sein, wenn sie in L gleichberechtigt sind. Die Gruppe L ist unter diesen Voraussetzungen eine vollkommene Gruppe.*

Es lässt sich auch noch Folgendes beweisen:

Zusatz. *Eine solche Untergruppe von L, die N enthält und umfassender ist als N, kann nicht als directes Product einer mit N holoedrisch isomorphen und einer anderen Gruppe ausgedrückt werden.*

Wäre dies nämlich bei der Untergruppe M möglich, so müssten die Operationen von M sich, jede gerade einmal, in der Form

$$\mathfrak{S}_\mu \mathfrak{T}_\alpha \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots m-1 \\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

darstellen lassen. Es müssten dabei alle Operationen $\mathfrak{S}$ mit allen Operationen $\mathfrak{T}$ vertauschbar sein, jene müssten eine Gruppe und diese eine mit N holoedrisch isomorphe Gruppe bilden. Da nun eine mit N isomorphe Gruppe, ausser N selbst, in der Gruppe L und also auch in M nicht enthalten ist, so müssten die Operationen $\mathfrak{T}$ mit den Operationen T von N übereinstimmen. Dann würde aber in L mindestens eine nichtidentische Operation $\mathfrak{S}_\mu$ existiren, die mit allen Operationen T der Gruppe N vertauschbar wäre; dies steht mit den ursprünglich gemachten Voraussetzungen in Widerspruch.

§ 5.

Die einzige Untergruppe ihrer Art.

Im Vorhergehenden ist angenommen, dass die Gruppe L eine ausgezeichnete Untergruppe N und keine von N verschiedene, mit N holoedrisch isomorphe, ausgezeichnete oder nichtausgezeichnete Untergruppe besitze. Es giebt Fälle, in denen ein solches Verhalten sofort erkannt werden kann. Denken wir uns zunächst in L die ausgezeichnete Untergruppe N und ausserdem eine zweite Untergruppe M enthalten, über die zunächst gar nichts Weiteres vorausgesetzt werden soll. Die Operationen, welche den Gruppen N und M gemeinsam sind, bilden eine Gruppe Z. Transformirt man nun die Operationen der Gruppe Z mit einer Operation der Gruppe M, so müssen, da Z in M enthalten ist, Operationen der Gruppe M erhalten werden. Da aber die Operationen Z zu den Operationen N gehören, und die Gruppe N in der Gesammtgruppe ausgezeichnet enthalten ist, so muss die erwähnte Transformation Operationen der Gruppe N ergeben, also Operationen, die M und N gleichzeitig, d. h. die Z angehören. Es ist also die Gruppe Z in der Gruppe M ausgezeichnet enthalten. Nehmen wir jetzt die Gruppe M als einfach an, so wird Z entweder mit M übereinstimmen oder aus der identischen Operation allein bestehen. Im ersten Fall ist M gleichbedeutend mit dem, was M und N gemeinsam ist, d. h. es ist M in N enthalten. Der zweite Fall ist noch näher zu discutiren. Es haben in diesem Fall M und N nur die Identität gemein. Bezeichnet man also mit $A_1, A_2, \ldots A_m$ die Operationen von M, mit $B_1, B_2, \ldots B_n$ die von N, so sind die $m \cdot n$ Operationen

$$A_k B_l \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots m \\ l = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

von einander verschieden. Diese Operationen bilden aber auch eine Gruppe, denn es ist

$$\begin{aligned}(A_k B_l)(A_{k'} B_{l'}) &= A_k A_{k'} (A_{k'}^{-1} B_l A_{k'}) B_{l'} \\ &= A_k A_{k'} B_{l''} B_{l'} \\ &= A_{k''} B_{l'''}.\end{aligned}$$

Somit besitzt die Gruppe L eine Untergruppe mn^{ter} Ordnung und muss also eine durch mn theilbare Ordnung haben.

Es kann nun umgekehrt zum Voraus bekannt sein, dass mn kein Theiler der Ordnung von L ist, man weiss dann, dass von den genannten beiden Fällen der erste eintreten, d. h. dass M in N enthalten sein muss. Somit ergiebt sich der folgende Satz:

V. *Wenn die Gruppe N in der Gruppe L ausgezeichnet enthalten*

ist, wenn ferner das Product der Ordnung von N in die Ordnung irgend einer einfachen Gruppe die Ordnung von L nicht theilt, so kann L eine Gruppe vom Typus jener einfachen Gruppe nur innerhalb der Untergruppe N enthalten.

Stimmt die einfache Gruppe, um die es sich handelt, mit der Gruppe N selbst überein, so bekommt der Satz die folgende Form:

Ist die einfache Gruppe N in der Gruppe L ausgezeichnet enthalten und die Ordnung von L nicht durch das Quadrat der Ordnung von N theilbar, so ist die Gruppe N in L die einzige Untergruppe ihrer Art.

Zweiter Abschnitt.

Die alternirende Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe.

§ 6.

Isomorphismus zwischen zwei alternirenden Gruppen.

Das Ziel dieses Abschnitts ist, Gruppen zu bilden, welche die alternirende Gruppe ausgezeichnet enthalten. Ich nehme dabei den Ausdruck „alternirende Gruppe" in ganz abstracter Bedeutung, indem ich diesen Ausdruck auf jede Gruppe anwende, die mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von n Elementen holoedrisch isomorph ist. Es ist dabei ganz gleichgültig, aus welchen Operationen die fragliche Gruppe besteht. In demselben Sinn werde ich später noch andere Ausdrücke, z. B. „symmetrische Gruppe", „Gruppe der Modulargleichung", „metacyklische Gruppe" u. s. w. gebrauchen. Zunächst müssen nun die Isomorphismen untersucht werden, welche die alternirende Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ in sich zulässt. Ich beschränke mich dabei auf $n \geq 5$; unter dieser Annahme ist die alternirende Gruppe einfach. Der Fall $n = 5$ ist bereits von Herrn Klein erledigt worden.*) Das Resultat kann mit Hülfe der von mir im Vorhergehenden eingeführten Ausdrucksweise dahin formulirt werden, dass für $n = 5$, d. h. bei der Ikosaedergruppe, zwei Classen von Isomorphismen und nicht mehr existiren. Für die Fälle, in denen $n > 6$ ist, verhält sich die Sache geradeso; die Gruppe der geraden Vertauschungen ist in der Gruppe der sämmtlichen $n!$ Vertauschungen enthalten; man erhält alle Isomorphismen jener Gruppe in sich, wenn man sie mit allen Operationen dieser transformirt. Es ist wichtig dafür einen allgemeinen Beweis zu haben. Der Fall $n = 6$ bildet eine Ausnahme.

---

*) Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. 1884. pag. 232 und 233.

Zum Zweck der Durchführung der Untersuchung wollen wir uns die alternirende Gruppe in doppelter Form denken, einmal als Gruppe G der geraden Vertauschungen der Zahlen $1, 2, \ldots n$, dann als Gruppe Γ der geraden Vertauschungen der n Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$. Es liege nun eine holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen G und Γ vor, und es sei S eine Substitution von G und Σ die entsprechende Substitution von Γ. Transformirt man jetzt S mit allen Substitutionen der Gruppe G und Σ in entsprechender Folge mit den Substitutionen von Γ, so müssen entsprechende Reihen von Substitutionen hervorgehen. Es entsprechen also der Gesammtheit der mit S in G gleichberechtigten Substitutionen die sämmtlichen mit Σ in Γ gleichberechtigten Substitutionen, und es ist also auch die Anzahl jener gleich der Anzahl dieser gleichberechtigten Substitutionen.

Ich nehme jetzt

$$S = (1\,2\,3)$$

an. Jede mit S in G gleichberechtigte Substitution muss der Substitution S ähnlich, also auch ein Cyklus von drei Zahlen sein. Nun seien $1', 2', 3'$ irgend drei Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ und $4', 5', \ldots n'$ die übrigen Zahlen derselben Reihe, so erhält man die Substitution

$$S' = (1'\,2'\,3'),$$

indem man S mit der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots n \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & \ldots n' \end{pmatrix}$$

oder mit der Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots n \\ 1' & 2' & 3' & 5' & 4' & 6' & 7' & \ldots n' \end{pmatrix}$$

transformirt. Von diesen beiden letzten Substitutionen, die wir beide bilden können, wenn $n \geqq 5$, ist eine sicher gerade, somit sind S und S' in der Gruppe G der geraden Substitutionen gleichberechtigt, wenn $n \geqq 5$ ist. Die mit S in G gleichberechtigten Substitutionen bestehen also aus der Gesammtheit der Cyklen von drei Zahlen; ihre Anzahl berechnet sich gleich

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Die der Substitution S entsprechende Substitution Σ der Gruppe Γ muss jedenfalls von der dritten Ordnung sein. Es wird also Σ aus r Cyklen von drei Buchstaben und aus $n - 3r$ einzelnen Buchstaben bestehen, wobei uns r bis jetzt noch unbekannt ist. Nehmen wir einmal $r \geqq 2$ an und setzen wir

$$\Sigma = (\alpha\beta\gamma)\,(\delta\varepsilon\zeta)\,(\eta\vartheta\iota)\ldots.$$

Nun ist jede mit Σ in Γ gleichberechtigte Substitution auch mit Σ in der Gesammtgruppe der $n!$ Vertauschungen von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ gleichberechtigt, d. h. mit Σ ähnlich. Ist andererseits Σ' mit Σ ähnlich, also

$$\Sigma' = (\alpha' \beta' \gamma')(\delta' \varepsilon' \zeta')(\eta' \vartheta' \iota') \ldots,$$

so wird Σ' erhalten durch Transformation von Σ mit jeder der beiden Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha\, \beta\, \gamma & \delta\, \varepsilon\, \zeta & \eta\, \vartheta\, \iota & \ldots \\ \alpha' \beta' \gamma' & \delta' \varepsilon' \zeta' & \eta' \vartheta' \iota' & \ldots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\, \beta\, \gamma & \delta\, \varepsilon\, \zeta & \eta\, \vartheta\, \iota & \ldots \\ \delta' \varepsilon' \zeta' & \alpha' \beta' \gamma' & \eta' \vartheta' \iota' & \ldots \end{pmatrix},$$

von denen sicher die eine gerade ist. Es ist also jede mit Σ ähnliche Substitution auch in der Gruppe Γ mit Σ gleichberechtigt. Zu einer aus n Buchstaben gebildeten Substitution, die n_1 Cyklen von c_1 Buchstaben, n_2 Cyklen von c_2 Buchstaben u. s. w. hat, giebt es aber, wenn sie selbst mitgerechnet wird,

$$\frac{n!}{n_1!\, c_1^{n_1} \cdot n_2!\, c_2^{n_2} \ldots}$$

ähnliche Substitutionen.*) Also giebt es in unserem Falle

$$\frac{n!}{r!\, 3^r\, (n-3r)!}$$

mit Σ ähnliche und somit ebensoviele mit Σ in Γ gleichberechtigte Substitutionen.

Da nun diese Zahl mit der Anzahl der mit S in G gleichberechtigten Substitutionen übereinstimmen muss, so erhält man eine Gleichung, welche nach einer leichten Umformung ergiebt, dass

$$(8) \qquad \frac{(n-3r+1)(n-3r+2)\ldots(n-3)}{r!\, 3^{r-1}} = 1.$$

Es war $r \geqq 2$ angenommen. Für den Fall $r > 2$ nehmen wir im Nenner des letzten Bruchs statt der $r-1$ Factoren 3 die grösseren Factoren $r+1,\ r+2, \ldots 2r-1$. Man erhält dann etwas, was kleiner sein müsste als der Bruch (8); also müsste gelten

$$\frac{(n-3r+1)(n-3r+2)\ldots(n-r-1)}{1 \cdot 2 \ldots (2r-1)} (n-r) \cdots (n-3) < 1.$$

Der Bruch in dieser letzten Relation enthält im Zähler ebensoviele aufeinanderfolgende Factoren wie im Nenner und ist desshalb einer ganzen Zahl gleich. Die letzte Relation ist also widersprechend. Nimmt man jetzt $r = 2$ an, so giebt die Relation (8):

$$\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1.$$

---

*) Vergl. Cauchy, Exercises d'analyse et de physique mathématique 1840, tome III, p. 173.

Diese Gleichung ist nur richtig für $n = 6$. *In den Fällen* $n = 5$ *und* $n > 6$ *ist also* $r = 1$ *zu setzen, d. h. es entspricht einer Circularsubstitution dritter Ordnung der Gruppe* G *eine Circularsubstitution dritter Ordnung der Gruppe* Γ. *Im Fall* $n = 6$ *ist* $r = 1$ *oder* $r = 2$.

§ 7.

Die Circularsubstitutionen dritter Ordnung entsprechen sich.

Wir verfolgen jetzt den zwischen der Gruppe G der geraden Vertauschungen von $1, 2, \ldots n$ und der Gruppe Γ der geraden Vertauschungen von $\alpha, \beta, \ldots \omega$ vorausgesetzten Isomorphismus für $n \geqq 5$ unter der Voraussetzung, dass jedem Cyklus von drei Zahlen in G auch ein Cyklus von drei Buchstaben in Γ entspricht. Nur für den Fall $n = 6$ ist nachher noch eine andere Möglichkeit zu erwägen. Der folgende Satz, den ich bei einer anderen Gelegenheit aufgestellt habe*), wird dabei von Nutzen sein:

Jede transitive Gruppe von Vertauschungen von k *Elementen, die aus gewissen Circularsubstitutionen dritter Ordnung erzeugt werden kann, ist mit der Gruppe der geraden Vertauschungen der* k *Elemente identisch.*

Haben nun zwei Circularsubstitutionen dritter Ordnung gewisse Elemente gemein, so erzeugen sie offenbar eine Substitutionsgruppe, die transitiv ist in Ansehung derjenigen Elemente, die in jenen Circularsubstitutionen versetzt werden. Es erzeugen also zwei Cyklen aus je drei Elementen eine Gruppe von 3, 12, 60, 9 Substitutionen, je nachdem sie 3, 2, 1, 0 Elemente gemein haben. Hieraus aber folgt allein schon, dass zwei Cyklen aus drei Zahlen, die in der Gruppe G vorkommen, in der Gruppe Γ zwei Cyklen von drei Buchstaben entsprechen müssen, die ebenso viele Buchstaben gemein haben wie jene Zahlen.

Jetzt suche ich zu den Circularsubstitutionen

$$(123),\ (145),\ (167), \ldots (1\ 2\varrho\ 2\varrho+1) \tag{9}$$

der Gruppe G die zugehörigen Substitutionen in Γ. Den Cyklen (123) und (145) müssen in Γ zwei Cyklen mit einem gemeinsamen Buchstaben entsprechen. Man kann die Bezeichnung der Gruppe Γ so ändern, dass diese beiden letzten Cyklen $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ und $(\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5)$ heissen. Der Cyklus (167) hat nun mit (123) und mit (145) je eine Zahl gemein, also muss der dem (167) entsprechende Cyklus C mit $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ und $(\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5)$ je einen Buchstaben gemein haben; dass aber dies beide Male derselbe Buchstabe ist, ist damit noch nicht gesagt. Enthält nun C den Buchstaben α_1 nicht, so muss C einen von den Buchstaben α_2, α_3,

*) Vergl. Mathematische Annalen Bd. 40, p. 62, Lehrsatz V.

einen von den Buchstaben α_4, α_5 und einen neuen Buchstaben enthalten. Dann würden aber C, $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, $(\alpha_1\alpha_4\alpha_5)$ nach dem citirten Satz eine Gruppe 360ter Ordnung erzeugen, während (123), (145) und (167) eine Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}\,7!$ ergeben. Dies ist widersprechend. Es enthält also C den Buchstaben α_1 und ausserdem zwei neue Buchstaben. Man kann desshalb

$$C = (\alpha_1\alpha_6\alpha_7)$$

setzen. Man kann so fortfahren zu schliessen und findet, dass den Substitutionen (9) der Reihe nach die Substitutionen

$$(10)\qquad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3),\ (\alpha_1\alpha_4\alpha_5),\ (\alpha_1\alpha_6\alpha_7),\ \ldots\ (\alpha_1\ \alpha_{2\varrho}\ \alpha_{2\varrho+1})$$

entsprechen.

Es soll ϱ so gross als möglich genommen werden, so dass also $n = 2\varrho + 1$ oder $n = 2\varrho + 2$ ist. Im Fall $n = 2\varrho + 1$ setzen sich aus den Circularsubstitutionen (9) die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe G zusammen. Die Circularsubstitutionen (10) geben, in entsprechender Weise zusammengesetzt, die entsprechenden Substitutionen von Γ. Man ersieht nun, dass jede Substitution von Γ aus ihrer entsprechenden dadurch entsteht, dass man in dieser die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ der Reihe nach durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ ersetzt.

Ist aber $n = 2\varrho + 2$, so ist noch der Cyklus $(1\ 2\ 2\varrho+2)$ und der ihm in Γ entsprechende C' heranzuziehen. Schliesst man ganz ebenso wie im Vorhergehenden, so ergiebt sich, dass C' mit $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ zwei Buchstaben, mit $(\alpha_1\alpha_4\alpha_5)$ einen Buchstaben gemein hat und einen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{2\varrho+1}$ verschiedenen Buchstaben enthalten muss. Dadurch bleiben für C' vier Annahmen offen:

$$C_1' = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_{2\varrho+2}),\qquad C_2' = (\alpha_1\ \alpha_{2\varrho+2}\ \alpha_2),$$
$$C_3' = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_{2\varrho+2}),\qquad C_4' = (\alpha_1\ \alpha_{2\varrho+2}\ \alpha_3).$$

Nun bilde man die Substitution

$$T = (123)^{-1}\,(1\ 2\ 2\varrho+2) = (1\ 3\ 2\varrho+2).$$

Diese Substitution ist ein Cyklus von drei Zahlen, der mit (145) eine Zahl gemein hat. Die dem T entsprechende Substitution von Γ muss also ein Cyklus von drei Buchstaben sein und von den Buchstaben $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ einen enthalten. Je nachdem man aber C_1', C_2', C_3', C_4' als entsprechende Substitution zu $(1\ 2\ 2\varrho+2)$ annimmt, erhält man als entsprechende Substitution zu T

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}C_1' = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_{2\varrho+2}),$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}C_2' = (\alpha_1\ \alpha_3)\,(\alpha_2\ \alpha_{2\varrho+2}),$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}C_3' = (\alpha_1\ \alpha_{2\varrho+2})\,(\alpha_2\ \alpha_3),$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}C_4' = (\alpha_2\ \alpha_{2\varrho+2}\ \alpha_3).$$

Es zeigt sich jetzt, dass die dem Cyklus $(1\ 2\ 2\varrho+2)$ zugeordnete Substitution C' nur gleich

$$C_1' = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_{2\varrho+2})$$

angenommen werden kann.

Die Cyklen

$$(123),\ (145), \ldots (1\ 2\varrho\ 2\varrho+1),\ (1\ 2\ 2\varrho+2)$$

erzeugen nun alle Substitutionen der Gruppe G, und die Cyklen

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3),\ (\alpha_1\ \alpha_4\ \alpha_5), \ldots (\alpha_1\ \alpha_{2\varrho}\ \alpha_{2\varrho+1}),\ (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_{2\varrho+2})$$

erzeugen in entsprechender Weise die Substitutionen von Γ. Es gilt also allgemein: *wenn die Circularsubstitutionen dritter Ordnung von G den Circularsubstitutionen dritter Ordnung von Γ entsprechen, so erhält man jede Operation von Γ aus der zugeordneten von G, indem man die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ durch die Buchstaben $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ersetzt.*

§ 8.

Der Ausnahmefall für $n = 6$.

Es ist noch der Ausnahmefall zu behandeln, der eintreten kann, wenn $n=6$ ist. Es ist für $n=6$ noch die Möglichkeit offen geblieben, dass jedem Cyklus von 3 Zahlen, der der Gruppe G der geraden Vertauschungen von $1, 2, \ldots 6$ angehört, in der Gruppe Γ der geraden Vertauschungen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ eine Substitution von der Form $(\alpha\beta\gamma)\ (\delta\varepsilon\zeta)$ entspricht. Eine solche Zuordnung der Operationen von G und Γ lässt sich realisiren*); es beruht dies darauf, dass sechswerthige Functionen von sechs Veränderlichen existiren, die nicht in Beziehung auf fünf von den Veränderlichen symmetrisch sind. Setzt man nämlich

$$\alpha = (x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)\,(x_1x_3 + x_2x_5 + x_4x_6)\,(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5) \\ \times (x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6)\,(x_1x_6 + x_2x_3 + x_4x_5),$$

so hat diese Function sechs Werthe, nämlich ausser dem Werth α selbst noch die folgenden fünf:

$$\beta = (x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)\,(x_1x_3 + x_2x_6 + x_4x_5)\,(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) \\ \times (x_1x_5 + x_2x_3 + x_4x_6)\,(x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_5),$$

$$\gamma = (x_1x_2 + x_3x_5 + x_4x_6)\,(x_1x_3 + x_2x_6 + x_4x_5)\,(x_1x_4 + x_2x_3 + x_5x_6) \\ \times (x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6)\,(x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4),$$

$$\delta = (x_1x_2 + x_3x_5 + x_4x_6)\,(x_1x_3 + x_2x_4 + x_5x_6)\,(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) \\ \times (x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4)\,(x_1x_6 + x_2x_3 + x_4x_5),$$

*) Vergl. Dziobek, Grunerts Archiv Theil 68, p. 226 und p. 230.

$$\varepsilon = (x_1x_2 + x_3x_6 + x_4x_5)(x_1x_3 + x_2x_4 + x_5x_6)(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5)$$
$$\times (x_1x_5 + x_2x_3 + x_4x_6)(x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4),$$

$$\zeta = (x_1x_2 + x_3x_6 + x_4x_5)(x_1x_3 + x_2x_5 + x_4x_6)(x_1x_4 + x_2x_3 + x_5x_6)$$
$$\times (x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4)(x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_5).$$

Jede dieser 6 Functionen bleibt bei einer Gruppe von 120 Vertauschungen der Indices $1, 2, \ldots 6$ ungeändert. Wendet man jetzt eine Substitution der Indices $1, 2, \ldots 6$ auf die 6 Ausdrücke $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ an, so vertauschen sich diese unter einander. Es müssen aber auch verschiedene Vertauschungen der Indices $1, 2, \ldots 6$ auf verschiedene Vertauschungen von $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ führen; wäre dem nämlich nicht so, so käme man zu einer Gruppe von Substitutionen, welche alle conjugirten Functionen $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ ungeändert liesse, und deren Ordnung grösser als 1 sein müsste; dies widerspricht, da die Zahl der Functionen > 2 ist, bekannten Thatsachen.

Es ergiebt sich nun eine ein-eindeutige Zuordnung der Substitutionen der Zahlen $1, 2, \ldots 6$ und der Substitutionen der Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots \zeta$. Man berechnet leicht die den Transpositionen (12), (13), ... entsprechenden Substitutionen, und es ergiebt sich die Tabelle

$$\begin{array}{c|l}
(12) & (\alpha\beta)\ (\gamma\delta)\ (\varepsilon\zeta) \\
(13) & (\alpha\zeta)\ (\beta\gamma)\ (\varepsilon\delta) \\
(14) & (\alpha\varepsilon)\ (\beta\delta)\ (\gamma\zeta) \\
(15) & (\alpha\gamma)\ (\beta\varepsilon)\ (\delta\zeta) \\
(16) & (\alpha\delta)\ (\beta\zeta)\ (\gamma\varepsilon).
\end{array}$$

Da man aus (12), (13), (14), (15), (16) alle geraden und ungeraden Substitutionen der Zahlen $1, 2, \ldots 6$ bilden kann, so ist durch diese Tabelle allein schon eine Zuordnung aller Substitutionen von $1, 2, \ldots 6$ zu allen Substitutionen von $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ gegeben.

Wir suchen hier die Zuordnungen, die zwischen den geraden Substitutionen von $1, 2, \ldots 6$ und den geraden Substitutionen von $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ festgesetzt werden können. Eine solche Zuordnung berechnet sich aus der aufgestellten Tabelle; es ergiebt sich

$$(11)\qquad \begin{array}{c|l}
(123) & (\alpha\gamma\varepsilon)\ (\beta\zeta\delta) \\
(145) & (\alpha\beta\zeta)\ (\gamma\delta\varepsilon) \\
(126) & (\alpha\zeta\gamma)\ (\beta\delta\varepsilon).
\end{array}$$

Bei diesem Isomorphismus zwischen den Gruppen G und Γ entsprechen den Cyklen von drei Zahlen Substitutionen, die aus zwei Cyklen von drei Buchstaben bestehen und somit auch den Cyklen aus drei Buchstaben Substitutionen aus zwei Cyklen von drei Zahlen.

Um nun alle isomorphen Zuordnungen von der eben genannten

Art zwischen G und Γ zu finden, denken wir uns eine zweite Zuordnung eben dieser Art zwischen den geraden Substitutionen von 1, 2, 3, 4, 5, 6 und den geraden Substitutionen von $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \zeta'$ gegeben. Diese Zuordnung werde mit der durch (11) vorgestellten combinirt, so entspricht dadurch jeder geraden Substitution der Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ auch eine gerade Substitution der $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$. Bei dieser neuen Zuordnung entspricht aber einem Cyklus von 3 Buchstaben wieder ein solcher Cyklus. Diese Zuordnung entsteht also nach dem Resultat des 7ten Paragraphen einfach dadurch, dass man die Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ in irgend einer Ordnung durch $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$ ersetzt. Die Zuordnung, die wir uns zwischen den geraden Substitutionen von $1, 2, \ldots 6$ und denen von $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$ gedacht haben, entsteht also aus der Tabelle (11) dadurch, dass man rechts $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$ in irgend einer Ordnung für $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ einführt.

Alle überhaupt möglichen isomorphen Beziehungen zwischen den Gruppen G und Γ im Fall $n = 6$ sind also vom Typus (11) *oder vom Typus der folgenden Tabelle*

$$\begin{array}{c|l} (123) & (\alpha\beta\gamma) \\ (145) & (\alpha\delta\varepsilon) \\ (126) & (\alpha\beta\zeta), \end{array}$$

d. h. man hat in (11) und in dieser Tabelle nur die Buchstaben rechts zu vertauschen, um alle isomorphen Beziehungen, die überhaupt möglich sind, zu erhalten. Man kann dies auch so ausführen: Man vertauscht auf den rechten Seiten der beiden aufgestellten Tabellen zunächst β mit γ. Nun hat man im Ganzen 4 Isomorphismen, aus denen die sämmtlichen Isomorphismen entstehen, wenn man die $\frac{1}{2}6!$ geraden Vertauschungen von $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ ausführt.

§ 9.

Gruppe der Isomorphismen und der Isomorphismenclassen bei der alternirenden Gruppe.

Die Isomorphismen der alternirenden Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ in sich sind damit alle gegeben; man hat, um sie zu erhalten, nur in den vorhergehenden Entwicklungen die beiden alternirenden Gruppen zusammenfallen zu lassen, d. h. $1, 2, 3, \ldots n$ für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ einzusetzen. Es ergiebt sich also (§ 6 und § 7): *Wenn $n = 5$ oder $n > 6$ ist, so erhält man jeden Isomorphismus der alternirenden Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ in sich dadurch, dass man sie mit den Operationen der sie umfassenden symmetrischen Gruppe transformirt.* Man erkennt bei

näherer Ueberlegung, dass dabei lauter verschiedene Isomorphismen entstehen. Die Gruppe der Isomorphismen ist also von der Ordnung $n!$ und mit der symmetrischen Gruppe holoedrisch isomorph. Für $n=6$ findet man nun ebenso aus dem Schluss des letzten Paragraphen, dass $2.6!$ Isomorphismen existiren. Die Anzahl der cogredienten Isomorphismen ist in beiden Fällen $\frac{1}{2}n!$. Im Fall, dass $n=5$ oder $n>6$, existiren also zwei Classen von Isomorphismen. Im Fall $n=6$ existiren 4 solcher Classen.

Im letzteren Fall bilden also die Isomorphismenclassen eine Gruppe 4ter Ordnung. Eine solche hat die Factoren der Zusammensetzung 2, 2; *also hat die Gesammtgruppe der Isomorphismen die Factoren* 2, 2, 360. Um aber einen genaueren Einblick zu bekommen, müssen wir untersuchen, was für eine Gruppe 4ter Ordnung von den Isomorphismenclassen gebildet wird. Nun stellen die vier Tabellen

$$\begin{array}{c|c} (123) & (123) \\ (145) & (145) \\ (126) & (126), \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} (123) & (132) \\ (145) & (145) \\ (126) & (136), \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} (123) & (135)\,(264) \\ (145) & (126)\,(345) \\ (126) & (163)\,(245), \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} (123) & (125)\,(364) \\ (145) & (136)\,(245) \\ (126) & (162)\,(345) \end{array}$$

vier Isomorphismen der alternirenden Gruppe 360ter Ordnung vor, die mit

$$\begin{array}{cc} 1, & J_1, \\ J_2, & J_3 \end{array}$$

bezeichnet werden mögen. Man erhält aus diesen alle Isomorphismen der Gruppe in sich, wenn man auf den rechten Seiten der Tabellen die geraden Vertauschungen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ausführt. Wir können uns noch anders ausdrücken: man erhält jeden Isomorphismus unserer Gruppe in sich gerade einmal, wenn man jeden der Isomorphismen $1, J_1, J_2, J_3$ auf der rechten Seite mit den sämmtlichen $\frac{1}{2}6!$ cogredienten Isomorphismen multiplicirt.

Die vier *Classen* von Isomorphismen werden also durch $1, J_1, J_2, J_3$ repräsentirt, und es ist noch zu untersuchen, wie diese Classen sich zusammensetzen. Nun ersetzt der Isomorphismus J_2 die Operationen

$$(123)^{-1} = (132),$$
$$(126)\,(123)\,(126)^{-1} = (136)$$

beziehungsweise durch

$$[(135)\,(264)]^{-1} = (153)\,(246),$$
$$[(163)\,(245)]\,[(135)\,(264)]\,[(163)\,(245)]^{-1} = (125)\,(364).$$

Stellt man jetzt J_1 und J_2 in den Formen

$$\begin{array}{c|c} (123) & (132) \\ (145) & (145) \\ (126) & (136), \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} (132) & (153)\,(246) \\ (145) & (126)\,(345) \\ (136) & (125)\,(364) \end{array}$$

dar, so ist ersichtlich, dass $J_1 J_2$ durch die Tabelle

$$\begin{array}{c|c} (123) & (153)\,(246) \\ (145) & (126)\,(345) \\ (126) & (125)\,(364) \end{array}$$

dargestellt ist. Die letzte Tabelle erhält man aber, indem man auf der rechten Seite der für J_3 aufgestellten Tabelle für $1, 2, 3, 4, 5, 6$ der Reihe nach $4, 6, 5, 1, 2, 3$ setzt. Nun ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (14)\,(2635)$$

eine gerade Substitution, und es gehört also der Isomorphismus $J_1 J_2$ mit dem Isomorphismus J_3 in dieselbe Classe, was durch die Aequivalenz

$$J_1 J_2 \backsim J_3$$

ausgedrückt werden mag.

Es ersetzt ferner der Isomorphismus J_2 die Substitutionen

$$(123)^{-1}\,(145)\,(123) = (245),$$
$$(145)^{-1}\,(126)\,(145) = (426)$$

durch

$$[(135)\,(264)]^{-1}\,[(126)\,(345)]\,[(135)\,(264)] = (364)\,(521)$$

und

$$[(126)\,(345)]^{-1}\,[(163)\,(245)]\,[(126)\,(345)] = (214)\,(653)$$

und somit auch die Substitutionen

$$(245)\,(123)^{-1}\,(245)^{-1} = (135)$$

und

$$(123)^{-1}\,(245)\,(123) = (345)$$

durch

$$[(364)\,(521)]\,[(135)\,(264)]^{-1}\,[(364)\,(521)]^{-1} = (214)\,(563)$$

und

$$[(135)\,(264)]^{-1}\,[(364)\,(521)]\,[(135)\,(264)] = (542)\,(163).$$

Dass die Substitution (163) in (152) (346) verwandelt wird, folgt aus dem Vorhergehenden. Es führt folglich der Isomorphismus J_2 die Substitutionen

$$(135)(264),\ (126)(345),\ (163)(245)$$

beziehungsweise in

$$(124),\quad (136),\quad (125)$$

über. Somit ist der Isomorphismus $J_2{}^2$ durch die Tabelle

$$\begin{array}{c|c} (123) & (124) \\ (145) & (136) \\ (126) & (125) \end{array}$$

dargestellt. Dies ist aber der cogrediente Isomorphismus der alternirenden Gruppe, der entsteht, wenn man sie mit der in ihr enthaltenen Operation

$$(34)(56)$$

transformirt. Es ist also

$$J_2{}^2 \sim 1.$$

Unmittelbar findet man noch, dass

$$J_2 J_1 = J_3, \qquad J_1{}^2 = 1,$$

also a fortiori

$$J_2 J_1 \sim J_3, \qquad J_1{}^2 \sim 1$$

ist. *Es constituiren also die Isomorphismenclassen der alternirenden Gruppe* 360^ter^ *Ordnung die Vierergruppe*, d. h. diejenige Gruppe 4^ter^ Ordnung, die durch die Relationen

$$j_1{}^2 = j_2{}^2 = 1, \qquad j_1 j_2 = j_2 j_1$$

definirt ist.

Die Vierergruppe besitzt drei Untergruppen 2^ter^ Ordnung, deren jede nur mit sich selbst gleichberechtigt ist. Diesen entsprechen in der Gesammtgruppe der Isomorphismen der alternirenden Gruppe 360^ter^ Ordnung drei Untergruppen von der Ordnung 6!, deren jede nur mit sich selbst gleichberechtigt ist. Es sind dies zugleich die einzigen Isomorphismengruppen, welche die Gruppe der cogredienten Isomorphismen enthalten, wenn man von dieser letzteren Gruppe und der Gesammtgruppe absieht. Die genannten drei Gruppen werden erhalten, indem die cogredienten Isomorphismen mit J_1 oder J_2 oder J_3 combinirt werden. Die erste der drei Gruppen ist der symmetrischen Gruppe der Ordnung 720 holoedrisch isomorph.

§ 10.

Ergebnisse dieses Abschnitts.

Wir müssen uns jetzt die alternirende Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe einer anderen Gruppe denken. Es besitze eine Gruppe Δ, die mit der alternirenden Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ $(n > 4)$ holoedrisch

isomorphe, ausgezeichnete Maximaluntergruppe Γ. Unter dieser Voraussetzung hat Δ nur zwei Factoren der Zusammensetzung. Durch Anwendung des Satzes III in § 3 ergiebt sich, dass die Gruppe Δ, wenn sie nicht zerfällt, durch eine Gruppe von Isomorphismen der Gruppe Γ repräsentirt werden muss. Diese Gruppe muss die Gruppe der cogredienten Isomorphismen enthalten und umfassender sein als diese. Ist nun $n = 5$ oder $n > 6$, so enthält die Gesammtgruppe der Isomorphismen doppelt so viele Operationen als die Gruppe der cogredienten Isomorphismen. Es ist also Δ in diesem Fall durch die Gesammtgruppe der Isomorphismen repräsentirt und (§ 9) der symmetrischen Gruppe der Ordnung $n!$ holoedrisch isomorph. Diese Gruppe zerfällt nicht (vergl. auch unten).

Ist aber $n = 6$, so hat die Gesammtgruppe der Isomorphismen drei Factoren der Zusammensetzung (§ 9). Die Gruppe Δ, die nur zwei Factoren besitzt, kann jetzt nur durch einen Theil der Isomorphismen repräsentirt werden, wobei die cogredienten alle vorkommen müssen. Es ist also Δ in diesem Fall durch eine der 3 Gruppen 720^{ter} Ordnung repräsentirt, die am Schluss des vorigen Paragraphen genannt sind. Von diesen Gruppen ist eine die symmetrische, die beiden anderen mögen mit Δ_1 und Δ_2 bezeichnet werden. Es ist noch die Verschiedenheit dieser drei Gruppen zu beweisen. Da die Gesammtgruppe der Isomorphismen von der Ordnung $2 . 6!$, die Gruppe der cogredienten Isomorphismen einfach und von der Ordnung $\frac{1}{2} 6!$ ist, so ergiebt der Satz V des 5^{ten} Paragraphen, dass die Gesammtgruppe keine zweite mit der Gruppe der cogredienten Isomorphismen holoedrisch isomorphe Untergruppe besitzt. Nun sind die Bedingungen für die Anwendung des Satzes IV erfüllt. Man identificirt L mit der Gesammtgruppe, N mit der Gruppe der cogredienten Isomorphismen und findet, dass zwei der genannten drei Untergruppen, da sie in der Gesammtgruppe der Isomorphismen nicht gleichberechtigt sind, nicht holoedrisch isomorph sein können. Dass ferner die Gruppen Δ_1 und Δ_2 nicht zerfallen, ergiebt sich aus dem Zusatz des Lehrsatzes IV. Eben dieser Zusatz kann auch auf die symmetrische Gruppe angewendet werden, von der es übrigens genugsam bekannt ist, dass sie nicht zerfällt, welchen Werth n auch haben mag.

Fasst man Alles zusammen, so gelangt man zu dem folgenden Satz:

VI. *Wenn die Gruppe Δ eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe Γ enthält, und Γ mit der alternirenden Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2} n!$ holoedrisch isomorph ist, wobei noch $n > 4$ angenommen wird, so ist entweder Δ zerfallend oder der Index von Γ gleich 2. Im letzteren Fall kann Δ ausser mit dem directen Product der Gruppe 2^{ter} Ordnung in die*

genannte alternirende Gruppe auch mit der davon verschiedenen symmetrischen Gruppe der Ordnung $n!$ *übereinstimmen; ist zugleich noch* $n=6$, *so kann* Δ *ausserdem noch gleich einer der Gruppen* Δ_1 *und* Δ_2 *sein, die von einander und von den beiden vorigen Gruppen verschieden sind.*

Die Gruppen Δ_1 *und* Δ_2 *entstehen, wenn man die cogredienten Isomorphismen der alternirenden Gruppe* 360^ter *Ordnung mit einem der durch die Tabellen*

$$\begin{array}{c|c} (123) & (135)\,(264) \\ (145) & (126)\,(345) \\ (126) & (163)\,(245), \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} (123) & (125)\,(364) \\ (145) & (136)\,(245) \\ (126) & (162)\,(345) \end{array}$$

dargestellten Isomorphismen combinirt.

Man betrachte noch die symmetrische Gruppe der Ordnung $n!$ und die in ihr enthaltene alternirende Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n!$. Es ist schon von Cauchy*) allgemein nachgewiesen worden, dass eine zweite Untergruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ in der symmetrischen Gruppe nicht enthalten ist; für $n \geqq 5$ folgt dies auch aus unserem Lehrsatz V. Man kann jetzt den Satz IV anwenden, indem man L mit der symmetrischen, N mit der alternirenden Gruppe identificirt, wobei zugleich noch $n=5$ oder >6 angenommen werden soll. Es ergiebt sich nun, dass die symmetrische Gruppe vollkommen ist. Wendet man ausserdem den Satz I an, so findet man das Ergebniss:

VII. *Wenn* $n=5$ *oder* $n>6$ *ist, so ist die symmetrische Gruppe der Ordnung* $n!$ *vollkommen; sie spaltet sich von jeder Gruppe ab, in der sie ausgezeichnet enthalten ist.*

Dritter Abschnitt.

Die Gruppe der Modulargleichung als ausgezeichnete Untergruppe.

§ 11.

Lösung des Grundproblems für den vorliegenden Fall.

Es soll jetzt die Gruppe der Modulargleichung für die Primzahltransformation der elliptischen Functionen in ähnlicher Weise wie im Vorhergehenden die alternirende Gruppe untersucht werden. Die Gruppe der $p(p^2-1)$ Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}} \end{pmatrix}$$

*) Journal de l'école polytechnique, cahier 17, p. 19.

der Buchstaben $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_\infty$ werde mit $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ bezeichnet. Es sind dabei die Indices mod. p zu nehmen, p ist eine Primzahl, die grösser als 3 ist, und a, b, c, d sind ganze Zahlen, für welche die Determinante

$$ad - bc$$

der Null incongruent ist. Diejenigen von den genannten Substitutionen, deren Determinante ein quadratischer Rest ist, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ von der Ordnung $\frac{p(p^2-1)}{2}$. Da man a, b, c, d mit derselben Zahl multipliciren kann, ohne die Substitution zu ändern, so kann man $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ auch auffassen als die Gesammtheit der Substitutionen der Determinante 1. Die Isomorphismen der Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ in sich sollen festgestellt werden. Die betrachtete Gruppe ist einfach*), wenn $p \geqq 5$ ist, auf welchen Fall wir uns beschränken wollen.

Es ist nun $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ eine zweifach transitive Gruppe von Vertauschungen von $p+1$ Buchstaben. Ihre Untergruppen, die $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots x_{p-1}, x_\infty$ nicht ändern, sollen beziehungsweise mit $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \ldots \mathfrak{H}_{p-1}, \mathfrak{H}_\infty$ bezeichnet werden. Diese Untergruppen sind von der Ordnung $\frac{p(p-1)}{2}$. Ich will zeigen, dass es andere Untergruppen von dieser Ordnung nicht giebt. Ist nämlich $\mathfrak{H}'$ eine Untergruppe der Ordnung $\frac{p(p-1)}{2}$, so muss $\mathfrak{H}'$ nach dem Satz von Cauchy**) eine Substitution von der p^{ten} Ordnung, also in unserem Fall einen Cyklus von p Buchstaben enthalten. Sei der Buchstabe x_k derjenige aus der Reihe $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}, x_\infty$, der in dem Cyklus nicht vorkommt. Würde nun x_k in der Gruppe $\mathfrak{H}'$ überhaupt versetzt, so müsste $\mathfrak{H}'$ eine doppelt transitive Gruppe sein, also mindestens $p(p+1)$ Substitutionen besitzen, was den Annahmen widerspricht. Es wird also die Gruppe $\mathfrak{H}'$ den Buchstaben x_k nicht versetzen und wegen der Gleichheit der Ordnungen mit $\mathfrak{H}_k$ übereinstimmen.

Jetzt denke man sich die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen. Vermöge dieses Isomorphismus müssen die Gruppen $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \ldots \mathfrak{H}_{p-1}, \mathfrak{H}_\infty$ beziehungsweise in $\mathfrak{H}_{i_0}, \mathfrak{H}_{i_1}, \ldots \mathfrak{H}_{i_{p-1}}, \mathfrak{H}_{i_\infty}$ übergehen, wenn $i_0, i_1, \ldots i_{p-1}, i_\infty$ eine Permutation der Zahlen $0, 1, \ldots p-1, \infty$ bedeutet. Es werde die Substitution

*) Vergl. z. B. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen 1890, I. Bd., p. 488 ff.

**) Exercices d'analyse etc. 1840, tome III, p. 250.

$$\begin{pmatrix} x_0, & x_1, & \dots & x_{p-1}, & x_\infty \\ x_{i_0}, & x_{i_1}, & \dots & x_{i_{p-1}}, & x_{i_\infty} \end{pmatrix}$$

der Buchstaben $x_0, x_1, \dots x_{p-1}, x_\infty$ mit S bezeichnet. Ferner sei T irgend eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$, die vermöge des Isomorphismus in T' übergeht. Wenn nun T den Buchstaben x_α in x_β überführt, so wird $\mathfrak{H}_\alpha$, mit T transformirt, in $\mathfrak{H}_\beta$ und in entsprechender Weise $\mathfrak{H}_{i_\alpha}$, mit T' transformirt, in $\mathfrak{H}_{i_\beta}$ übergehen. Somit muss T' den Buchstaben x_{i_α} durch x_{i_β} ersetzen, und es ist nun leicht zu sehen, dass

$$S^{-1}TS = T'$$

ist. Es wird also der vorausgesetzte Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ in sich dadurch erhalten, dass man die Gruppe mit der Substitution S transformirt.

Es ist jetzt noch zu zeigen, dass die Substitution S jedenfalls in der umfassenderen Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ enthalten ist. Da nun die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ transitiv ist, so giebt es in ihr jedenfalls eine Substitution U, welche x_{i_∞} in x_∞ überführt. Die Substitution SU, welche die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ in sich transformirt, versetzt den Buchstaben x_∞ nicht, transformirt also auch $\mathfrak{H}_\infty$ in sich. Nun ist $\mathfrak{H}_\infty$ eine Gruppe, die aus der Hälfte der metacyklischen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{a\alpha+b} \end{pmatrix}$$

besteht. Diese Gruppe enthält keine Substitutionen p^{ter} Ordnung ausser den Potenzen des Cyklus

$$(x_0 x_1 x_2 \dots x_{p-1}).$$

Da nun $\mathfrak{H}_\infty$ durch die Substitution SU in sich transformirt wird, so wird diese Substitution den eben genannten Cyklus in eine seiner Potenzen transformiren. Es ist also SU eine metacyklische Substitution und gehört der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ an. Somit gehört auch S dieser Gruppe an.

Denkt man sich zwei Substitutionen S und S', welche die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ in derselben Weise in sich transformiren, so müsste

$$S^{-1}S'$$

die sämmtlichen Substitutionen von $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$, also auch die Gruppen $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \dots \mathfrak{H}_{p-1}, \mathfrak{H}_\infty$ je in sich transformiren. Dies ist nur dadurch möglich, dass die Substitution $S^{-1}S'$ die Buchstaben $x_0, x_1, \dots x_{p-1}. x_\infty$ sämmtlich nicht versetzt, so dass S gleich S' sein muss. Man erhält

also jeden Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ in sich gerade einmal, wenn man diese Gruppe mit den Substitutionen der sie umfassenden Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ transformirt. Nach Satz V enthält die letztere Gruppe keine von $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ verschiedene und mit dieser Gruppe holoedrisch isomorphe Untergruppe. Man kann jetzt den Satz IV anwenden. Dieser ergiebt mit I zusammen:

VIII. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ *ist vollkommen, sie spaltet sich von jeder Gruppe ab, in der sie ausgezeichnet enthalten ist.*

Denkt man sich ferner eine Gruppe Δ, in welcher $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ als ausgezeichnete Maximaluntergruppe enthalten ist, so muss die Gruppe Δ nach Lehrsatz III entweder zerfallen oder mit $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ übereinstimmen. Dass die letztere Gruppe wirklich nicht zerfällt, folgt aus dem Zusatz von IV. Somit kann der folgende Satz ausgesprochen werden.

IX. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ *ist die einzige nichtzerfallende Gruppe, in welcher* $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ *als ausgezeichnete Maximaluntergruppe enthalten ist.*

In den beiden ausgesprochenen Sätzen bedeutet p *eine Primzahl, die grösser als drei ist.*

§ 12.

Gelegentliche Entwicklung einer Eigenschaft der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$.

Es möge hier eine Eigenschaft der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$, die später gebraucht wird, angeknüpft werden. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ wird durch die Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\alpha+1} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{-\frac{1}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

erzeugt*), für welche die Determinante $ad - bc$ gleich Eins ist. Von diesen Substitutionen ist S ein Cyklus p^{ter} Ordnung, also eine gerade Vertauschung der Buchstaben $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_\infty$. Die Substitution T lässt zwei Buchstaben ungeändert oder nicht, je nachdem die Congruenz $\alpha^2 \equiv -1 \bmod p$ zwei Wurzeln hat oder nicht, d. h. je nachdem p von der Form $4k+1$ oder von der Form $4k+3$ ist. In beiden Fällen ergiebt sich T als eine Substitution, die aus einer geraden Zahl von Transpositionen besteht, also als gerade Substitution von der

*) Vergl. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Bd. I, p. 219.

Ordnung 2. Es besteht also $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ aus lauter geraden Substitutionen. In der umfassenderen Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ bilden die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{a\alpha} \end{pmatrix},$$

die x_0 und x_∞ ungeändert lassen, die Potenzen eines Cyklus von $p-1$ Buchstaben. Es besteht also $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ zur Hälfte aus ungeraden Substitutionen, und es ist $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ nichts Anderes als die Gesammtheit der geraden Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$.

Nehmen wir jetzt zunächst p von der Form $4k+3$ an, so ist $\frac{p+1}{2}$ gerade. $p+1$ ist die Gesammtzahl der Buchstaben $x_0, x_1, \ldots x_{p-1}, x_\infty$, und es wird jede ungerade Substitution 2^{ter} Ordnung mindestens zwei Buchstaben ungeändert lassen. Nach dem vorhin Bemerkten bilden die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$, die x_0 und x_∞ nicht versetzen, eine cyklische Gruppe $p-1^{\text{ter}}$ Ordnung, die somit nur eine Operation 2^{ter} Ordnung enthält. Diese Operation ist in der That eine ungerade Substitution, die nur x_0 und x_∞ ungeändert lässt. Es wird also wegen der doppelten Transitivität der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ je eine ungerade Substitution 2^{ter} Ordnung geben, die ein gegebenes Buchstabenpaar unversetzt lässt. Alle diese Substitutionen sind auch gleichberechtigt in der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$.

Wenn p von der Form $4k+1$ ist, so lässt sich diese Schlussweise nicht anwenden. Für $p=5$ hat man die Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$, die auch als symmetrische Gruppe aus 5 Buchstaben dargestellt werden kann. Der in G_{120} enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{G}_{60}$ entspricht dann, da sie die einzige mit der Ikosaedergruppe holoedrisch isomorphe Untergruppe von $\mathfrak{G}_{120}$ ist (§ 5), die Gesammtheit der geraden Vertauschungen der fünf Buchstaben. Den in $\mathfrak{G}_{120}$ und nicht in $\mathfrak{G}_{60}$ enthaltenen Operationen 2^{ter} Ordnung entsprechen in der symmetrischen Gruppe die Transpositionen, die in dieser gleichberechtigt sind. Man kann somit folgendes Resultat aussprechen:

Die in der Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ (p Primzahl) enthaltenen Substitutionen 2^{ter} Ordnung, deren Determinante ein quadratischer Nichtrest ist, sind sicher gleichberechtigt in den Fällen $p \equiv 3 \bmod 4$ *und* $p=5$.

Vierter Abschnitt.

Die cyklische Gruppe ist als ausgezeichnete Untergruppe gegeben.

§ 13.

Ansatz zur Bestimmung einer mit der Ikosaedergruppe meroedrisch isomorphen Gruppe.

Ich suche jetzt eine Gruppe Δ, welche eine cyklische Gruppe Γ von der m^{ten} Ordnung ausgezeichnet enthält, und zwar so, dass $\Delta | \Gamma$ mit der Ikosaedergruppe holoedrisch isomorph ist. Es soll aber m auch eine zusammengesetzte Zahl sein dürfen.

Die Gruppe Γ ist durch die Gleichung

$$\Theta^m = 1$$

vorgestellt. Alle Isomorphismen dieser Gruppe in sich werden durch die Formel

$$\begin{pmatrix} 1, \Theta, & \Theta^2, & \ldots \Theta^{m-1} \\ 1, \Theta^a, & \Theta^{2a}, & \ldots \Theta^{(m-1)a} \end{pmatrix}$$

geliefert, in der a irgend einen Rest des Moduls m bedeutet, der zu m relativ prim ist. Der identische Isomorphismus ist allein cogredient; man hat $\varphi(m)$ verschiedene Isomorphismen, deren jeder eine besondere Classe ausmacht. Je zwei Isomorphismen sind vertauschbar. Denkt man sich jetzt die Gruppe Δ, in welcher Γ ausgezeichnet enthalten sein sollte, so kann der Lehrsatz II des 3^{ten} Paragraphen angewendet werden. Die Operationen von Δ müssen die Gruppe Γ auf cogrediente Weise, d. h. in diesem Fall identisch in sich transformiren. Es sind also alle Operationen der Gruppe Δ mit der Operation Θ vertauschbar. Da ferner die Gruppe $\Delta | \Gamma$ mit der Ikosaedergruppe übereinstimmt, und diese durch die Relationen

$$A_1^5 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad (A_1 A_3)^3 = 1 \tag{12}$$

definirt ist*), so muss man in der Gruppe Δ zwei Operationen S und T so finden können, dass

$$S^5 = \Theta^a, \quad T^2 = \Theta^b, \quad (ST)^3 = \Theta^c, \quad \Theta^m = 1 \tag{13}$$

ist.

Da nun vermöge der Relationen (12) die aus A_1 und A_3 beliebig combinirten Ausdrücke sich auf 60 Formen reduciren lassen, so kann man auch die aus S, T und Θ combinirten Ausdrücke vermöge der

---

*) Vergl. Dyck, Mathematische Annalen Bd. 20, p. 35 und Hamilton, Philosophical magazine, fourth series vol. XII 1856, p. 446.

Gleichungen (13) und vermöge der Vertauschbarkeit der Operation Θ mit S und T auf nur $60 . m$ Formen

$$S^\alpha T^\beta S^\gamma T^\delta \ldots \Theta^\mu$$

bringen. Wenn also eine Gruppe so, wie wir angenommen haben, existirt, so wird sie durch die aus ihr sich ergebenden Gleichungen (13) mit Rücksicht auf die genannte Vertauschbarkeit dargestellt sein.

Nimmt man aber andererseits in den Gleichungen (13) die Exponenten a, b, c, m beliebig an und definirt man durch diese Gleichungen, in denen Θ wieder mit allen Symbolen vertauscht werden darf, eine Gruppe, so kann sich die Ordnung dieser Gruppe noch geringer herausstellen als $60m$. Dies wird jedenfalls dann eintreten, wenn eine niedrigere Potenz von Θ als die m^{te} sich vermöge der Gleichungen als der Identität gleich ergiebt. Wir fragen jetzt nach dem System der Bedingungen, denen a, b, c, m genügen müssen, damit die Relationen (13) wirklich eine Gruppe $60 m^{\text{ter}}$ Ordnung definiren.

§ 14.

Nothwendige zahlentheoretische Bedingung.

Die dritte von den Gleichungen (13) giebt, wenn man der linken und rechten Seite den Factor S^4 vorsetzt, und den Factor TS^4 nachsetzt,

$$S^5 TSTST^2 S^4 = S^4 TS^4 \Theta^c$$

oder mit Rücksicht auf die erste und die zweite der Gleichungen

$$TST = S^4 TS^4 \Theta^{-2a-b+c}.$$

Durch Quadriren ergiebt sich hieraus

$$TS^2T = S^4 TS^3 TS^4 \Theta^{-3a-3b+2c}.$$

Jetzt erhält man, indem man stets TS^2T durch die rechte Seite der letzten Gleichung ersetzt:

$$\begin{aligned} TS^3TS^2T &= TS^2TS^3TS^4\Theta^{-2a-3b+2c} \\ &= S^4TS^3TS^2TS^4\Theta^{-4a-6b+4c}. \end{aligned}$$

Wird somit

$$TS^3TS^2T = U$$

gesetzt, so ist

$$U = S^4 US^4 \Theta^{-4a-6b+4c}.$$

Durch Wiederholung kann man nun schliessen, dass auch

$$U = S^{k.4} US^{k.4} \Theta^{k(-4a-6b+4c)}.$$

Mit $k = 5$ ergiebt sich schliesslich

$$U = U\Theta^{4a} . \Theta^{4a} . \Theta^{5(-4a-6b+4c)}.$$

Soll also wirklich erst die m^{te} Potenz von Θ gleich 1 sein, so muss die Congruenz

(14) $$2(6a + 15b - 10c) \equiv 0 \mod m$$

bestehen. *Das Bestehen dieser Congruenz ist also nothwendig dazu, dass die Relationen* (13) *eine Gruppe der Ordnung* $60m$ *definiren.* Dass die Congruenz (14) dafür auch hinreicht, wird im Folgenden gezeigt werden.

§ 15.

Umformung der definirenden Relationen.

Setzt man

$$S' = S\Theta^r, \quad T' = T\Theta^s,$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (13):

(15) $$S'^5 = \Theta^{a'}, \quad T'^2 = \Theta^{b'}, \quad (S'T')^3 = \Theta^{c'}, \quad \Theta^m = 1.$$

Dabei ist zur Abkürzung

(16) $$a' = a + 5r, \quad b' = b + 2s, \quad c' = c + 3r + 3s$$

gesetzt. Weil man nun von den Gleichungen (15) rückwärts wieder zu (13) gelangen kann, so müssen die Gleichungen (13) und (15), wie auch a, b, c, m beschaffen sind, dieselbe Gruppe definiren. Aus der identischen Gleichung

$$6(a+5r) + 15(b+2s) - 10(c+3r+3s) = 6a + 15b - 10c$$

geht hervor, dass die Ausdrücke a', b', c', m, falls (14) erfüllt ist, der Congruenz

(17) $$2(6a' + 15b' - 10c') \equiv 0 \mod m$$

genügen.

Nun will ich m in ein Product

$$m = m_1 \,.\, m_2$$

derart spalten, dass m_1 alle in m vorkommenden Primfactoren 2 und m_2 alle andern Primfactoren enthält. Möglicherweise kann eine der Zahlen m_1 oder m_2 gleich Eins sein. Es lassen nun die Ausdrücke (16) erkennen, dass man r und s gemäss den Bedingungen

$$\begin{matrix} a' \equiv 0 \\ c' \equiv 0 \end{matrix} \mod m_1, \qquad \begin{matrix} b' \equiv 0 \\ a' \equiv c' \end{matrix} \mod m_2$$

bestimmen kann. Vermöge der Congruenz (17) stellt sich dann von selbst heraus, dass

$$2b' \equiv 0 \mod m_1, \qquad a' \equiv 0 \mod m_2.$$

Fasst man aber dies zusammen, so hat man

$$a' \equiv c' \equiv 0 \mod m, \qquad 2b' \equiv 0 \mod m,$$

was nun in (15) einzusetzen ist; man muss dann ein mit (13) gleichwerthiges System erhalten. *Das System* (13) *ist also, wenn* (14) *erfüllt ist, gleichwerthig mit dem Gleichungssystem*

(18) $$S'^5 = 1, \quad T'^2 = \Theta^{k\frac{m}{2}}, \quad (S'T')^3 = 1, \quad \Theta^m = 1,$$

in welchem noch Θ mit den anderen Operationen vertauscht werden kann. Hier genügt es, wenn m ungerade ist, $k = 0$, wenn aber m gerade ist, $k = 0, 1$ zu setzen.

§ 16.

Die zahlentheoretische Bedingung als hinreichend nachgewiesen.

Es ist nachzuweisen, *dass das Bestehen der Congruenz* (14) *dafür hinreichend ist, dass die Relationen* (13) *eine Gruppe* $60 . m^{\text{ter}}$ *Ordnung definiren.* Da nun das System (13) mit (18) gleichwerthig ist, wenn a, b, c und m die Congruenz (14) erfüllen, so ist nur zu zeigen, dass die Relationen (18) eine Gruppe der genannten Ordnung definiren.

Dass nun das System (18) für $k = 0$ eine Gruppe $60m^{\text{ter}}$ Ordnung definirt, ist selbstverständlich. Es trennen sich in diesem Fall die Gleichungen in

$$\Theta^m = 1$$

und in die drei anderen; die Gruppe zerfällt in das directe Product der cyklischen Gruppe m^{ter} Ordnung und der Ikosaedergruppe. Es ist somit nur noch der Fall $k = 1$, in dem m gerade angenommen werden muss, zu erörtern. Wir nehmen zunächst ausserdem noch $m = 2$ an, so erhalten wir die Gleichungen

(19) $$S'^5 = 1, \quad T'^2 = \Theta, \quad (S'T')^3 = 1, \quad \Theta^2 = 1.$$

Diese Gleichungen definiren in der That eine bereits bekannte Gruppe 120^{ter} Ordnung, die im 21^{ten} Paragraphen noch erwähnt werden wird.

Dass man für $k = 1$ und für irgend ein gerades m aus den Gleichungen (18) eine Gruppe der Ordnung $60m$ erhält, kann man folgendermassen einsehen. Man nimmt zunächst die Gleichungen (19) und fügt ein Symbol Θ' hinzu, das mit S', T' und Θ vertauschbar ist, und für das noch

$$\Theta'^{\frac{m}{2}} = \Theta$$

gesetzt wird. Es sind nun alle Bedingungen erfüllt, die zu einem früher von mir gegebenen*) Verfahren der Gruppenbildung nöthig sind. Es ist dem Symbol Θ' der identische Isomorphismus J der Gruppe (19) zugeordnet; dieser versetzt Θ nicht, und andererseits transformirt Θ die Gruppe (19) auf identische Weise, d. h. gerade so wie der Isomorphismus $J^{\frac{m}{2}}$. Die Relationen (19) definiren also mit

$$\Theta'^{\frac{m}{2}} = \Theta$$

*) Mathematische Annalen Bd. 43, p. 334.

zusammen, wenn Θ und Θ' mit allen andern Operationen vertauschbar sein sollen, eine Gruppe von der Ordnung $\frac{m}{2}\cdot 120$. Man hat aber jetzt die Relationen

$$S'^5 = 1,\quad T'^2 = \Theta'^{\frac{m}{2}},\quad (S'T')^3 = 1,\quad \Theta'^m = 1.$$

Diese sind von der gewünschten Form und definiren eine Gruppe $60m^{\text{ter}}$ Ordnung w. z. b. w. *Diese Gruppe* $60m^{\text{ter}}$ *Ordnung soll mit* $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ *bezeichnet werden; sie existirt nur, wenn* m *gerade ist.*

§ 17.

Discussion der erhaltenen Gruppen.

Wir haben jetzt nachgewiesen, dass die Relationen (13), wenn die Congruenz (14) besteht, eine Gruppe $60m^{\text{ter}}$ Ordnung definiren, und zwar die allgemeinste, welche den früher gemachten Voraussetzungen entspricht. Dieselben Gruppen ergeben für $k = 0$ und ein beliebiges m und für $k = 1$ und ein gerades m die Relationen (18). Es wären nur noch die verschiedenen Gruppen zu discutiren, die man so aus (18) erhält. Für $k = 0$ haben wir schon eine zerfallende Gruppe erhalten. Ist aber $k = 1$ und m gerade, so setze man wieder

$$m = m_1 m_2,$$

wo m_2 ungerade, und

$$m_1 = 2^\alpha$$

ist. Wird jetzt

$$\Theta^{m_2} = \Theta_1,\quad \Theta^{m_1} = \Theta_2$$

gesetzt, so spaltet sich das System (18) in das System

$$(20)\qquad S'^5 = 1,\quad T'^2 = \Theta_1^{2^{\alpha-1}},\quad (S'T')^3 = 1,\quad \Theta_1^{2^\alpha} = 1$$

und die Gleichung

$$\Theta_2^{m_2} = 1.$$

Die durch das System (20) definirte Gruppe ist vermöge der aufgestellten Definition mit $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ zu bezeichnen. Wenn also die Zahl $m = 2^\alpha \,.\, m_2$, und m_2 ungerade ist, so zerfällt $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ in das directe Product der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ und der cyklischen Gruppe m_2^{ter} Ordnung. Dass die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ nicht zerfällt, wird in § 23 nachgewiesen werden.

Durch Zusammenfassung ergiebt sich jetzt das Resultat:

Satz X. *Wenn eine Gruppe* Δ *der Ikosaedergruppe in der Weise meroedrisch isomorph ist, dass jeder Operation der Gruppe* Δ *eine Operation der Ikosaedergruppe, der Identität dieser aber eine cyklische Untergruppe* m^{ter} *Ordnung in* Δ *entspricht, so zerfällt* Δ *entweder in das directe Product der Ikosaedergruppe und der cyklischen Gruppe*

m^{ter} Ordnung oder die Zahl m ist gerade, und die Gruppe Δ stimmt mit der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ überein. Diese letztere Gruppe zerfällt oder zerfällt nicht, je nachdem m einen ungeraden Factor enthält oder nicht.

§ 18.

Gruppe, die mit $\mathfrak{G}_{168}$ meroedrisch isomorph ist. Zahlentheoretische Bedingungen.

Nach Analogie der in den vorhergehenden Paragraphen ausgeführten Entwicklung wird jetzt die folgende Aufgabe behandelt. Es ist eine Gruppe Δ gesucht, die eine cyklische Untergruppe Γ von der m^{ten} Ordnung ausgezeichnet enthält, und zwar so, dass die Gruppe $\Delta | \Gamma$ mit $\mathfrak{G}_{168}$ übereinstimmt. Man kann durch dieselben Ueberlegungen, die früher angewendet wurden, zu einem System von Relationen gelangen. Es ergiebt sich, da die Gleichungen

$$A_1^7 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad (A_1^6 A_3)^3 = 1, \quad (A_1^4 A_3)^4 = 1$$

die Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ definiren*), dieses Mal das System

$$(21) \quad S^7 = \Theta^a, \quad T^2 = \Theta^b, \quad (S^6 T)^3 = \Theta^c, \quad (S^4 T)^4 = \Theta^d, \quad \Theta^m = 1,$$

wobei hinwiederum Θ mit allen anderen Operationen vertauschbar zu denken ist.

Jede Gruppe von der gesuchten Beschaffenheit muss aus den Relationen (21) hervorgehen; diese Relationen können aber auch noch andere Gruppen geringerer Ordnung liefern. Es sind die Bedingungen zu finden, unter denen die Relationen wirklich eine Gruppe von der Ordnung $168 \,.\, m$ definiren. Nun ergiebt die dritte von den Relationen (21) mit Rücksicht auf die erste und zweite sofort vier Gleichungen

$$S^6 T S^6 T S^6 T = \Theta^c, \qquad T S T S T S = \Theta^{3a+3b-c},$$
$$T S^6 T = S T S \Theta^{-2a-b+c}, \qquad T S T = S^6 T S^6 \Theta^{a+2b-c}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man noch durch Quadriren

$$T S^5 T = S T S^2 T S \Theta^{-5a-3b+2c}, \quad T S^2 T = S^6 T S^5 T S^6 \Theta^{3a+3b-2c}.$$

Die vierte der Gleichungen (21) führt aber auf die folgenden Relationen

$$S^4 T S^4 T S^4 T S^4 T = \Theta^d,$$
$$T S^3 T S^3 T S^3 T S^3 = \Theta^{4a+4b-d},$$
$$T S^4 T = S^3 T S^3 T S^3 \Theta^{-3a-2b+d},$$
$$T S^3 T = S^4 T S^4 T S^4 \Theta^{a+2b-d}.$$

Wenn man nun jedesmal den eingeklammerten Ausdruck durch seine

*) Wir verdanken diese Relationen Herrn Dyck. Vergl. Annalen Bd. 20, p. 40 und p. 41. Die Operationen A_1 und A_3 sind genau die ebenso benannten des Herrn Dyck.

im Vorhergehenden gegebene Umformung ersetzt, so findet man allmählich

$$(TS^2T)S^4T = S^6TS^5(TS^3T)\Theta^{4a+3b-2c}$$
$$= S^6TS^2TS^4TS^4\Theta^{6a+5b-2c-d}.$$

Setzt man somit

$$TS^2TS^4T = U,$$

so ist

$$U = S^6US^4\Theta^{6a+5b-2c-d}$$

und auch

$$U = S^{6k}US^{4k}\Theta^{(6a+5b-2c-d)k}.$$

Mit $k = 7$ ergiebt sich nun

$$\Theta^{52a+35b-14c-7d} = 1.$$

Soll die Ordnung der Gruppe sich nicht reduciren, so muss auch Θ wirklich von der m^{ten} Ordnung sein, und es ist die Congruenz

(22) $$52a + 35b - 14c - 7d \equiv 0 \mod m$$

nothwendig.

Durch ähnliche Umformungen wird eine zweite Congruenz erhalten. Es ist

$$(TST)S^4T = S^6(TS^3T)\Theta^{2a+2b-c}$$
$$= S^3TS^4TS^4\Theta^{4a+4b-c-d}.$$

Auf der andern Seite findet man jedoch

$$TS(TS^4T) = (TS^4T)S^3TS^3\Theta^{-3a-2b+d},$$
$$= S^3TS^3(TS^6T)S^3\Theta^{-6a-4b+2d},$$
$$= S^3TS^4TS^4\Theta^{-8a-5b+c+2d}.$$

Durch Vergleich der beiden letzten Resultate ergiebt sich die Congruenz

(23) $$-12a - 9b + 2c + 3d \equiv 0 \mod. m.$$

Das Zusammenbestehen der Congruenzen (22) *und* (23) *ist also nothwendig dafür, dass die Relationen* (21) *eine Gruppe der Ordnung* $168m$ *definiren.* Dass das Zusammenbestehen dieser Congruenzen auch hinreichend ist, wird später gezeigt werden.

§ 19.

Umformung der definirenden Relationen.

Wir setzen jezt

$$S' = S\Theta^r, \qquad T' = T\Theta^s.$$

Auf diese Weise tritt an Stelle des Systems (21) das gleichwerthige:

(24) $$S'^7 = \Theta^{a'},\ T'^2 = \Theta^{b'},\ (S'^6T')^3 = \Theta^{c'},\ (S'^4T')^4 = \Theta^{d'},\ \Theta^m = 1,$$

wobei $a', b', c',$ und d' die Ausdrücke

(25) $$a' = a + 7r,\ b' = b + 2s,\ c' = c + 18r + 3s,$$
$$d' = d + 16r + 4s$$

bedeuten sollen. Vermöge der Identitäten

$$52a' + 35b' - 14c' - 7d' = 52a + 35b - 14c - 7d,$$
$$-12a' - 9b' + 2c' + 3d' = -12a - 9b + 2c + 3d$$

müssen a', b', c', d', falls die Congruenzen (22) und (23) erfüllt sind, von selbst den Congruenzen

(26) $$\left.\begin{array}{r} 52a' + 35b' - 14c' - 7d' \equiv 0 \\ -12a' - 9b' + 2c' + 3d' \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod. } m$$

genügen.

Ich spalte jetzt wieder m in die Factoren m_1 und m_2, wobei m_1 aus den in m enthaltenen Primfactoren 2 bestehen soll. Von den beiden Zahlen r und s, die zunächst noch beliebig waren, kann man die Erfüllung der Congruenzen

$$a' \equiv c' \equiv 0 \text{ mod. } m_1, \qquad b' \equiv d' \equiv 0 \text{ mod } m_2$$

verlangen, wie man durch einen Blick auf die Ausdrücke (25) erkennt. Bestimmt man r und s auf diese Weise, so müssen in Folge von (26) auch die Congruenzen

$$b' \equiv d' \text{ mod } m_1,\ 2b' \equiv 2d' \equiv 0 \text{ mod } m_1,\ a' \equiv c' \equiv 0 \text{ mod. } m_2$$

bestehen, d. h. es ist dann

$$2b' \equiv 2d' \equiv a' \equiv c' \equiv 0 \text{ mod } m$$

und

$$b' \equiv d' \text{ mod } m.$$

Die Relationen (24) bekommen dann das folgende Aussehen

(27) $$S'^7 = 1,\ T'^2 = \Theta^{k\frac{m}{2}},\ (S'^6 T')^3 = 1,\ (S'^4 T')^4 = \Theta^{k\frac{m}{2}},\ \Theta^m = 1.$$

Hier ist $k = 0$ zu setzen, wenn m ungerade ist, und $k = 0, 1$, wenn m gerade ist.

Die Relationen (21) *sind, wenn a, b, c, d und m den Congruenzen* (22) *und* (23) *genügen, mit dem System* (27) *gleichwerthig.*

§ 20.

Die zahlentheoretischen Bedingungen werden als hinreichend nachgewiesen. Discussion der Gruppen.

Um nun nachzuweisen, dass das Bestehen von (22) und (23) dafür hinreicht, dass das System (21) eine Gruppe $168m^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, hat man nur zu zeigen, dass (27) eine Gruppe von der Ordnung $168m$ definirt. Dies ist aber für $k = 0$ unmittelbar ersichtlich; man erhält in diesem Fall das directe Product der cyklischen Gruppe

m^{ter} Ordnung und der Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$. Ist aber $k = 1$, so nimmt man zuerst wieder $m = 2$ an, wodurch man auf die Relationen

(28) $S'^7 = 1,\ T'^2 = \Theta,\ (S'^6 T')^3 = 1,\ (S'^4 T')^4 = \Theta,\ \Theta^2 = 1$

kommt. Diese Relationen definiren eine bekannte Gruppe 336^{ter} Ordnung, welche im nächsten Paragraphen noch zur Sprache kommen wird. Der Fall, in dem $k = 1$ und m gleich irgend einer geraden Zahl ist, wird auf den Fall $m = 2$ ganz so zurückgeführt, wie dies in der analogen Frage in § 16 geschehen ist. Es definiren also die Relationen

$$S^7 = 1,\ T^2 = \Theta^{\frac{m}{2}},\ (S^6 T)^3 = 1,\ (S^4 T)^4 = \Theta^{\frac{m}{2}},\ \Theta^m = 1,$$

wenn m *gerade ist*, eine Gruppe der Ordnung $168m$, *und diese Gruppe soll mit* $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ *bezeichnet werden. Damit sind nun auch die Congruenzen* (22) *und* (23) *als hinreichend dafür nachgewiesen, dass das System* (21) *eine Gruppe* $168\,m^{\text{ter}}$ *Ordnung ausdrückt.*

Es fragt sich noch, was für Gruppen wir erhalten haben. Da die Relationen (21) mit Rücksicht auf die genannten Bedingungen mit dem System (27) gleichwerthig sind, so können wir dieses System statt des Systems (21) discutiren. Für $k = 0$ spaltet sich nun, wie wir schon gesehen haben, die cyklische Gruppe m^{ter} Ordnung ab. Für $k = 1$ ist m gerade anzunehmen, und es liegt die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ vor. Diese zerfällt, wenn m einen ungeraden Factor enthält. Es sei nämlich wieder

$$m = 2^\alpha m_2,$$

m_2 ungerade, und $\alpha \geqq 1$, ferner

$$\Theta_1 = \Theta^{m_2},\quad \Theta_2 = \Theta^{2^\alpha};$$

es trennen sich dann die Gleichungen (27) in das System

(29) $S'^7 = 1,\ T'^2 = \Theta_1^{2^{\alpha-1}},\ (S'^6 T')^3 = 1,\ (S'^4 T')^4 = \Theta_1^{2^{\alpha-1}},$

$$\Theta_1^{2^\alpha} = 1$$

und in die Gleichung

$$\Theta_2^{m_2} = 1.$$

Somit zerfällt die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ in das directe Product der Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(2^\alpha)}$ und der cyklischen Gruppe m_2^{ter} Ordnung. Dass die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(2^\alpha)}$ nicht zerfällt, wird in § 23 nachgewiesen werden.

Das Ergebniss kann jetzt folgendermassen zusammengefasst werden:

Satz XI. *Wenn eine Gruppe* Δ *der Gruppe* $\mathfrak{G}_{168}$ *in der Weise isomorph ist, dass jeder Operation von* Δ *eine Operation der Gruppe* $\mathfrak{G}_{168}$ *und der Identität dieser Gruppe eine cyklische Untergruppe* m^{ter} *Ordnung in* Δ *entspricht, so ist* Δ *entweder gleich dem directen Product der Gruppe* $\mathfrak{G}_{168}$ *und der cyklischen Gruppe* m^{ter} *Ordnung, oder*

es ist m gerade, und Δ *stimmt mit der Gruppe* $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ *überein. Diese letztere Gruppe zerfällt oder zerfällt nicht, je nachdem die Zahl m einen ungeraden Factor enthält oder nicht.*

§ 21.

Ueber specielle Gruppen, die aus homogenen Substitutionen gebildet werden.

In § 16 und in § 20 habe ich je auf eine specielle Gruppe hingewiesen, deren Existenz als bekannt angesehen werden konnte. Es waren dies die durch die Gleichungen (19) und (28) definirten Gruppen. Diese Gruppen entspringen aus der Theorie der linearen homogenen Substitutionen mit zwei Veränderlichen. Hiezu wären noch einige Bemerkungen zu machen. Zunächst will ich festsetzen, dass das Product der Substitution

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

in die Substitution mit den Coefficienten a', b', c', d' durch die Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix} \tag{30}$$

bestimmt sein soll. Es geschieht diese Bestimmung wegen der Analogie mit gewissen Buchstabenvertauschungen, und ich bemerke ausdrücklich, dass die hier gewählte Auffassung der in der Theorie der quadratischen Formen meist angenommenen entgegengesetzt ist. Vermöge der Formel (30) bestimme ich das Product UV dadurch, dass ich die Substitution U in die Substitution V einsetze.

Die sämmtlichen Substitutionen mit ganzzahligen Coefficienten und der Determinante 1 werden durch Iteration und Combination von

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt*). *Betrachtet man nun die Coefficienten der Substitutionen mod p, und ist p eine Primzahl, so hat man* $p(p+1)(p-1)^2$ *Substitutionen mit beliebiger, der Null incongruenter Determinante und* $p(p^2-1)$ *Substitutionen der Determinante* 1. *Jene bilden eine Gruppe* $\mathfrak{L}_{p(p+1)(p-1)^2}$, *diese eine Gruppe* $\mathfrak{K}_{p(p^2-1)}$, die aus S_0 und T_0 erzeugt wird. Jeder Substitution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kann man eine Vertauschung

---

*) Vergl. Klein-Fricke Bd. I, p. 219 Anm.

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_{\frac{aa+b}{ca+d}} \end{pmatrix}$$

der Buchstaben $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_\infty$ zuordnen, und es ist vermöge der angenommenen Art der Zusammensetzung (vergl. (30)) die Gruppe $\mathfrak{K}_{p(p^2-1)}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ des elften Paragraphen meroedrisch isomorph.

Von Eigenschaften der genannten Gruppen wird hauptsächlich die in Betracht kommen, dass die Gruppe $\mathfrak{L}_{p(p+1)(p-1)^2}$ keine einfache Untergruppe von zusammengesetzter gerader Ordnungszahl enthält. Wäre nämlich eine solche Untergruppe $\mathfrak{H}$ vorhanden, so müsste diese nach dem Satz von Cauchy eine Substitution W von der Ordnung 2 enthalten. Die Rechnung ergiebt nun, dass die Substitution W entweder mit

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

übereinstimmen oder den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv -d \\ a^2 + bc &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \bmod p \tag{31}$$

genügen muss*). Die Substitution Θ_0, die mit allen andern Substitutionen vertauschbar ist, kann der Gruppe $\mathfrak{H}$ nicht angehören, da $\mathfrak{H}$ einfach und von zusammengesetzter Ordnungszahl angenommen war. Es wird somit W den Bedingungen (31) entsprechen, und es ist also die Determinante von W congruent -1. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ enthält also, wenn $p > 2$ ist — und der Fall $p = 2$ kann sowieso nicht in Betracht kommen — Substitutionen, deren Determinante der Eins incongruent ist. Die Substitutionen der Determinante 1 werden somit in $\mathfrak{H}$ eine ausgezeichnete Untergruppe ausmachen. Dies ist mit der Einfachheit von $\mathfrak{H}$ nur dann nicht im Widerspruch, wenn eine einzige Substitution der Determinante 1 in $\mathfrak{H}$ angenommen wird. Dann aber kommt jede Determinante bei den Substitutionen von $\mathfrak{H}$ nur einmal vor. Setzt man zwei Substitutionen zusammen, so multipliciren sich ihre Determinanten, und ordnet man jeder Substitution von $\mathfrak{H}$ ihre Determinante zu, so hat man einen holoedrischen Isomorphismus zwischen der Gruppe $\mathfrak{H}$ und den Determinanten, die bei der Multiplication eine Gruppe vertauschbarer Operationen darstellen. $\mathfrak{H}$ wäre also eine Gruppe vertauschbarer Operationen, was wiederum den gemachten Annahmen widerspricht. *Eine einfache Gruppe von zusammen-*

*) Vergl. Klein-Fricke, I. Bd., p. 393, wo dasselbe Beweismittel verwendet wird.

gesetzter, gerader Ordnungszahl kann also in $\mathfrak{L}_{p(p+1)(p-1)^2}$ *und somit auch in* $\mathfrak{K}_{p(p^2-1)}$ *nicht existiren.*

Durch die Ueberlegungen des 13ten Paragraphen ist schon bewiesen, dass die Relationen (19) eine Gruppe von höchstens 120ter Ordnung definiren. Die speciellen 3 Operationen, welche wir jetzt mit S_0, $T_0\Theta_0$ und Θ_0 bezeichnen, genügen nun modulo 5 den Gleichungen (19) und erzeugen mod 5 eine Gruppe 120ter Ordnung. Daraus ergiebt sich, dass die durch (19) definirte Gruppe genau von der Ordnung 120 ist, und dass zwischen den Operationen S_0, $T_0\Theta_0$ und Θ_0 keine Relation besteht, die sich nicht aus (19) mit Berücksichtigung des Umstands ableiten liesse, dass Θ mit S' und T' vertauscht werden kann. Die Relationen (19) definiren also die Gruppe $\mathfrak{K}_{120}$. Diese Gruppe wäre nun zugleich auch mit $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ zu bezeichnen. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass die Relationen (28) die Gruppe $\mathfrak{K}_{336}$ definiren, weil S_0, T_0, Θ_0 mod 7 die Gleichungen (28) erfüllen. Diese Gruppe $\mathfrak{K}_{336}$, deren Existenz in § 20 benutzt wurde, stimmt zugleich mit $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$ überein.

§ 22.

Bemerkungen über die Gruppen $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$.

Von der aus (18) hervorgehenden Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$, deren Relationen sind

$$S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta^{\frac{m}{2}}, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^m = 1,$$

wollen wir noch beweisen, *dass sie keine mit der Ikosaedergruppe holoedrisch isomorphe Untergruppe enthält.* Es ist hier m gerade, Θ mit S und T vertauschbar. Wäre nun $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ von der vorausgesetzten Eigenschaft, so könnte $\mathfrak{H}$ keine ausgezeichnete Operation, also auch keine Potenz von Θ, ausser der nullten, enthalten. Rechnet man nun in der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ alle Operationen, die sich nur durch Potenzen von Θ unterscheiden, in dieselbe Classe, so könnte $\mathfrak{H}$ aus jeder Classe höchstens eine Operation enthalten. Man hat aber in $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ gerade 60 Operationsclassen, und 60 wäre auch die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{H}$. Es müsste also $\mathfrak{H}$ aus jeder Classe gerade eine Operation enthalten.

Man kann also jetzt annehmen, dass die beiden Operationen

$$S\Theta^r, \quad T\Theta^s$$

in $\mathfrak{H}$ vorkommen; es müssen dann auch die folgenden Operationen

$$(S\Theta^r)^5 = \Theta^{5r}, \ (T\Theta^s)^2 = \Theta^{\frac{m}{2}+2s}, \ \big((S\Theta^r)(T\Theta^s)\big)^3 = \Theta^{3r+3s}$$

in $\mathfrak{H}$ enthalten sein. Es müssten somit die erhaltenen Potenzen von Θ gleich der Identität sein, und also auch die Congruenzen

$$5r \equiv \frac{m}{2} + 2s \equiv 3r + 3s \equiv 0 \mod m$$

bestehen. Diese Congruenzen sind aber widersprechend.

Daraus, dass die Ikosaedergruppe in der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ nicht vorkommt, folgt auch, *dass die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ verschieden ist von dem aus der Ikosaedergruppe und der cyklischen Gruppe m^{ter} Ordnung gebildeten directen Product.* Es sind also die beiden Gruppen, auf welche, wenn m gerade ist, der Satz X führt, wirklich von einander verschieden.

Geradeso wie die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ behandelt worden ist, kann man auch die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ (vergl. § 20) behandeln. *Die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ enthält keine mit $\mathfrak{G}_{168}$ holoedrisch isomorphe Untergruppe. Es ist deshalb die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ auch verschieden von dem aus $\mathfrak{G}_{168}$ und der cyklischen Gruppe m^{ter} Ordnung gebildeten directen Product.* Die beiden Gruppen, auf die der Satz XI, falls m gerade ist, führt, sind verschieden.

§ 23.

Die Gruppen $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(2^\alpha)}$ werden als nichtzerfallend nachgewiesen.

Wir wollen jetzt beweisen, dass die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ nicht zerfällt. Angenommen, die Gruppe zerfiele in das directe Product der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so könnte jedenfalls keine von diesen beiden eine Ikosaedergruppe sein; denn es enthält nach dem Ergebniss des vorigen Paragraphen die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ keine Ikosaedergruppe. Die Factoren der Zusammensetzung der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ sind $60, 2, 2, \ldots 2$. Diese $\alpha + 1$ Factoren müssen sich auf die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ vertheilen, wobei aber keine dieser beiden Gruppen nur den Factor 60 enthalten kann. Wir können also annehmen, dass $\mathfrak{G}$ den Factor 60 und β Factoren 2, $\mathfrak{H}$ aber $\alpha - \beta$ Factoren 2 enthalte; dabei ist $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$ zu denken.

Jetzt sollen die Operationen der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ in der Form

$$\mathfrak{S}_\mu \mathfrak{T}_\nu \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots 60 \,.\, 2^\beta \\ \nu = 1, 2, \ldots 2^{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Dabei bilden die $60 . 2^\beta$ Operationen $\mathfrak{S}$ und die $2^{\alpha-\beta}$ Operationen $\mathfrak{T}$ je eine Gruppe; jene repräsentiren die Gruppe $\mathfrak{G}$, diese die Gruppe $\mathfrak{H}$. Die Operationen $\mathfrak{S}$ sind mit den Operationen $\mathfrak{T}$ vertauschbar, und die sämmtlichen Producte $\mathfrak{S}_\mu \mathfrak{T}_\nu$ von einander verschieden. Nun enthält $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ eine ausgezeichnete Operation Θ von der Ordnung 2^α, diese Operation Θ werde in die Form

$$\mathfrak{S}_\varrho \mathfrak{T}_\sigma$$

gesetzt. Dabei müsste offenbar $\mathfrak{S}_\varrho$ in der Gruppe der Operationen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}_\sigma$ in der Gruppe der Operationen $\mathfrak{T}$ ausgezeichnet enthalten sein; ferner müssten die Ordnungen von $\mathfrak{S}_\varrho$ und $\mathfrak{T}_\sigma$ Theiler von 2^α und eine dieser Ordnungen müsste gleich 2^α sein. Da aber $\mathfrak{T}_\sigma$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ angehört, die nur von der Ordnung $2^{\alpha-\beta}$ ist, so müsste $\mathfrak{S}_\varrho$ von der Ordnung 2^α sein. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthielte also eine ausgezeichnete Operation von der Ordnung 2^α, somit auch eine ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung 2^α und vom Index $\frac{60 \,.\, 2^\beta}{2^\alpha}$, d. h. von einem Index, der kleiner als 60 ist. Sucht man jetzt für die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Reihe der Zusammensetzung, so kann sich im Widerspruch mit der ursprünglichen Annahme die Zahl 60 nicht als Factor der Zusammensetzung ergeben.

Die Annahme, dass $\mathfrak{K}_{60}^{(2^\alpha)}$ zerfalle, ist also nicht möglich. Man findet auf dieselbe Weise, *dass die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(2^\alpha)}$ nicht zerfällt.*

Fünfter Abschnitt.

Die nichtcyklische Gruppe von Primzahlquadratordnung soll ausgezeichnete Untergruppe werden.

§ 24.

Isomorphismen der nichtcyklischen Gruppe der Ordnung p^2. Folgerungen.

Wir betrachten jetzt die nichtcyklische Gruppe Γ von der Ordnung p^2, wobei p eine Primzahl sein soll. Wählt man aus Γ zwei unabhängige Operationen T_1 und T_2 aus, so bestehen die Gleichungen

$$T_1^p = T_2^p = 1, \quad T_1 T_2 = T_2 T_1$$

die zugleich definirende Relationen der Gruppe sind. Ein Isomorphismus der Gruppe Γ in sich ersetzt die Operationen

$$T_1^\alpha T_2^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

durch

$$T_1^{a\alpha+b\beta} T_2^{c\alpha+d\beta},$$

Dabei darf $ad - bc$ nicht durch p theilbar sein. Der genannte Isomorphismus möge kurz durch die homogene Substitution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod p$$

dargestellt werden. Führt man nun diesen Isomorphismus und nach ihm den durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \bmod p$$

ausgedrückten Isomorphismus aus*), so erhält man denjenigen Isomorphismus, welcher der Substitution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix} \mod p$$

entspricht. Dies stimmt mit der in § 21, Gleichung (30) eingeführten Auffassung des Substitutionenproducts überein. Ferner ist im vorliegenden Fall der identische Isomorphismus allein cogredient; es bildet somit jeder Isomorphismus der betrachteten Gruppe Γ eine besondere Classe. Die Anzahl aller Isomorphismen ist $p(p+1)(p-1)^2$; sie constituiren die Gruppe $\mathfrak{L}_{p(p+1)(p-1)^2}$, die in § 21 definirt wurde.

Jetzt denke man sich wieder eine Gruppe Δ, welche die Gruppe Γ ausgezeichnet enthält. Operationen von Δ, die nur um eine Operation von Γ sich unterscheiden, transformiren in diesem Fall Γ in derselben Weise, weil verschiedene Isomorphismen derselben Classe nicht existiren. Es entspricht also jeder Operation der Gruppe $\Delta|\Gamma$ ein bestimmter Isomorphismus der Gruppe Γ in sich. Nimmt man nun die Gruppe $\Delta|\Gamma$ als einfach an, so können (§ 3) nur zwei Fälle eintreten; entweder entspricht jeder Operation von $\Delta|\Gamma$ ein anderer Isomorphismus, oder es entspricht jeder Operation von $\Delta|\Gamma$ der identische Isomorphismus. Im ersten Fall ist $\Delta|\Gamma$ mit einer Untergruppe von $\mathfrak{L}_{p(p+1)(p-1)^2}$ holoedrisch isomorph. Diese Gruppe $\mathfrak{L}_{p(p+1)(p-1)^2}$ enthält aber keine einfache Untergruppe von zusammengesetzter gerader Ordnungszahl (§ 21). Wird also jetzt noch vorausgesetzt, dass $\Delta|\Gamma$ eine zusammengesetzte und gerade Ordnungszahl besitzt, so kann der erste Fall nicht eintreten. Es entspricht dann jeder Operation von $\Delta|\Gamma$ der identische Isomorphismus der Gruppe Γ in sich, d. h. es ist jede Operation der Gruppe Δ mit jeder Operation der Gruppe Γ vertauschbar. Man erhält so den

Satz XII. *Enthält eine Gruppe Δ eine nichtcyklische Gruppe Γ, deren Ordnung ein Primzahlquadrat ist, ausgezeichnet, und ist die Gruppe $\Delta|\Gamma$ einfach und die Ordnung dieser Gruppe gerade und zusammengesetzt, so ist jede einzelne Operation der Gruppe Γ in der Gruppe Δ ausgezeichnet enthalten.*

§ 25.

Gruppen, die mit $\mathfrak{G}_{60}$ und mit $\mathfrak{G}_{168}$ meroedrisch isomorph sind.

Jetzt soll für $\Delta|\Gamma$ speciell die Ikosaedergruppe genommen werden. Man kann dann in Δ S und T so wählen, dass (vergl. § 13)

$$S^5, \; T^2, \; (ST)^3$$

*) Vergl. diese Annalen Bd. 43, p. 314.

Operationen der Gruppe Γ sind. Man erhält dabei schliesslich die Gleichungen

$$(32)\quad \begin{gathered} S^5 = \Theta_1^{a_1}\Theta_2^{a_2}, \quad T^2 = \Theta_1^{b_1}\Theta_2^{b_2}, \quad (ST)^3 = \Theta_1^{c_1}\Theta_2^{c_2}, \\ \Theta_1^p = \Theta_2^p = 1, \end{gathered}$$

in welchen wir die Exponenten $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ nicht kennen. Hier sollen mit dem Buchstaben Θ wieder Operationen bezeichnet werden, die mit allen anderen vertauschbar sind. Mit Rücksicht auf diese Vertauschbarkeit müssen die Relationen (32) auch die vorausgesetzte Gruppe Δ definiren, aus der die Relationen abgeleitet sind. Geht man aber umgekehrt von Gleichungen der Form (32) aus, so erhebt sich die Frage, wie $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ und p beschaffen sein müssen, damit diese Gleichungen wirklich auf eine Gruppe von der Ordnung $60p^2$ führen.

Die Wiederholung der Betrachtungen des 14ten Paragraphen ergiebt dafür als nothwendig das Bestehen der beiden Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} 2(6a_1 + 15b_1 - 10c_1) \equiv 0 \\ 2(6a_2 + 15b_2 - 10c_2) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod p.$$

Mit Hilfe einer Transformation, die der im 15ten Paragraphen ausgeführten analog ist, beweist man, dass diese Congruenzen auch hinreichend sind, und es ergiebt sich dabei gleich eine einfachere Darstellung der gesuchten Gruppen. Führt man nämlich statt S und T die Operationen

$$S' = S\Theta_1^{r_1}\Theta_2^{r_2}, \qquad T' = T\Theta_1^{s_1}\Theta_2^{s_2}$$

ein, so kann man r_1 und s_1 aus a_1, b_1, c_1 und p genau so bestimmen, wie früher r und s aus a, b, c und m gefunden wurden. Ganz ebenso bestimmt man dann r_2 und s_2 aus a_2, b_2, c_2 und p. Man erhält dann als einfachere Form der definirenden Relationen

$$S'^5 = 1, \quad T'^2 = \Theta_1^{\varepsilon_1}\Theta_2^{\varepsilon_2}, \quad (S'T')^3 = 1, \quad \Theta_1^p = \Theta_2^p = 1.$$

In diesen Formeln hat man $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ zu setzen, wenn p eine ungerade Primzahl ist. Wenn aber $p = 2$ ist, so kann man ε_1 und ε_2 unabhängig von einander gleich 0 oder 1 setzen.

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ergeben die Formeln das directe Product der Ikosaedergruppe in zwei cyklische Gruppen p^{ter} Ordnung. Ist $p = 2$, und mindestens eine der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ gleich 1, so setze man

$$\Theta_1^{\varepsilon_1}\Theta_2^{\varepsilon_2} = \Theta'$$

und bezeichne mit Θ'' eine von Θ' unabhängige Operation von der Form

$$\Theta_1^{\alpha_1}\Theta_2^{\alpha_2};$$

man erhält alsdann das System

$$S'^5 = 1, \quad T'^2 = \Theta', \quad (S'T')^3 = 1, \quad \Theta'^2 = 1$$

zusammen mit der Gleichung

$$\Theta''^2 = 1.$$

Es zerfällt also in diesem Fall die Gruppe in die cyklische Gruppe 2^{ter} Ordnung und die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$.

Statt von der Gruppe $\Delta\,|\,\Gamma$, wie wir es bis jetzt gethan haben, zu fordern, dass sie der Ikosaedergruppe gleich sei, kann man auch $\Delta\,|\,\Gamma$ gleich der Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ setzen. Die Untersuchung lässt sich genau ebenso durchführen und ergiebt ein analoges Resultat. Wir fassen beide Resultate in dem folgenden Lehrsatz zusammen:

Satz XIII. *Wenn die Gruppe Δ der Gruppe $\mathfrak{G}_{60}$ ($\mathfrak{G}_{168}$) so isomorph ist, dass jeder Operation von Δ eine Operation von $\mathfrak{G}_{60}$ ($\mathfrak{G}_{168}$) und der identischen Operation dieser Gruppe eine nichtcyklische Untergruppe von der Ordnung p^2 in Δ entspricht, wenn ferner p eine Primzahl ist, so ist entweder Δ gleich dem directen Product von drei einfachen Gruppen, oder es ist $p = 2$ und Δ gleich dem directen Product der Gruppe 2^{ter} Ordnung in die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ ($\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$).*

Sechster Abschnitt.

Metacyklische Gruppen als ausgezeichnete Untergruppen.

§ 26.

Die einfachsten Eigenschaften der metacyklischen Gruppen.

Es sei q eine Primzahl und ϱ eine Zahl, die mod q zum Exponenten m gehört, m ein Theiler von $q-1$, dann bilden die mq metacyklischen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\mu \\ x_{\varrho^\alpha \mu+\beta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots m-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots q-1 \end{pmatrix}$$

der Buchstaben $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{q-1}$ eine Gruppe. Die Indices werden dabei mod q genommen.

Setzt man noch

$$S = \begin{pmatrix} x_\mu \\ x_{\varrho\mu} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} x_\mu \\ x_{\mu+1} \end{pmatrix},$$

so bestehen die Relationen

$$(33) \qquad S^m = 1, \quad S^{-1}TS = T^\varrho, \quad T^q = 1.$$

Diese Relationen können zugleich als definirende für die eben erwähnte Gruppe genommen werden*). Wir wollen diese Gruppe *die zur Primzahl q gehörige metacyklische Gruppe mq^{ter} Ordnung* nennen und im

*) Vergl. diese Annalen Bd. 43, p. 307 ff.

Folgenden mit Γ bezeichnen. Die Zahl m ist hier grösser als 1 zu denken; die Gruppe Γ hängt nicht davon ab, welche zum Exponenten m gehörende Zahl für ϱ gewählt wird*).

Aus der dritten der Gleichungen (33) ergiebt sich nun

$$S^{-\alpha} T^{\gamma} S^{\alpha} = T^{\gamma \varrho^{\alpha}}. \tag{34}$$

Die Operationen S^{α} und T^{γ} sind also nur dann vertauschbar, wenn

$$\gamma \varrho^{\alpha} \equiv \gamma \mod q,$$

d. h. wenn entweder $\gamma \equiv 0 \mod q$, oder $\alpha \equiv 0 \mod m$ ist. Unter denselben Bedingungen, und nur unter diesen, sind auch die Operationen

$$S^{\alpha} T^{\beta}, \quad T^{\gamma}$$

mit einander vertauschbar. Eine Operation $S^{\alpha} T^{\beta}$, in der α der Null mod m incongruent ist, kann also nicht mit allen Operationen der Gruppe Γ vertauschbar sein, ebensowenig eine Substitution T^{γ}, in der γ der Null mod q incongruent ist. Nun sind alle Operationen der Gruppe in der Form

$$S^{\alpha} T^{\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots m-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots q-1 \end{pmatrix}$$

enthalten; es ist daher ersichtlich, *dass die Identität die einzige in Γ ausgezeichnete Operation ist.*

Mit Hilfe der Gleichung (34) findet man successive

$$(S^{\alpha} T^{\gamma})^2 = S^{2\alpha} T^{\gamma(1+\varrho^{\alpha})},$$

$$(S^{\alpha} T^{\gamma})^3 = S^{3\alpha} T^{\gamma(1+\varrho^{\alpha}+\varrho^{2\alpha})},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(S^{\alpha} T^{\gamma})^k = S^{k\alpha} T^{\gamma(1+\varrho^{\alpha}+\varrho^{2\alpha}+\varrho^{3\alpha}+\cdots+\varrho^{(k-1)\alpha})}.$$

Nimmt man α mod m der Null incongruent, so ergiebt sich

$$(S^{\alpha} T^{\gamma})^k = S^{k\alpha} T^{\gamma l},$$

wo l durch die Congruenz

$$(\varrho^{\alpha} - 1) l \equiv (\varrho^{k\alpha} - 1) \mod q$$

bestimmt ist. Für $k = m$ ist nun

$$l \equiv 0 \mod q$$

und somit

$$(S^{\alpha} T^{\gamma})^m = 1.$$

Die m^{te} Potenz jeder in T nicht ausdrückbaren Operation ist also gleich der Identität, die Ordnung einer solchen Operation ein Theiler von m, somit sicher nicht gleich q. *Folglich sind die primitiven Potenzen von T die einzigen Operationen q^{ter} Ordnung.*

---

*) Vergl. ebendaselbst p. 312.

§ 27.

Isomorphismen einer metacyklischen Gruppe in sich.

Man denke sich jetzt die Gruppe Γ auf sich selbst holoedrisch isomorph bezogen. Es werde dadurch S und T durch S' und T' ersetzt, wobei T' von der q^{ten} Ordnung sein muss. Man wird also

$$S' = S^\alpha T^\beta, \qquad T' = T^\gamma$$

setzen, und es ist γ mod q der Null incongruent anzunehmen. Ausserdem ist aber α als relativ prim zu m zu denken, weil sonst aus S' und T' nicht alle mq Operationen der Gruppe Γ wiedererzeugt werden könnten. Da nun die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} S & T \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich darstellt, so müssen S' und T' denselben Gleichungen wie S und T, also den Relationen (33) genügen. Dies ist aber auch hinreichend*). Die vollständige Bedingung für den Isomorphismus ist also in den Gleichungen

$$(S^\alpha T^\beta)^m = 1, \quad T^{-\beta} S^{-\alpha} T^\gamma S^\alpha T^\beta = T^{\gamma\varrho}, \quad T^{\gamma q} = 1$$

gegeben.

Von diesen Gleichungen ist die erste (§ 26) und die letzte von selbst erfüllt. Die mittlere Gleichung besteht dann und nur dann, wenn

$$\gamma\varrho^\alpha \equiv \gamma\varrho \mod q,$$

d. h. in diesem Fall, wenn

$$\alpha \equiv 1 \mod m$$

ist. *Somit sind die sämmtlichen Isomorphismen der Gruppe* Γ *in sich in der Formel*

$$J = \begin{pmatrix} S & T \\ ST^\beta & T^\gamma \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta = 0, 1, 2, \ldots q-1 \\ \gamma = \ 1, 2, \ldots q-1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

§ 28.

Isomorphismenclassen.

Um nun die Isomorphismen in Classen einzutheilen, muss man zunächst die cogredienten Isomorphismen heraussuchen. Setzt man in (34) die Exponenten α und γ gleich 1 und $q-1$, so ergiebt sich nach einer unbedeutenden Umformung

$$T^{-1}ST = ST^{1-\varrho}.$$

---

*) Vergl. Math. Annalen Bd. 43, p. 311.

Nun ist ersichtlich, dass man durch Transformation der Gruppe Γ mit den Operationen S und T beziehungsweise die Isomorphismen

$$J_1 = \begin{pmatrix} S & T \\ S & T^{\varrho} \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} S & T \\ S T^{1-\varrho} & T \end{pmatrix}$$

erhält. So wie S und T die Gruppe Γ erzeugen, so werden J_1 und J_2 die Gruppe der cogredienten Isomorphismen erzeugen, und der allgemeinste cogrediente Isomorphismus wird in der Formel

$$J_1^{r_1} J_2^{r_2}$$

enthalten sein.

Irgend ein Isomorphismus, der mit

$$J = \begin{pmatrix} S & T \\ S T^{\beta} & T^{\gamma} \end{pmatrix}$$

in dieselbe Classe gehört, ist somit in der Form

$$J . J_1^{r_1} . J_2^{r_2} = \begin{pmatrix} S & T \\ S\, T^{r_2(1-\varrho)+\beta\varrho^{r_1}} & T^{\gamma\varrho^{r_1}} \end{pmatrix}$$

vorgestellt. Hier sind r_1 und r_2 noch willkürlich; $\gamma\varrho^{r_1}$ kann vermöge dieser Willkürlichkeit m Werthe annehmen, und $r_2(1-\varrho) + \beta\varrho^{r_1}$ kann, nachdem r_1 fixirt ist, vermöge der Willkürlichkeit von r_2 noch jedem Rest des Moduls q congruent werden. Es folgt hieraus, dass der Isomorphismus

$$J' = \begin{pmatrix} S & T \\ S T^{\beta'} & T^{\gamma'} \end{pmatrix}$$

mit J in dieselbe Classe gehört dann und nur dann, wenn

$$\frac{\gamma'}{\gamma} \bmod q$$

einer Potenz ϱ^{r_1} von ϱ congruent ist.

Es bedeute nun g eine Primitivwurzel des Moduls q. Da ϱ zum Exponenten m gehört, so ist

$$\varrho \equiv g^{n\frac{q-1}{m}} \bmod q,$$

wobei n zu m relativ prim ist. Dies kann auch in der Form

$$Jnd\ \varrho \equiv n \cdot \frac{q-1}{m} \bmod (q-1)$$

geschrieben werden. Die Bedingung

$$\gamma' \equiv \gamma\varrho^{r_1} \bmod q$$

bekommt die Gestalt

$$Jnd\ \gamma' \equiv Jnd\ \gamma + r_1 Jnd\ \varrho \bmod (q-1)$$

oder

$$Jnd\ \gamma' \equiv Jnd\ \gamma \bmod \frac{q-1}{m}.$$

Bildet man jetzt die $\frac{q-1}{m}$ Isomorphismen

$$\begin{pmatrix} S & T \\ S & T^{g^s} \end{pmatrix} \qquad \left(s = 0, 1, 2, \ldots \frac{q-m-1}{m}\right),$$

so ist ersichtlich, dass sie $\frac{q-1}{m}$ verschiedene Classen repräsentiren, und dass jeder beliebige Isomorphismus mit einem dieser $\frac{q-1}{m}$ Isomorphismen in dieselbe Classe gehört. Diese $\frac{q-1}{m}$ Isomorphismen sind die Potenzen des Isomorphismus

$$J_0 = \begin{pmatrix} S & T \\ S & T^g \end{pmatrix},$$

dessen $\frac{q-1}{m}$te Potenz cogredient ist. *Es bilden also die Isomorphismenclassen eine cyklische Gruppe von der Ordnung* $\frac{q-1}{m}$.

Ist speciell $m = q - 1$, so liegt die Gruppe der sämmtlichen $q(q-1)$ metacyklischen Substitutionen vor. Es giebt in diesem Fall nur cogrediente Isomorphismen, und da die Gruppe keine nichtidentische ausgezeichnete Operation besitzt, so ist sie *vollkommen*.

§ 29.

Ergebnisse.

Nehmen wir jetzt an, dass eine Gruppe Δ die metacyklische Gruppe Γ ausgezeichnet enthalte, und dass $\Delta | \Gamma$ eine einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnungszahl sei. Die Isomorphismenclassen der Gruppe Γ sind vertauschbar, wir können also den Lehrsatz II anwenden. Jede Operation von Δ transformirt die Gruppe Γ in cogredienter Weise. Bezeichnet man die Operationen der Gruppe Γ mit

$$V_0, V_1, V_2, \ldots V_{mq-1},$$

so kann man wieder gewisse Operationen

$$U_0, U_1, U_2, \ldots U_{n-1}$$

aus der Gruppe Δ so auswählen, dass jede Operation der Gruppe Δ genau einmal in der Formel

$$U_k V_i$$

enthalten ist. Man kann aber in diesem Fall (vergl. § 1) die Operationen U so auswählen, dass jede von ihnen die Gruppe Γ identisch in sich transformirt, also mit allen Operationen V vertauschbar ist.

Ein Product $U_k U_l$ muss auch die Form UV haben. Setzt man nun

$$U_k U_l = U_{\varphi(k,l)} V_{\psi(k,l)},$$

so muss $V_{\psi(k,l)}$ ebenso wie die Operationen U mit $V_0, V_1, V_2, \ldots V_{mq-1}$

vertauschbar sein. Da aber die Gruppe der V als metacyklische Gruppe nur die identische Operation ausgezeichnet enthält, so ist

$$V_{\psi(k,l)} = 1.$$

Jetzt ist ersichtlich, dass die Operationen U, wenn sie in der geschilderten Weise ausgewählt sind, eine Gruppe bilden, und dass die Gruppe Δ zerfällt.

Man kann jetzt folgende Sätze aussprechen:

Satz XIV. *Wenn eine Gruppe Δ die zur Primzahl q gehörige metacyklische Gruppe Γ von der mq^{ten} Ordnung ausgezeichnet enthält, wenn $m > 1$ und $\Delta|\Gamma$ eine einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnungszahl ist, so spaltet sich die Gruppe Γ von der Gruppe Δ ab.*

Satz XV. *Die zur Primzahl q gehörige metacyklische Gruppe $q(q-1)^{ter}$ Ordnung ist vollkommen und spaltet sich deshalb von jeder Gruppe ab, in der sie ausgezeichnet enthalten ist.*

Siebenter Abschnitt.

Die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ als ausgezeichnete Untergruppe.

§ 30.

Die Isomorphismenclassen der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$.

Es ist im 16^{ten} Paragraphen eine Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ eingeführt worden. Diese Gruppe ist durch die Relationen

$$(35) \qquad S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta^{\frac{m}{2}}, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^m = 1$$

definirt, in denen das Symbol Θ mit allen anderen Symbolen vertauschbar sein soll. Die Zahl m muss gerade sein und soll im Folgenden sonst beliebig sein; je nachdem m eine Potenz von 2 ist oder nicht, ist $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ nichtzerfallend oder zerfallend.

Fügt man den Relationen (35) noch die Gleichung $\Theta = 1$ hinzu, so erhält man die Ikosaedergruppe*), in der die identische Operation allein ausgezeichnet ist. Es geht also jede in der Gruppe (35) ausgezeichnet enthaltene Operation mit $\Theta = 1$ in die Identität über, *d. h. es kann in der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ keine Operation ausgezeichnet enthalten sein, die nicht Potenz von Θ ist.* Andererseits sind die Potenzen von Θ alle ausgezeichnete Operationen.

Nun sei J irgend ein Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ in sich. Es wird dann J an Stelle von Θ nur Θ^n setzen können, wobei zugleich n

*) Vergl. Dyck, Math. Annalen Bd. 20, p. 15.

relativ prim zu m und somit ungerade sein muss. Rechnet man nun die Operationen, welche sich nur um eine Potenz von Θ unterscheiden, in dieselbe Classe, so werden die Operationen der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ durch den Isomorphismus J classenweise mit einander vertauscht. Die Operationsclassen constituiren die Ikosaedergruppe, die (vgl. § 9) nur zwei Arten von Isomorphismen, also nur eine Art contragredienter Isomorphismen besitzt. Stellt man die Ikosaedergruppe als Gruppe der geraden Vertauschungen der Elemente 0, 1, 2, 3, 4 dar, so kann man die Vertauschungen

$$\mathfrak{S} = (01234), \qquad \mathfrak{T} = (12)\,(34)$$

als ihre erzeugenden Operationen betrachten. Diese Operationen genügen den Relationen

$$\mathfrak{S}^5 = 1, \quad \mathfrak{T}^2 = 1, \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{T})^3 = 1.$$

Transformirt man nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ mit der Transposition (12), so ergiebt sich der Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S} & \mathfrak{T} \\ \mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S}^2\mathfrak{T}\mathfrak{S}^4 & \mathfrak{T} \end{pmatrix};$$

dieser Isomorphismus ist contragredient und von der Ordnung 2. Hat man ferner in der Formel

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S} & \mathfrak{T} \\ \mathfrak{S}' & \mathfrak{T}' \end{pmatrix}$$

irgend einen Isomorphismus der Ikosaedergruppe in sich, so kann man $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{T}'$ durch Transformation mit einer geeigneten Operation der Ikosaedergruppe selbst entweder in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ oder in $\mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S}^2\mathfrak{T}\mathfrak{S}^4$ und $\mathfrak{T}$ verwandeln.

Dies kann nun wieder auf die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ übertragen werden. Stellt die Formel

$$\begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S', & T', & \Theta^n \end{pmatrix}$$

irgend einen Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ in sich dar, so kann man S' und T' durch Transformation mit einer geeigneten Operation der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ entweder in $S\Theta^a$ und $T\Theta^b$ oder in $STS^2TS^4\Theta^a$ und $T\Theta^b$ verwandeln. Theilt man nun auch die Isomorphismen der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ in sich in Classen ein (vergl. § 2), so ergiebt sich, *dass in den Formeln*

(36)
$$\begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S\Theta^a, & T\Theta^b, & \Theta^n \end{pmatrix}$$

und

(37)
$$\begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ STS^2TS^4\Theta^a, & T\Theta^b, & \Theta^n \end{pmatrix}$$

jede Isomorphismenclasse der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ mindestens einmal enthalten ist. Dabei sind aber die Zahlen a und b noch auf besondere Art zu wählen.

§ 31.

Bedingungen für die Zahlen a und b.

Damit die Formel (36) einen Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ in sich darstellt, müssen die Operationen $S\Theta^a$, $T\Theta^b$ und Θ^n die Relationen (35) befriedigen. Es müssen also die Gleichungen

$$(38)\quad (S\Theta^a)^5 = 1,\ (T\Theta^b)^2 = (\Theta^n)^{\frac{m}{2}},\ (S\Theta^a T\Theta^b)^3 = 1,\ (\Theta^n)^m = 1$$

bestehen, d. h. diese Gleichungen müssen sich aus (35) als nothwendige Folgen ergeben, wenn man den Umstand mit berücksichtigt, dass Θ mit den Operationen S und T vertauschbar ist. Man erhält nun aus (38) die Congruenzen:

$$5a \equiv 0,\quad 2b + \frac{m}{2} \equiv \frac{mn}{2},\quad 3a + 3b \equiv 0 \bmod m.$$

Da hier n ungerade ist, so ist die 2^te^ Congruenz mit

$$2b \equiv 0 \bmod m$$

gleichbedeutend. Mit Hilfe der Identitäten

$$(39)\quad \begin{aligned} a &= \quad 2(3a+3b) - 5a - 3(2b), \\ b &= -5(3a+3b) + 3(5a) + 8(2b) \end{aligned}$$

erkennt man jetzt, dass

$$a \equiv b \equiv 0 \bmod m$$

zu setzen ist. *Diese Bedingung ist nothwendig und hinreichend dafür, dass* (36) *einen Isomorphismus vorstellt.*

Damit (37) einen Isomorphismus repräsentirt, müssen die Gleichungen

$$(40)\quad (STS^2TS^4\Theta^a)^5 = 1,\ (T\Theta^b)^2 = (\Theta^n)^{\frac{m}{2}},\ (STS^2TS^4\Theta^a T\Theta^b)^3 = 1$$

bestehen. Von diesen Gleichungen ergiebt die erste zunächst

$$STS^2TS^4STS^2TS^4STS^2TS^4STS^2TS^4STS^2TS^4\Theta^{5a} = 1,$$

und indem man für S^5 jedesmal 1 und für T^2 jedesmal $\Theta^{\frac{m}{2}}$ setzt, erhält man

$$STS^2\,\Theta^{\frac{m}{2}}S^2\,\Theta^{\frac{m}{2}}S^2\,\Theta^{\frac{m}{2}}S^2\,\Theta^{\frac{m}{2}}S^2TS^4\Theta^{5a} = 1$$

oder

$$\Theta^{\frac{m}{2}+5a} = 1.$$

Also ist

$$(41)\qquad 5a + \frac{m}{2} \equiv 0 \bmod m$$

zu setzen. Die zweite von den Gleichungen (40) ergiebt, mit Rücksicht darauf, dass n ungerade ist,

$$(42)\qquad 2b \equiv 0 \bmod m.$$

Die dritte der Gleichungen hat zunächst die Form

$$(43)\qquad STS^2TS^4TSTS^2TS^4TSTS^2TS^4T\Theta^{3a+3b} = 1.$$

Nun ergiebt sich aus den Gleichungen (35) (vergl. die Rechnungen in § 14):

$$TS^4T = STS$$

und durch Quadriren dieser Gleichung

$$TS^3T = STS^2TS\Theta^{\frac{m}{2}}.$$

Man forme jetzt (43) um, indem man TS^4T und TS^3T mehrmals durch die eben gefundenen Ausdrücke ersetzt. Man erhält so

$$\begin{aligned}
1 &= STS^2(TS^4T)STS^2(TS^4T)STS^2(TS^4T)\Theta^{3a+3b} \\
&= S(TS^3T)S^2(TS^3T)S^2(TS^3T)S\Theta^{3a+3b} \\
&= S^2TS^2(TS^4T)S^2(TS^4T)S^2TS^2\Theta^{3a+3b+3\frac{m}{2}} \\
&= S^2TS^3(TS^4T)S^3TS^2\Theta^{3a+3b+3\frac{m}{2}} \\
&= S^2(TS^4T)S^4TS^2\Theta^{3a+3b+3\frac{m}{2}} \\
&= S^3TS^5TS^2\Theta^{3a+3b+3\frac{m}{2}} \\
&= \Theta^{3a+3b}.
\end{aligned}$$

Somit erhält man noch die Congruenz

$$(44)\qquad 3a + 3b \equiv 0 \bmod m.$$

Die Congruenzen (41), (42), (44) ergeben mit Hilfe der Identitäten (39)

$$a \equiv b \equiv \frac{m}{2} \bmod. m.$$

Diese Bedingung ist nothwendig und hinreichend dafür, dass (37) *einen Isomorphismus darstellt.*

§ 32.

Gruppe der Isomorphismenclassen.

Jeder der Isomorphismen (36) ist also in der Formel

$$J_n = \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S, & T, & \Theta^n \end{pmatrix}$$

enthalten, wo n die sämmtlichen $\varphi(m)$ Reste des Moduls m, die zu m relativ prim sind, durchläuft. Setzt man

$$J' = \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ STS^2TS^4\Theta^{\frac{m}{2}}, & T\Theta^{\frac{m}{2}}, & \Theta \end{pmatrix},$$

so sind die Isomorphismen (37) in der Form

$$J'J_n$$

enthalten. Es ist ferner

$$J_n J_{n'} = J_{n'} J_n = J_{nn'},$$
$$J' J_n = J_n J'$$

und, wie die directe Rechnung ergiebt,

$$J'^2 = 1.$$

Die $2\varphi(m)$ in den Formen

$$J_n, \quad J' J_n$$

enthaltenen verschiedenen Isomorphismen bilden also eine Gruppe und sind sämmtlich mit einander vertauschbar. Diese $2\varphi(m)$ Isomorphismen sind zugleich die sämmtlichen in (36) und (37) enthaltenen und repräsentiren deshalb (§ 30) jede Isomorphismenclasse.

Ausser J_1 sind alle diese Isomorphismen contragredient. Dies versteht sich nämlich für die Isomorphismen $J' J_n$ von selbst, da diese auch dann contragredient bleiben, wenn Θ der identischen Operation gleichgesetzt wird. Soll aber J_ν cogredient sein, so muss eine Operation U der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ existiren, so dass die Operationen S, T, Θ durch U in S, T, Θ^ν transformirt werden. Setzt man wieder für den Augenblick $\Theta = 1$, so muss aus U eine Operation entstehen, welche alle Operationen der Ikosaedergruppe in sich transformirt, also identisch ist. Es ist deshalb

$$U = \Theta^k$$

zu setzen. Jetzt ergiebt die Transformation

$$U^{-1}\Theta U = \Theta,$$

während

$$U^{-1}\Theta U = \Theta^\nu$$

erhalten werden sollte. Wenn ν der Eins mod m incongruent ist, so liegt ein Widerspruch vor. Es ist also nur für $\nu = 1$ der Isomorphismus J_ν cogredient. J_1 ist aber der identische Isomorphismus. Da nun die $2\varphi(m)$ Isomorphismen eine Gruppe bilden, und unter Ihnen nur der identische cogredient ist, so können auch keine zwei der Isomorphismen gefunden werden, die sich nur um einen cogredienten Isomorphismus unterscheiden. Also repräsentirt jeder der Isomorphismen eine andere Classe, und es ergiebt sich der Satz:

Die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ besitzt $2\varphi(m)$ Isomorphismenclassen; diese sind, wenn sie als Operationen betrachtet werden, mit einander vertauschbar.

§ 33.

Gruppen, die mit der cyklischen meroedrisch isomorph sind.

Es möge jetzt eine Gruppe Δ von folgenden Eigenschaften bestimmt werden. Δ soll eine mit $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ holoedrisch isomorphe ausgezeichnete Untergruppe Γ enthalten, und es soll $\Delta \mid \Gamma$ die cyklische Gruppe μ^{ter} Ordnung sein. Es muss dann in Δ eine Operation U vorhanden sein, deren μ^{te} Potenz

$$U^\mu = V$$

der Gruppe Γ angehört, während

$$U, U^2, \ldots U^{\mu-1}$$

nicht in Γ enthalten sind. Die Transformation der Gruppe Γ durch die Operation U giebt einen Isomorphismus J der Gruppe Γ in sich. Es darf J die Operation V nicht versetzen, und es muss J^μ gleich dem cogredienten Isomorphismus sein, den man erhält, wenn Γ mit V transformirt wird*).

Da man an Stelle von U die Operation

$$U' = UW$$

einführen kann, wobei W eine geeignet zu wählende Operation der Gruppe Γ bedeutet, so kann an Stelle von J irgend ein Isomorphismus der Gruppe Γ in sich treten, der mit J in dieselbe Classe gehört. Man wird somit J gleich einem der im vorigen Paragraphen behandelten $2\varphi(m)$ Isomorphismen, also gleich J_n oder gleich $J'J_n$ setzen. Es ist dann auch J^μ einem jener $2\varphi(m)$ Isomorphismen gleich, und da J^μ cogredient sein soll, und unter den $2\varphi(m)$ Isomorphismen nur der identische cogredient ist, so hat man entweder

$$J_n^\mu = J_{n^\mu} = 1$$

oder

$$(J'J_n)^\mu = J'^\mu J_{n^\mu} = 1.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

(45) $$n^\mu \equiv 1 \text{ mod. } m;$$

aus der zweiten folgt dasselbe und ausserdem noch, dass μ gerade sein muss.

Transformirt man die Gruppe Γ mit der in ihr enthaltenen Operation V, so entsteht der Isomorphismus J^μ. Da nun bei der jetzt getroffenen Bestimmung J^μ gleich dem identischen Isomorphismus ist,

*) Vergl. Math. Annalen Bd. 43, p. 317.

so ist V mit allen Operationen der Gruppe Γ vertauschbar, und es ist deshalb

$$V = \Theta^\nu.$$

Nun soll diese Operation durch den Isomorphismus nicht versetzt werden. Es ist aber J durch eine der Formeln

$$J_n = \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S, & T, & \Theta^n \end{pmatrix}, \quad J'J_n = \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ STS^2TS^4\Theta^{\frac{m}{2}}, & T\Theta^{\frac{m}{2}}, & \Theta^n \end{pmatrix}$$

vorgestellt, wesshalb J die Operation Θ^ν in $\Theta^{n\nu}$ überführt. Man hat also jedenfalls

$$\nu(n-1) \equiv 0 \text{ mod. } m$$

anzunehmen.

Weil nun der Isomorphismus J, der angiebt, wie S, T und Θ mit Hilfe von U transformirt werden, noch auf zwei Arten gewählt werden kann, so ergeben sich zwei Systeme von Relationen. Ich ersetze dabei das Symbol Θ durch R, weil dasselbe jetzt eine Operation vorstellt, die nicht mehr mit allen andern vertauschbar ist. Als erstes System ergiebt sich:

$$\begin{gathered} U^\mu = R^\nu, \quad U^{-1}SU = S, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^n, \\ S^5 = 1, \quad T^2 = R^{\frac{m}{2}}, \quad (ST)^3 = 1, \\ S^{-1}RS = R, \quad T^{-1}RT = R, \quad R^m = 1. \end{gathered} \tag{46}$$

Das andere System aber ist:

$$\begin{gathered} U^\mu = R^\nu, \quad U^{-1}SU = STS^2TS^4R^{\frac{m}{2}}, \quad U^{-1}TU = TR^{\frac{m}{2}}, \\ U^{-1}RU = R^n, \\ S^5 = 1, \quad T^2 = R^{\frac{m}{2}}, \quad (ST)^3 = 1, \\ S^{-1}RS = R, \quad T^{-1}RT = R, \quad R^m = 1. \end{gathered} \tag{47}$$

In beiden Systemen ist m gerade, n zu m relativ prim, und es bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} n^\mu &\equiv 1 \\ \nu(n-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{mod } m.$$

In der Formel (47) *muss ausserdem noch μ gerade sein.*

Falls die eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind, definiren die Systeme (46) *und* (47) *in der That Gruppen* $60\,m\,\mu^{\text{ter}}$ *Ordnung mit den verlangten Eigenschaften;* dies folgt aus einem Verfahren, das ich im 43ten Bande dieser Annalen p. 334 gewonnen habe. *Andererseits erhält man so alle die verlangten Gruppen. Die verlangten Eigenschaften einer solchen Gruppe Δ können wir folgendermassen zusammen-*

fassen. Es soll Δ der cyklischen Gruppe μ^{ter} Ordnung so isomorph sein, dass jeder Operation von Δ eine Operation der cyklischen Gruppe und der identischen Operation dieser eine Untergruppe der Gruppe Δ vom Typus $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ entspricht.

§ 34.

Eine Eigenschaft der gewonnenen Gruppen.

Keine der gefundenen Gruppen enthält eine Ikosaedergruppe. Es sei nämlich Δ eine durch das System (46) bei specieller Wahl der Exponenten vorgestellte Gruppe. Γ sei die ausgezeichnete Untergruppe von Δ, die aus S, T, R erzeugt wird und die mit $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ holoedrisch isomorph ist. Setzt man für den Augenblick die Operationen der Gruppe Γ der Identität gleich, so werden die Operationen der Gruppe Δ mit einander vertauschbar. Hebt man jetzt die genannte Festsetzung wieder auf und versteht man unter V und W zwei beliebige Operationen der Gruppe Δ, so ergiebt sich, dass

$$V^{-1}WVW^{-1}$$

der Gruppe Γ angehört.

Nun sei H eine in Δ enthaltene Ikosaedergruppe. Da Γ in Δ ausgezeichnet enthalten ist, so müssten die den Gruppen Γ und H gemeinsamen Operationen eine in H ausgezeichnete Untergruppe bilden. H ist aber als Ikosaedergruppe einfach; es kann also nur entweder H ganz in Γ enthalten sein oder H mit Γ bloss die Identität gemein haben. Der erste Fall ist ausgeschlossen, da nach § 22 die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ und also auch Γ keine Untergruppe vom Ikosaedertypus enthält. Es tritt also der andere Fall ein; Γ und H haben keine einzige nichtidentische Operation gemeinsam. Nun kann man aus der Ikosaedergruppe H zwei Operationen V und W so aussuchen, dass die Operation

$$V^{-1}WVW^{-1}$$

von der Identität verschieden ist. Diese Operation, die in H enthalten ist, könnte also nicht zugleich in Γ enthalten sein. Damit aber sind wir mit dem in Widerspruch gekommen, was vorhin von zwei beliebigen Operationen V und W der Gruppe Δ bewiesen wurde.

Derselbe Beweis ist für die durch (47) definirten Gruppen gültig.

§ 35.

Specieller Fall.

Ich nehme jetzt in den Gleichungen (46) und (47) den Exponenten $m = 2$ und den Exponenten μ als Primzahl an. Es ist dann $n = 1$ zu setzen, ν kann gleich 0 oder gleich 1 angenommen werden.

Die Primzahl μ soll zuerst ungerade sein. Das System (47) fällt unter diesen Umständen fort. Das Gleichungssystem (46) ist zu untersuchen. Ist nun $\nu = 0$, so stellt dieses System eine zerfallende Gruppe dar, welche gleich dem directen Product der durch

$$U^\mu = 1$$

und der durch das System

$$S^5 = 1, \quad T^2 = R, \quad (ST)^3 = 1,$$
$$S^{-1}RS = R, \quad T^{-1}RT = R, \quad R^2 = 1$$

vorgestellten Gruppe ist. Die letzte Gruppe, in der R mit allen anderen Operationen vertauscht werden kann, ist die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$.

Ist aber $\nu = 1$, so setze man

$$U' = UR.$$

Da hier R mit U vertauscht werden darf, ist

$$U'^\mu = (UR)^\mu = U^\mu R^\mu = R^{\nu+\mu} = R^{1+\mu} = 1,$$

letzteres, weil die Primzahl μ hier ungerade sein sollte. Dadurch also, dass man U' statt U einführt, wird der Fall $\nu = 1$ auf den Fall $\nu = 0$ reducirt. Es gilt also unter allen Umständen der Satz:

XVI. *Wenn die Gruppe Δ eine Gruppe Γ von ungeradem Primzahlindex ausgezeichnet enthält, und wenn Γ mit der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ holoedrisch isomorph ist, so spaltet sich $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ von Δ ab.*

Die Primzahl μ möge jetzt gleich 2 gesetzt werden. Es kommen dann die beiden Systeme (46) und (47) in Betracht. Das System (46) ergiebt mit $\nu = 0$ wieder eine zerfallende Gruppe. Mit $\nu = 1$ ergiebt dieses System etwas Anderes. Indem nun U mit allen anderen Operationen vertauschbar ist, lassen wir die Gleichungen, welche diese Vertauschbarkeit ausdrücken, weg und setzen Θ an Stelle des Symbols U. Es ergiebt sich

$$R = U^\mu = \Theta^2,$$

und man erhält statt der Gleichungen (46) die folgenden:

$$(48) \qquad S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta^2, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^4 = 1.$$

Es sind noch die Gleichungen (47) zu erörtern. Es möge in diesen Θ an Stelle von R gesetzt werden. Man erhält, je nachdem ν gleich 0 oder 1 ist, entweder das System

$$(49) \qquad U^2 = 1, \quad U^{-1}SU = STS^2TS^4\Theta, \quad U^{-1}TU = T\Theta,$$
$$S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^2 = 1$$

oder das System

$$(50) \qquad U^2 = \Theta, \quad U^{-1}SU = STS^2TS^4\Theta, \quad U^{-1}TU = T\Theta,$$
$$S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^2 = 1.$$

Ausser diesen Gruppen (48), (49), (50) *kann es jedenfalls keine nichtzerfallenden Gruppen* 240ter *Ordnung geben, welche die Gruppe* $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ *ausgezeichnet enthalten.*

Von diesen drei Gruppen ist die durch die Gleichungen (48) dargestellte schon bekannt. Es ist dies die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(4)}$. *Sie zerfällt in der That nicht* (vgl. § 23). Die einzigen in dieser Gruppe ausgezeichneten Operationen sind (vgl. § 30) die folgenden: $1, \Theta, \Theta^2, \Theta^3$, die eine cyklische Gruppe bilden. Die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(4)}$ enthält ferner keine Ikosaedergruppe (§ 22).

In den Systemen (49) und (50) setze man für den Augenblick $\Theta = 1$; sie gehen dann beide in Darstellungen der symmetrischen Gruppe 120ter Ordnung über. In dieser symmetrischen Gruppe ist nur die identische Operation ausgezeichnet enthalten. Es besitzen deshalb die durch (49) und (50) dargestellten Gruppen je nur zwei ausgezeichnete Operationen, nämlich 1 und Θ. Nach dem Ergebniss des vorigen Paragraphen enthalten sie auch keine Ikosaedergruppe.

Jetzt ergiebt sich leicht, *dass die Gruppen* (49) *und* (50) *nicht zerfallen.* Wenn nämlich eine solche Gruppe zerfiele, so könnte nur das directe Product einer Gruppe 4ter Ordnung in die Ikosaedergruppe oder einer Gruppe 2ter Ordnung in eine Gruppe 120ter Ordnung vorliegen. Die letztere Gruppe müsste dabei aus der Ikosaedergruppe gebildet sein. Solcher Gruppen 120ter Ordnung fanden sich drei, die symmetrische Gruppe, das directe Product der Gruppe 2ter Ordnung und der Ikosaedergruppe und die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$. Geht man nun die einzelnen Fälle durch, so findet man, dass eine zerfallende Gruppe, die aus den Factoren der Zusammensetzung 60, 2, 2 gebildet ist — wobei es auf die Ordnung der Factoren nicht ankommt — entweder eine Ikosaedergruppe oder vier ausgezeichnete Operationen enthält. Diese beiden einzigen Möglichkeiten stehen aber mit den entwickelten Eigenschaften der Gruppen (49) und (50) in Widerspruch.

§ 36.

Verschiedenheit der erhaltenen Gruppen 240ter Ordnung.

Die Gruppen (48), (49), (50) sind von einander verschieden. Da die Gruppe (48) vier ausgezeichnete Operationen enthält, während die Gruppen (49) und (50) nur zwei solcher Operationen besitzen, so ist nur noch die Verschiedenheit von (49) und (50) nachzuweisen.

Setzt man nun in einem dieser Systeme für den Augenblick $\Theta = 1$, so erhält man die Gleichungen

$$(51)\qquad \begin{gathered} U^2 = 1, \quad U^{-1}SU = STS^2TS^4, \quad U^{-1}TU = T, \\ S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \end{gathered}$$

welche die symmetrische Gruppe 120ter Ordnung, oder, was dasselbe ist, die Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$ des 11ten Paragraphen vorstellen. Dabei repräsentirt U eine Substitution (vgl. auch § 30 und § 12) der Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$, deren Determinante quadratischer Nichtrest ist, während die Substitutionen, deren Determinante ein quadratischer Rest ist, mit den aus S und T ableitbaren Substitutionen übereinstimmen. Wir brauchen nun noch zwei Beziehungen. Die erste, die sich aus dem 12ten Paragraphen ergiebt, besteht darin, dass in der Gruppe (51) die aus S und T nicht ableitbaren Substitutionen 2ter Ordnung mit einander gleichberechtigt sind. Zu diesen Operationen gehört auch die Operation U. Die zweite Beziehung, welche aus dem 5ten Paragraphen fliesst, besteht darin, dass in der Gruppe (51) keine Untergruppe enthalten ist, die von der aus S und T erzeugten verschieden und mit dieser holoedrisch isomorph wäre.

Diese beiden Ergebnisse sind nun auf die Gruppe (49), in welcher Θ von der Identität verschieden ist, zu übertragen. Man erhält dabei erstens, dass die in S, T, Θ nicht ausdrückbaren Operationen der Gruppe (49), welche ein in Θ ausdrückbares Quadrat besitzen, sich in die Form

$$W^{-1}\,U\,W\Theta^{\alpha}$$

setzen lassen. Zweitens ergiebt sich, dass die Gruppe (49) keine Untergruppe besitzt, die von der aus S, T, Θ erzeugten Untergruppe verschieden und mit dieser holoedrisch isomorph wäre und zugleich die Operation Θ enthielte. Ganz genau dasselbe gilt auch von der Gruppe (50).

Um nun die Verschiedenheit der Gruppen (49) und (50) zu zeigen, wollen wir (50) in die Form

$$\text{(50a)}\quad U'^2 = \Theta',\quad U'^{-1}S'U' = S'T'S'^2T'S'^4\Theta',\quad U'T'U' = T'\Theta',$$
$$S'^5 = 1,\quad T'^2 = \Theta',\quad (S'T')^3 = 1,\quad \Theta'^2 = 1$$

setzen. Angenommen nun, es bestände zwischen den Gruppen (49) und (50a) holoedrischer Isomorphismus, so müssten sich die ausgezeichneten Operationen beider Gruppen entsprechen. Dem Θ müsste also Θ' entsprechen. Da nun die Operationen S, T, Θ eine Untergruppe Γ von (49) erzeugen, der in (50a) eine mit Γ holoedrisch isomorphe, Θ' enthaltende Untergruppe entsprechen muss, und da die aus S', T', Θ' erzeugbare Untergruppe von (50a) die einzige ist, die Θ' enthält und mit Γ holoedrisch isomorph ist, so entsprechen in der That den aus S, T, Θ ableitbaren Operationen die aus S', T', Θ' ableitbaren. Nun müssen denjenigen Operationen von (49), deren Quadrate in Θ ausdrückbar sind, und die nicht aus S, T, Θ ableitbar sind, diejenigen Operationen von (50a) entsprechen, die nicht aus S', T', Θ'

ableitbar sind, und deren Quadrate in Θ' ausgedrückt werden können. Jene Operationen sind in der Formel

$$W^{-1}UW\Theta^{\alpha},$$

diese in der Formel

$$W'^{-1}U'W'\Theta'^{\alpha}$$

enthalten. Es ergeben aber die Gleichungen (49)

$$(W^{-1}UW\Theta^{\alpha})^2 = 1$$

und die Gleichungen (50a)

$$(W'^{-1}U'W'\Theta'^{\alpha})^2 = \Theta'.$$

Das ist widersprechend. Die durch (49) und (50a), d. h. die durch (49) und (50) dargestellten Gruppen können also nicht übereinstimmen.

Wir fassen die Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen zusammen.

Satz XVII. *Die Gruppen* (48), (49) *und* (50) *sind die einzigen nichtzerfallenden Gruppen* 240ter *Ordnung, die eine mit* $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ *holoedrisch isomorphe Untergruppe ausgezeichnet enthalten. Diese drei Gruppen sind verschieden; keine von ihnen enthält eine Ikosaedergruppe.*

§ 37.

Gruppe, die mit der Ikosaedergruppe meroedrisch isomorph ist.

Es möge jetzt eine Gruppe Δ gesucht werden, die eine mit $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ holoedrisch isomorphe Untergruppe Γ ausgezeichnet enthält, und zwar so, dass zugleich $\Delta\,|\,\Gamma$ eine einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnungszahl ist. Nach § 32 sind die Isomorphismenclassen der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ vertauschbare Operationen; man kann also den im 3ten Paragraphen aufgestellten Satz II anwenden. Die Gruppe Γ wird durch jede Operation der sie umfassenden Gruppe Δ auf cogrediente Weise in sich transformirt.

Wir wollen nun unsere Aufgabe gleich dahin beschränken, dass die Gruppe $\Delta\,|\,\Gamma$ mit der Ikosaedergruppe übereinstimmt, und dass $m = 2$ ist. Die Gruppe Γ ist jetzt also gleich der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$. Als erzeugende Operationen der Gruppe Γ sollen S, T und Θ gewählt werden, so dass die Relationen

$$S^5 = 1,\quad T^2 = \Theta,\quad (ST)^3 = 1,\quad \Theta^2 = 1$$

bestehen, wobei noch Θ mit den anderen Symbolen vertauscht werden darf. Weil nun die Gruppe $\Delta\,|\,\Gamma$ eine Ikosaedergruppe sein soll, kann man aus der Gruppe Δ zwei Operationen S' und T' so auswählen, dass S' und T' und S, T und Θ zusammen die ganze Gruppe Δ erzeugen, und dass die Operationen

(52) $$S'^5, \quad T'^2, \quad (S'T')^3$$
der Gruppe Γ angehören.

Dabei werden S' und T', wie eben gezeigt wurde, jedenfalls die Gruppe Γ in cogredienter Weise in sich transformiren. Man kann aber (vgl. § 1) die Operationen S' und T' nöthigenfalls noch um Factoren, die der Gruppe Γ angehören, so ändern, dass die neuen Operationen S' und T' mit jeder Operation von Γ vertauschbar sind. Dann sind aber auch die Operationen (52), die selbst der Gruppe Γ angehören, mit jeder Operation der Gruppe Γ vertauschbar. In Γ ist jedoch Θ die einzige ausgezeichnete Operation ausser der Identität. Man hat deshalb die Gleichungen
$$S'^5 = \Theta^a, \quad T'^2 = \Theta^b, \quad (S'T')^3 = \Theta^c,$$
in denen jede der Zahlen a, b und c gleich 0 oder 1 ist. Indem man nöthigenfalls S' und T' um den Factor Θ ändert, erreicht man, dass für die veränderten Symbole S' und T' die Gleichungen
$$S'^5 = 1, \quad T'^2 = \Theta^b, \quad (S'T')^3 = 1$$
bestehen. Ist dabei $b = 0$, so trennen sich die Symbole S' und T' gänzlich von den Symbolen S, T und Θ, und man hat eine zerfallende Gruppe.

Mit $b = 1$ ergiebt sich eine neue Gruppe. Diese ist durch die Relationen
$$S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (ST)^3 = 1,$$
(53) $$S'^5 = 1, \quad T'^2 = \Theta, \quad (S'T')^3 = 1,$$
$$SS' = S'S, \quad TT' = T'T, \quad ST' = T'S, \quad TS' = S'T, \quad \Theta^2 = 1$$
und durch die Bedingung definirt, dass sich Θ mit allen Symbolen vertauschen lässt. Zunächst ist allerdings nur Folgendes bewiesen: *Wenn eine nichtzerfallende Gruppe Δ existirt, welche die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ als ausgezeichnete Maximaluntergruppe vom Index* 60 *enthält, so muss die Gruppe Δ durch die Gleichungen* (53) *dargestellt werden.* Aus der Form dieser Gleichungen geht andererseits hervor, dass in einem aus S', T', S, T, Θ irgendwie gebildeten Product sich die Symbole S' und T' zur Linken schaffen lassen, während man die Factoren Θ an das rechte Ende bringen kann. Alle Producte reduciren sich somit vermöge der Gleichungen (53) und durch Vertauschung des Symbols Θ mit den andern Symbolen auf höchstens $60 \,.\, 60 \,.\, 2$ Formen. Es ist nun zunächst zu zeigen, dass man wirklich eine Gruppe von $60.60.2$ Operationen aus den Relationen (53) erhält, und dann, dass diese Gruppe nicht zerfällt.

§ 38.

Hilfsbetrachtung. Ordnung der Gruppe (53).

Der erste der genannten Punkte erledigt sich durch ein einfaches Princip. Man kann folgenden Satz aufstellen:

Wenn zwei Gruppen G und H von der $m\mu^{\text{ten}}$ und $n\mu^{\text{ten}}$ Ordnung je eine aus ausgezeichneten Operationen bestehende Untergruppe μ^{ter} Ordnung enthalten, und wenn diese Untergruppen miteinander holoedrisch isomorph sind, so lässt sich stets eine Gruppe $mn\mu^{\text{ter}}$ Ordnung herstellen. Man nimmt zu diesem Zweck die Operationen der Gruppe G mit denen der Gruppe H vertauschbar an und identificirt die sich entsprechenden Operationen der beiden Untergruppen.

Zum Zweck des Beweises sollen

$$S_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots m-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1 \end{pmatrix}$$

die Operationen der Gruppe G und

$$T_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, \ldots n-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1 \end{pmatrix}$$

die der Gruppe H bedeuten. Die Operationen S_{0k} sollen eine Untergruppe der Gruppe G bilden und jede von ihnen in G ausgezeichnet enthalten sein. Dasselbe soll von den Operationen T_{0k} und der Gruppe H gelten. Die dadurch gebildeten Untergruppen von G und H sollen holoedrisch isomorph sein, wenn man allgemein S_{0k} und T_{0k} sich entsprechen lässt ($k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1$). Durch directe Productbildung entsteht zunächst aus G und H eine Gruppe Δ von der Ordnung $mn\mu^2$. Die Operationen dieser Gruppe können in der Form

$$S_{ik} T_{hl}$$

geschrieben werden. In der Gruppe Δ constituiren nun die Operationen

$$S_{0k}^{-1} T_{0k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1)$$

eine ausgezeichnete Untergruppe Γ von der μ^{ten} Ordnung. Jetzt kann man eine Gruppe $\Delta \mid \Gamma$ von der Ordnung $mn\mu$ definiren; diese ist die gewünschte.

Sind die Gruppen G und H durch definirende Relationen gegeben, so wird man für ihre erzeugenden Operationen zunächst ganz verschiedene Symbole anwenden. Die Relationen für die Gruppe Δ werden dann erhalten, indem man die Relationen für G und für H zusammennimmt und die Bestimmung hinzufügt, dass die erzeugenden Operationen der einen Gruppe mit denen der anderen vertauschbar sein sollen. Um nun zur Gruppe $\Delta \mid \Gamma$ zu gelangen, hat man noch die Operationen $S_{0k}^{-1} T_{0k}$ der Identität gleichzusetzen. Man wird also

S_{0k} in den erzeugenden Operationen von G, T_{0k} in denen von H ausdrücken und die Ausdrücke einander gleichsetzen. Alle die Gleichungen, welche man so für $k = 0, 1, 2, \ldots \mu - 1$ erhält, sind zu den definirenden Relationen der Gruppe Δ hinzuzunehmen; dadurch gewinnt man dann die definirenden Relationen der zu bildenden Gruppe $mn\mu^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die Anwendung dieses Princips auf das System (53) ist leicht. Man denke sich zwei Gruppen vom Typus $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$, jede von der Ordnung $60 \,.\, 2$. Durch unser Princip entsteht *eine Gruppe der Ordnung* $60 \,.\, 60 \,.\, 2$, *welche den Relationen* (53) *entspricht.*

§ 39.

Die Gruppe (53) zerfällt nicht.

Es ist noch zu beweisen, dass die durch die Relationen (53) dargestellte Gruppe nicht zerfällt. Da die Gruppe die Factoren der Zusammensetzung 60, 60, 2 besitzt, so könnte sie jedenfalls nur auf zwei Arten zerfallen, entweder in eine Ikosaedergruppe und eine Gruppe 120^{ter} Ordnung oder in eine Gruppe 2^{ter} Ordnung und eine von der Ordnung $60 \,.\, 60$. Diese Gruppe von der Ordnung $60 \,.\, 60$ müsste dabei aus zwei Factoren der Zusammensetzung gebildet sein, die beide gleich 60 sind, sie könnte also nach dem Ergebniss des 10^{ten} Paragraphen nur das directe Product zweier Ikosaedergruppen sein. Man sieht also, dass, wenn die Gruppe (53) zerfiele, sich eine Ikosaedergruppe von ihr abspalten lassen müsste. Somit müsste dann auch in (53) eine Ikosaedergruppe ausgezeichnet enthalten sein.

Es wird sofort gezeigt werden, dass dies nicht der Fall ist. Ich werde überhaupt den folgenden Satz beweisen: *Die Gruppe* (53) *enthält im Ganzen* 120 *Ikosaedergruppen, und diese bilden zwei Classen von je* 60 *unter einander gleichberechtigten.* Damit ist dann auch erwiesen, dass *die Gruppe* (53) *nicht zerfällt.*

Denken wir uns nun aus den Symbolen S, T und Θ des Systems (53) sechzig verschiedenwerthige Ausdrücke

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_{60} \tag{54}$$

gebildet. Die Ausdrücke sind so zu wählen, dass von den 60 Operationen, die sie vorstellen, keine zwei durch Multiplication mit Θ in einander übergehen. Diese 60 Operationen bilden keine Gruppe. Fügt man aber zu den definirenden Relationen (53) die Gleichung $\Theta = 1$ hinzu, so stellen die Ausdrücke (54) sechzig neue Operationen vor, die immer noch von einander verschieden sind und die Ikosaedergruppe bilden. Wir wollen dies dadurch formuliren, dass wir sagen, die

Ausdrücke (54) stellen mod Θ die Ikosaedergruppe dar. Man bilde nun ebenso aus S', T' und Θ sechzig Ausdrücke

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_{60}, \tag{55}$$

die mod Θ wieder eine Ikosaedergruppe darstellen. Bedeutet jetzt Δ die durch das System (53) definirte Gruppe, so ist in der Formel

$$A_i B_k \Theta^\varepsilon \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, 3, \ldots 60 \\ \varepsilon = 0, 1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

jede Operation von Δ gerade einmal enthalten, wie sich aus dem Ende des 37ten Paragraphen ergiebt.

Wir wollen alle Untergruppen der Gruppe Δ, die Ikosaedertypus besitzen, bestimmen. H sei eine solche Untergruppe. Die Operationen von H lassen sich in den Formen

$$AB\Theta^\varepsilon,\ A'B'\Theta^{\varepsilon'},\ A''B''\Theta^{\varepsilon''}, \ldots \tag{57}$$

ausdrücken; dabei sind A, A', A'', ... Glieder der Reihe (54), $B, B', B'', \ldots$ Glieder der Reihe (55). Betrachten wir die Ausdrücke

$$A,\ A',\ A'', \ldots \tag{58}$$

genauer. Zunächst ist nicht ausgeschlossen, dass unter diesen gleiche sind. Daraus, dass die Operationen (57) eine Gruppe bilden und aus dem Umstand, dass jede Operation von Δ nur auf eine Weise in die Form (56) gesetzt werden kann, folgt, dass die Ausdrücke (58) mod Θ eine Gruppe $\mathfrak{L}$ bilden. Jeder Operation der Gruppe H entspricht nun ein Glied der Reihe (57), also eine Operation der zuletzt erwähnten Gruppe $\mathfrak{L}$. Damit haben wir zwischen der Gruppe H und der Gruppe $\mathfrak{L}$ einen holoedrischen oder meroedrischen Isomorphismus. Da nun H eine Ikosaedergruppe, also eine einfache Gruppe ist, so besteht entweder $\mathfrak{L}$ nur aus der Identität allein, oder es entspricht jeder Operation von H eine andere Operation der Gruppe $\mathfrak{L}$. Im ersten Fall wären die Ausdrücke (58) mod Θ der Identität gleich, d. h. es wären alle diese Ausdrücke Potenzen von Θ. Dann würden aber alle Operationen der Reihe (57) sich aus S', T' und Θ erzeugen lassen, somit wäre die Gruppe H eine Untergruppe der aus S', T' und Θ erzeugten Gruppe. Die letztere Gruppe ist aber vom Typus $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ und kann nach dem Ergebniss des 22ten Paragraphen keine Ikosaedergruppe enthalten. Der erste Fall führt also auf einen Widerspruch. Es bleibt also nur der 2te Fall übrig, in dem die Gruppen H und $\mathfrak{L}$ holoedrisch isomorph sind. In diesem Fall sind die Ausdrücke (58) abgesehen von der Reihenfolge mit (54) identisch.

Ganz ebenso wird gezeigt, dass die in (57) vorkommenden Ausdrücke B, B', B'', ... verschieden sind und, abgesehen von der Reihenfolge, mit den Ausdrücken (55) übereinstimmen. Man kann nun durch die Anordnung der Glieder die Reihe (57) in die Form

(57a) $$A_1 B_{i_1} \Theta^{\varepsilon_1},\ A_2 B_{i_2} \Theta^{\varepsilon_2},\ \ldots A_{60} B_{i_{60}} \Theta^{\varepsilon_{60}}$$

bringen. Hier bedeutet $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ eine Permutation von $1, 2, \ldots 60$. Setzt man nun zwei Operationen der letzten Reihe zusammen, wobei wieder eine Operation dieser Reihe entstehen muss, so ergiebt sich Folgendes. So oft

$$A_k A_l = A_m \Theta^\varrho$$

ist, ist auch

$$B_{i_k} B_{i_l} = B_{i_m} \Theta^\sigma .$$

Die beiden Gruppen, welche durch die Ausdrücke (54) und (55) dann dargestellt werden, wenn man diese Ausdrücke mod Θ betrachtet, sind durch die Permutation $i_1 i_2 \ldots i_{60}$ holoedrisch isomorph auf einander bezogen. Zwei Ikosaedergruppen kann man aber (§ 7, § 9) auf 120 Arten holoedrisch isomorph auf einander beziehen. Man kann also die Permutation $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ auf 120 Arten wählen. Es fragt sich noch, auf wie viele Arten die Factoren $\Theta^{\varepsilon_1}, \Theta^{\varepsilon_2}, \ldots$ gewählt werden können.

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass die Symbole S und T selbst als Glieder der Reihe (54) auftreten. Es sei $A_1 = S$, $A_2 = T$. Wir wollen nun die entsprechenden Ausdrücke B_{i_1} und B_{i_2} von (55) mit S'' und T'' bezeichnen. Da nun

$$S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (ST)^3 = 1$$

ist, so müssen auch die Gleichungen

$$S''^5 = \Theta^a, \quad T''^2 = \Theta^b, \quad (S''T'')^3 = \Theta^c$$

gelten. Nun kann man aber zu einzelnen Gliedern der Reihe (55) noch Θ als Factor hinzufügen, man kann also, und zwar auf eine einzige Art, S'' und T'' noch so normiren, dass

(59) $$S''^5 = 1, \quad T''^2 = \Theta^b, \quad (S''T'')^3 = 1$$

ist. Wäre nun hier $b \equiv 0 \bmod 2$, so würden S'' und T'' eine Ikosaedergruppe erzeugen, und diese wäre Untergruppe der aus S', T' und Θ erzeugten Gruppe, die vom Typus $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ ist. Dies kann nicht sein. Es ist also $b \equiv 1 \bmod 2$.

Die Reihe (57a), d. h. die Gruppe H, enthält nun die Operationen

$$SS''\Theta^\delta, \qquad TT''\Theta^{\delta'}$$

und somit auch die folgenden

$$(SS''\Theta^\delta)^5, \qquad (SS''\Theta^\delta TT''\Theta^{\delta'})^3,$$

die sich vermöge der Relationen (53) und (59) gleich

$$\Theta^\delta, \qquad \Theta^{\delta+\delta'}$$

berechnen. Die Operation Θ, die mit allen andern vertauschbar ist, kann in der Gruppe H nicht enthalten sein, weil H Ikosaedertypus besitzt. Es ist also

$$\delta \equiv \delta' \equiv 0 \bmod 2$$

anzunehmen. Die Operationen

(60) $$SS'', \quad TT''$$

müssen also in der Gruppe H vorkommen; sie genügen den Relationen

$$(SS'')^5 = 1, \quad (TT'')^2 = 1, \quad (SS''TT'')^3 = 1$$

und erzeugen, wie leicht zu sehen ist, die ganze Ikosaedergruppe H. Damit ergiebt sich auch, dass in der Reihe (57a) die Factoren $\Theta^{e_1}, \Theta^{e_2}, \ldots$ in keiner Weise mehr unbestimmt sind, nachdem die Permutation $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ gewählt ist.

Bildet man andererseits aus S', T' und Θ irgend zwei Ausdrücke S'' und T'', welche den Relationen (59) genügen, wobei $b = 1$ ist, und bildet man aus S, T, S'', T'' die Operationen (60), so erzeugen diese in der That eine Ikosaedergruppe. Nun kann man aber S'' und T'' mod Θ auf 120 Arten wählen; sind sie mod Θ gewählt, so bestimmen sie sich vollends eindeutig. Man findet also in der ganzen Gruppe Δ genau 120 Untergruppen vom Ikosaedertypus.

Transformirt man jetzt das Operationspaar (60) mehrmals bald mit S', bald mit T', so erhält man neue Operationspaare, in denen S und T mit neuen Operationen S'' und T'' verknüpft erscheinen. Im Ganzen erhält man so 60 verschiedene Paare S'', T''; die Transformationen, die wir hier mit S'' und T'' vornehmen, sind nämlich gleichbedeutend mit den Transformationen, welche die mod Θ betrachtete Reihe (55) durch ihre eigenen Operationen erleidet. Man erhält also auf diese Weise auch 60 Operationspaare SS'', TT''. Jetzt transformire man die mit SS'', TT'' erzeugte Ikosaedergruppe mit S. Dies ist dasselbe, wie wenn man zuerst mit SS'' und dann mit S''^{-1} transformirt. Bei der Transformation der Ikosaedergruppe mit der ihr eigenen Operation SS'' ändert sie sich als ganze Gruppe nicht, die Transformation mit S''^{-1} kommt aber gewissen wiederholten Transformationen mit S' und T' gleich. Aehnliches ergiebt sich, wenn man die aus SS'' und TT'' erzeugte Ikosaedergruppe mit T transformirt. Die Transformation mit Θ ändert sogar keine einzige Operation. Wenn man also die eine Ikosaedergruppe fortwährend mit den erzeugenden Operationen der Gesammtgruppe Δ transformirt, so erhält man im Ganzen 60 gleichberechtigte Gruppen.

Die 120 Ikosaedergruppen, die in Δ enthalten sind, theilen sich also in zwei Classen von je 60 gleichberechtigten w. z. b. w.

Das Resultat dieses Paragraphen und der beiden ihm vorangehenden ist also folgendes:

Satz XVIII. *Die einzige nichtzerfallende Gruppe, welche die Gruppe* $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ *als ausgezeichnete Maximaluntergruppe vom Index* 60 *enthält, ist die Gruppe* (53). *Die Gruppe* (53) *enthält* 120 *Ikosaedergruppen, von denen keine in ihr ausgezeichnet ist.*

Achter Abschnitt.

Die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ als ausgezeichnete Untergruppe.

§ 40.

Isomorphismen und Isomorphismenclassen der Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$.

Die Entwicklungen des vorigen Abschnitts lassen sich von der Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ auf die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ übertragen. Diese ist im 20ten Paragraphen eingeführt worden und ist durch die Relationen

$$(61)\quad S^7 = 1,\quad T^2 = \Theta^{\frac{m}{2}},\quad (S^6T)^3 = 1,\quad (S^4T)^4 = \Theta^{\frac{m}{2}},\quad \Theta^m = 1$$

gegeben. Es bedeutet dabei m wieder eine gerade Zahl. Fügt man den Relationen (61) noch die Gleichung $\Theta = 1$ bei, so geht die Gruppe in die Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ über. Statt S und T hat man dann zwei Operationen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, die den Relationen

$$\mathfrak{S}^7 = 1,\quad \mathfrak{T}^2 = 1,\quad (\mathfrak{S}^6\mathfrak{T})^3 = 1,\quad (\mathfrak{S}^4\mathfrak{T})^4 = 1$$

genügen. Man kann dabei $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ durch die Substitutionen

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\alpha+1} \end{pmatrix},\qquad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{-\frac{1}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

der Buchstaben $x_0, x_1, \ldots x_6, x_\infty$ interpretiren, wobei die Indices mod 7 zu betrachten sind. Diese beiden Substitutionen haben die Determinante $+1$, dagegen hat die Substitution

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\frac{1}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

die Determinante -1. Es ist -1 quadratischer Nichtrest der Primzahl 7, und es gehört also $\mathfrak{U}$ der die Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ umfassenden Gruppe $\mathfrak{G}_{336}$, aber nicht der Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ selbst an. Wenn man nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ mit der Substitution $\mathfrak{U}$ transformirt, so erhält man

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{S}\,\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \end{pmatrix},\quad \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{T}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{T}.$$

Wenn man aber nun noch mit $\mathfrak{T}$ transformirt, so erhält man dasselbe, wie wenn man von Anfang an mit der Substitution $\mathfrak{U}\mathfrak{T}$ von der Determinante -1 transformirt hätte. Man erhält

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{T})^{-1}\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathfrak{T}) = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\alpha-1} \end{pmatrix} = \mathfrak{S}^{-1},\quad (\mathfrak{U}\mathfrak{T})^{-1}\mathfrak{T}(\mathfrak{U}\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}.$$

Es ist also

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}, & \mathfrak{T} \\ \mathfrak{S}^{-1}, & \mathfrak{T} \end{pmatrix}$$

ein contragredienter Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ in sich.

Durch Betrachtungen, die denen des 30ten Paragraphen analog sind, ergiebt sich jetzt, *dass in den Formeln*

$$(62)\qquad \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S\Theta^a, & T\Theta^b, & \Theta^n \end{pmatrix}$$

und

$$(63)\qquad \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S^{-1}\Theta^a, & T\Theta^b, & \Theta^n \end{pmatrix},$$

in denen n zu m relativ prim ist, alle Isomorphismenclassen der Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ enthalten sind, wobei aber a und b nicht beliebig gewählt werden dürfen.

§ 41.

Zahlentheoretische Bedingungen. Gruppe der Isomorphismenclassen.

Die Rechnung ergiebt sofort, dass in der Formel (62)

$$a \equiv b \equiv 0 \bmod m,$$

in der Formel (63) aber

$$a \equiv 0, \quad b \equiv \frac{m}{2} \bmod m$$

anzunehmen ist.

Setzt man nun

$$J_n = \begin{pmatrix} S, & T, & \Theta \\ S, & T, & \Theta^n \end{pmatrix},$$

wobei n alle zu m relativ primen Reste durchläuft, und setzt man

$$J' = \begin{pmatrix} S & T & \Theta \\ S^{-1} & T\Theta^{\frac{m}{2}} & \Theta \end{pmatrix},$$

so hat man wieder in den $2\varphi(m)$ Isomorphismen

$$(64)\qquad J_n, \quad J'J_n$$

jede Isomorphismenclasse gerade einmal vorgestellt. Zugleich constituiren die Isomorphismen (64) eine Gruppe vertauschbarer Operationen. Also:

Die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ besitzt $2\varphi(m)$ Isomorphismenclassen. Diese sind vertauschbar.

§ 42.

Gruppen, die mit einer cyklischen Gruppe meroedrisch isomorph sind.

Sucht man nun *eine Gruppe* Δ, *die eine mit* $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ *holoedrisch isomorphe Untergruppe* Γ *ausgezeichnet enthält, so dass zugleich die Gruppe* $\Delta\,|\,\Gamma$ *cyklisch und von der* μ^{ten} *Ordnung ist*, so findet man entweder die Relationen

$$
\begin{aligned}
&U^\mu = R^\nu, \quad U^{-1}SU = S, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^n,\\
(65)\qquad &S^7 = 1, \quad T^2 = R^{\frac{m}{2}}, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = R^{\frac{m}{2}},\\
&S^{-1}RS = R, \quad T^{-1}RT = R, \quad R^m = 1
\end{aligned}
$$

oder die Relationen

$$
\begin{aligned}
&U^\mu = R^\nu, \; U^{-1}SU = S^{-1}, \; U^{-1}TU = TR^{\frac{m}{2}}, \; U^{-1}RU = R^n,\\
(66)\qquad &S^7 = 1, \; T^2 = R^{\frac{m}{2}}, \; (S^6T)^3 = 1, \; (S^4T)^4 = R^{\frac{m}{2}},\\
&S^{-1}RS = R, \quad T^{-1}RT = R, \quad R^m = 1.
\end{aligned}
$$

Hier ist m gerade und n relativ prim zu m; es muss ferner gelten

$$\left.\begin{aligned} n^\mu &\equiv 1\\ \nu(n-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod m,$$

und im Fall der Formel (66) muss μ gerade sein. Unter diesen Bedingungen stellen die Formeln auch stets Gruppen von der Ordnung $168\,m\mu$ vor, die den aufgestellten Bedingungen genügen.

§ 43.

Specialfall.

Es werde jetzt wieder der Fall betrachtet, dass $m = 2$ und μ eine Primzahl ist. Man hat dann $n = 1$ zu setzen, und ν kann gleich 0 oder 1 sein.

Wir nehmen zuerst μ als ungerade Primzahl an. Da dies den Bedingungen des Systems (66) widerspricht, so kann es sich nur um die Gleichungen (65) handeln. Für $\nu = 0$ ergeben diese Gleichungen eine zerfallende Gruppe, indem die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$ sich abspaltet. Ist aber $\nu = 1$, so setze man

$$U' = UR,$$

und es ergiebt sich

$$U'^\mu = 1$$

(vergl. § 35), so dass also der Fall $\nu = 1$ sich auf den Fall $\nu = 0$ reduciren lässt. Somit lässt sich der folgende Satz aussprechen.

XIX. *Wenn die Gruppe Δ eine ausgezeichnete Untergruppe vom Typus $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$ mit ungeradem Primzahlindex besitzt, so spaltet sich die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$ von Δ ab.*

Nunmehr wollen wir $\mu = 2$ annehmen. Es kommen dabei die beiden Systeme (65) und (66) in Betracht. Das System (65) liefert für $\nu = 0$ eine zerfallende Gruppe. Ist aber in diesem selben System $\nu = 1$, so setze man für die Operation U, die jetzt mit allen anderen vertauschbar ist, das Symbol Θ, wodurch die Relationen

$$(67) \quad S^7 = 1, \quad T^2 = \Theta^2, \quad (S^6 T)^3 = 1, \quad (S^4 T)^4 = \Theta^2, \quad \Theta^4 = 1$$

entstehen. Das System (66) ergiebt für $\nu = 0$ die Gleichungen

$$(68) \quad \begin{aligned} &U^2 = 1, \quad U^{-1} S U = S^{-1}, \quad U^{-1} T U = T\Theta, \\ &S^7 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (S^6 T)^3 = 1, \quad (S^4 T)^4 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1, \end{aligned}$$

in welchen Θ an Stelle der mit allen anderen Operationen vertauschbaren Operation R gesetzt worden ist. Für $\nu = 1$ ergiebt das System (66) auf dieselbe Weise die Relationen

$$(69) \quad \begin{aligned} &U^2 = \Theta, \quad U^{-1} S U = S^{-1}, \quad U^{-1} T U = T\Theta, \\ &S^7 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (S^6 T)^3 = 1, \quad (S^4 T)^4 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1. \end{aligned}$$

Es lassen sich nun auch die übrigen in den Paragraphen 34, 35 und 36 gegebenen Ausführungen übertragen. Man erhält so die folgenden Resultate:

Satz XX. *Die drei durch die Systeme* (67), (68), (69) *definirten Gruppen sind die einzigen nichtzerfallenden Gruppen der Ordnung* 4.168, *die eine ausgezeichnete Untergruppe vom Typus $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$ enthalten. Die drei Gruppen sind verschieden. Keine von ihnen enthält eine Gruppe vom Typus $\mathfrak{G}_{168}$.*

Die erste der drei Gruppen enthält vier ausgezeichnete Operationen, die eine cyklische Gruppe bilden, die beiden anderen enthalten nur zwei ausgezeichnete Operationen.

Die Betrachtungen der Paragraphen 37 bis 39 wollen wir hier nicht auf den analogen Fall übertragen.

Neunter Abschnitt.

Die aus den Factoren der Zusammensetzung 60, 60 gebildete Gruppe $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ ist ausgezeichnete Untergruppe.

§ 44.

Die in der Gruppe $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ enthaltenen Untergruppen vom Ikosaedertypus.

Wir betrachten jetzt die aus den Factoren der Zusammensetzung 60, 60 gebildete Gruppe, die mit $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ bezeichnet werden möge. Es ist diese Gruppe das directe Product zweier Ikosaedergruppen (vergl. Satz VI in § 10). Um diese Gruppe darzustellen, bezeichnen wir mit

(70) $$A_1, A_2, \ldots A_{60}$$

Operationen, die eine Ikosaedergruppe bilden. Dasselbe soll von

(71) $$B_1, B_2, \ldots B_{60}$$

gelten, wobei zugleich die Benennungen so zu wählen sind, dass A_i und B_i entsprechende Operationen isomorph auf einander bezogener Ikosaedergruppen bedeuten. Ferner seien die Operationen B mit den Operationen A vertauschbar, und die Operationen der Gruppe $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ sollen, jede einmal, durch die Producte

$$A_k B_l \qquad (k, l = 1, 2, 3, \ldots 60)$$

vorgestellt sein.

Zunächst mögen die in der Gruppe $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ enthaltenen Ikosaedergruppen aufgesucht werden. Zu diesem Zweck lassen sich hier die Betrachtungen des 39[ten] Paragraphen, sogar mit einer gewissen Vereinfachung, wiederholen. Man kommt dabei zu dem Resultat, dass 122 Ikosaedergruppen existiren. Es sind dies einmal die Gruppen der Operationen (70) und (71). Jede der übrigen 120 Ikosaedergruppen ist in der Reihe

$$A_1 B_{i_1}, A_2 B_{i_2}, A_3 B_{i_3}, \ldots A_{60} B_{i_{60}}$$

repräsentirt. Dabei ist $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ eine solche Permutation der Zahlen, $1, 2, \ldots 60$, für welche die Substitution

$$\begin{pmatrix} B_1, & B_2, & \ldots & B_{60} \\ B_{i_1}, & B_{i_2}, & \ldots & B_{i_{60}} \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus der Gruppe (71) in sich vorstellt. *Die beiden ersten Ikosaedergruppen sind in der Gruppe $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ ausgezeichnet enthalten; die übrigen theilen sich in zwei Classen von je 60 gleichberechtigten.*

§ 45.

Gruppe, die mit einer von der zweiten Ordnung meroedrisch isomorph ist. Erster Fall.

Wir suchen jetzt eine Gruppe Δ aus den Factoren 2, 60, 60 *zu bilden, die eine ausgezeichnete Untergruppe Γ vom Index* 2 *enthält. Dabei unterscheiden wir gleich zwei Fälle, je nachdem Δ eine Ikosaedergruppe ausgezeichnet enthält oder nicht.* Es muss jede in Δ enthaltene Ikosaedergruppe nach Satz V, § 5 Untergruppe von Γ sein. Diese Gruppe Γ aber, die aus den Factoren 60, 60 zusammengesetzt ist, muss (Satz IX, § 11) vom Typus $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$ sein und enthält somit 122 Ikosaedergruppen, von denen nur 2 in ihr ausgezeichnet sind. Diese beiden allein können allenfalls in Δ ausgezeichnet sein. Transformirt man nun die Gruppe Γ mit Hilfe einer nicht in Γ enthaltenen Operation U der Gruppe Δ, so geht Γ in sich über. Es werden dabei die beiden in Γ ausgezeichneten Ikosaedergruppen jede in sich übergehen oder mit einander vertauscht werden, je nachdem der erste oder der zweite der unterschiedenen Fälle vorliegt. Es sind also im ersten Fall genau zwei ausgezeichnete Ikosaedergruppen in Δ enthalten. In beiden Fällen muss Δ im Ganzen 122 Untergruppen vom Ikosaedertypus besitzen.

Von den beiden Fällen wird zunächst der erste verfolgt. Vorerst bemerke man, dass die Operation U^2 mod Γ der identischen Operation äquivalent ist, d. h. dass U^2 der Gruppe Γ vom Index 2 angehört. Transformirt man jetzt Γ mittelst U und stellt man Γ so vor wie im letzten Paragraphen die Gruppe $\mathfrak{Z}_{60}^{(2)}$, so erhält man die Relationen

$$\begin{aligned} U^{-1} A_\alpha U &= A_{i_\alpha} \\ U^{-1} B_\alpha U &= B_{h_\alpha} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 60).$$

Es bedeuten hier $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ und $h_1, h_2, \ldots h_{60}$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots 60$, wobei noch die Substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{60} \\ A_{i_1} & A_{i_2} & \ldots & A_{i_{60}} \end{pmatrix} \tag{72}$$

einen Isomorphismus der Gruppe (70) in sich und die Substitution

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_{60} \\ B_{h_1} & B_{h_2} & \ldots & B_{h_{60}} \end{pmatrix} \tag{73}$$

einen Isomorphismus der Gruppe (71) in sich vorstellen muss.

Ist einer dieser Isomorphismen cogredient, so spaltet sich eine Ikosaedergruppe von der Gruppe Δ ab, wie sofort gezeigt werden soll. Es macht keinen Unterschied, ob man (72) oder (73) als cogredient annimmt. Man setze einmal (72) cogredient voraus. Es lässt sich

dann an Stelle von U eine Operation $V = UA_s$ einführen, die mit allen Operationen $A_1, A_2, \ldots A_{60}$ vertauschbar ist (vgl. § 1). V^2 gehört der Gruppe Γ an, also

$$V^2 = A_k B_l.$$

Da aber V und B_l mit $A_1, A_2, \ldots A_{60}$ vertauschbar sind, so ist auch A_k mit diesen Operationen vertauschbar, d. h. es ist A_k gleich der identischen Operation der Gruppe (70). Jetzt erkennt man, dass die Relationen

$$\begin{aligned} V^{-1}A_\alpha V &= A_\alpha \\ V^{-1}B_\alpha V &= B_{h_\alpha} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 60)$$

$$V^2 = B_l$$

bestehen. Die aus $A_1, A_2, \ldots A_{60}$ bestehende und die aus V und $B_1, B_2, \ldots B_{60}$ sich erzeugende Gruppe trennen sich nun völlig. Die Gesammtgruppe Δ zerfällt, und es spaltet sich aus ihr eine Ikosaedergruppe ab.

Ist aber keiner der Isomorphismen (72) und (73) cogredient, so kann man statt U eine Operation $V = UA_rB_s$ so einführen, dass an Stelle von (72) und (73) zwei beliebig vorgeschriebene contragrediente Isomorphismen der Gruppen (70) und (71) treten. Wir wählen zwei Isomorphismen 2ter Ordnung. Es wird dann V^2 mit allen Operationen der Gruppe Γ vertauschbar. Da ausserdem V^2 dieser Gruppe selbst angehört, so ergiebt sich leicht, dass

$$V^2 = 1$$

ist. Am einfachsten wird man die Isomorphismen (72) und (73) durch die Formeln

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{60} \\ A_{i_1} & A_{i_2} & \ldots & A_{i_{60}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_{60} \\ B_{i_1} & B_{i_2} & \ldots & B_{i_{60}} \end{pmatrix}$$

bestimmen, so dass $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ in beiden Formeln dieselbe Permutation bedeutet. Die Permutation ist dabei so zu wählen, dass die erste der letzten Formeln irgend einen contragredienten Isomorphismus 2ter Ordnung der Gruppe (70) darstellt. Es bestehen jetzt die Relationen

$$\begin{aligned} V^{-1}A_\alpha V &= A_{i_\alpha} \\ V^{-1}B_\alpha V &= B_{i_\alpha} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 60).$$

$$V^2 = 1$$

Nimmt man andererseits die Permutation $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ so wie eben geschildert an, so definiren die erhaltenen Relationen zusammen mit denjenigen, welche die Multiplication der Operationen A und der Operationen B und die Vertauschbarkeit der A mit den B ausdrücken, wirklich eine Gruppe der Ordnung $2 . 60 . 60$. Dies ergiebt sich

nämlich aus dem Verfahren, das ich in diesen Annalen Bd. 43, p. 334 gegeben habe, wenn man zugleich bedenkt, dass die Substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1, & A_2 B_2, & \ldots & A_{60} B_{60} \\ A_{i_1} B_{i_1}, & A_{i_2} B_{i_2}, & \ldots & A_{i_{60}} B_{i_{60}} \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus 2^{ter} Ordnung der Gruppe Γ ist. Die im Vorhergehenden gegebenen Entwicklungen zeigen auch, dass die resultirende Gruppe dadurch nicht beeinflusst wird, wie man, abgesehen von den schon ausgesprochenen Bedingungen, die Permutation $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ wählt.

Stellt man nun die Gruppe (70) mit Hilfe der Symbole S und T, die Gruppe (71) mit Hilfe der Symbole S' und T' dar, und verwendet man als Isomorphismus der Gruppe (70) in sich den schon im 30ten Paragraphen benutzten Isomorphismus der Ikosaedergruppe, so ergeben sich für die gewonnene Gruppe die Relationen

$$(74)\qquad \begin{gathered} S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \\ S'^5 = 1, \quad T'^2 = 1, \quad (S'T')^3 = 1, \\ U^{-1} S U = S T S^2 T S^4, \quad U^{-1} S' U = S' T' S'^2 T' S'^4, \\ UT = TU, \quad UT' = T'U, \quad U^2 = 1. \end{gathered}$$

Dazu kommt noch die Bedingung, dass S und T mit S' und T' vertauschbar sein sollen. *Eine andere nichtzerfallende Gruppe ausser* (74) *kann jedenfalls im ersten Fall nicht vorhanden sein.* Dass diese Gruppe wirklich nicht zerfällt, wird später gezeigt.

§ 46.

Gelegentliche Entwicklung eines allgemeinen Verfahrens.

Es ist nützlich, die Bildung der Gruppe (74) von einem neuen Princip aus zu betrachten, dieses Princip hat Aehnlichkeit mit dem in § 38 auseinandergesetzten, von dem es sich aber doch zugleich wesentlich unterscheidet. Denken wir uns zwei Gruppen G und H, die mit einer und derselben Gruppe K isomorph sind. Es sollen je m Operationen von G einer Operation der Gruppe K und ebenso je n Operationen der Gruppe H einer Operation der Gruppe K entsprechen. Die Operationen von G seien

$$U_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \mu \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix},$$

die von H seien

$$V_{il} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \mu \\ l = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

und es sei dabei die Bezeichnung so gewählt, dass die m Operationen

$$U_{i1}, \; U_{i2}, \; \ldots \; U_{im}$$

der Gruppe G und die n Operationen

$$V_{i1}, \; V_{i2}, \; \ldots \; V_{in}$$

der Gruppe H derselben Operation der Gruppe K entsprechen. Nun bilde man die $mn\mu$ Ausdrücke

$$(75) \qquad U_{ik}\, V_{il} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \mu \\ k = 1, 2, \ldots m \\ l = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

denen zunächst nur eine formale Bedeutung zukommt, da eine Multiplication der Operationen U mit den andersartigen Operationen V nicht definirt ist.

Die Ausdrücke (75) mögen lediglich als Zeichen angesehen werden, deren Bestimmung es ist, $mn\mu$ verschiedene Objecte zu charakterisiren. Die Multiplication dieser $mn\mu$ Objecte mit einander kann nun durch die Formel

$$(76) \qquad U_{ik}\, V_{il} \times U_{i'k'}\, V_{i'l'} = (U_{ik}\, U_{i'k'})\,(V_{il}\, V_{i'l'})$$

erklärt werden. Es sind nämlich die beiden in Klammer gesetzten Producte bereits definirt. So ist $U_{ik}\, U_{i'k'}$ gleich einer ganz bestimmten Operation U. Ist nun

$$U_{ik}\, U_{i'k'} = U_{i''k''},$$

so ist auch

$$V_{il}\, V_{i'l'} = V_{i''l''},$$

wobei in den beiden letzten Formeln i'' denselben Werth bedeutet. Dies ist eine Folge des Isomorphismus, der zwischen der Gruppe K und den Gruppen G und H besteht. Es stellt somit die rechte Seite von (76) einen Ausdruck

$$U_{i''k''}\, V_{i''l''}$$

vor, in welchem die beiden vorderen Indices übereinstimmen, d. h. es ist diese rechte Seite von (76) unter den Ausdrücken (75) enthalten. Durch die Formel (76) ist also ein Multiplicationsgesetz definirt, vermöge dessen je zwei der $mn\mu$ neuen Objecte, wenn sie mit einander in bestimmter Folge multiplicirt werden, ein Individuum desselben Objectkreises ergeben. Für diese Multiplication bestehen, wie eine nähere Ueberlegung zeigt, alle die Eigenschaften, die gruppentheoretischen Multiplicationen zukommen*). Man ist also auf eine Gruppe $mn\mu^{\text{ter}}$ Ordnung gekommen, die aus neuen Operationen besteht.

Um dieses Princip auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, denke man sich zwei Gruppen 120ter Ordnung, die eine aus allen Vertauschungen der 5 Buchstaben $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, die andere aus den

*) Vergl. z. B. diese Annalen Bd. 43, p. 305.

Vertauschungen der Buchstaben $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ bestehend. Jede dieser Gruppen beziehe man nun so auf die Gruppe 2^{ter} Ordnung, dass den geraden Vertauschungen die Identität der Gruppe 2^{ter} Ordnung entspricht. Durch diese Beziehung der zwei Gruppen 120^{ter} Ordnung auf die Gruppe 2^{ter} Ordnung ist nun nach dem soeben aufgestellten Princip eine Gruppe der Ordnung $2 \,.\, 60 \,.\, 60$ bestimmt. Diese kann auch durch Vertauschungen der 10 Buchstaben $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_5, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_5$ vorgestellt werden. Es werden dabei die Buchstaben α nur unter einander und ebenso die Buchstaben β nur unter einander vertauscht, und es ist eine ungerade Vertauschung der Buchstaben α stets mit einer ungeraden Vertauschung der Buchstaben β, eine gerade Vertauschung der α stets mit einer geraden Vertauschung der β verknüpft*).

Setzt man jetzt noch

$$S = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5), \qquad T = (\alpha_2 \alpha_3)(\alpha_4 \alpha_5),$$
$$S' = (\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5), \qquad T' = (\beta_2 \beta_3)(\beta_4 \beta_5),$$
$$U = (\alpha_2 \alpha_3)(\beta_2 \beta_3),$$

so sind die Gleichungen (74) erfüllt.

§ 47.

Die Gruppe (74) zerfällt nicht.

Wenn eine aus den Factoren der Zusammensetzung $2, 60, 60$ gebildete Gruppe zerfällt, so spaltet sich aus ihr eine Ikosaedergruppe ab (vergl. den Anfang von § 39). Man kann dann die Operationen der Gesammtgruppe in der Form

$$(77) \qquad A_i B_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots \ 60 \\ k = 1, 2, \dots 120 \end{pmatrix}$$

darstellen, wobei die Operationen A eine Ikosaedergruppe bilden und mit den Operationen B, die auch eine Gruppe constituiren, vertauschbar sind. Nun ist aber ersichtlich, dass die Gruppe

$$A_1, A_2, \dots A_{60}$$

cogredient in sich transformirt wird, wenn man auf sie eine der Operationen (77) anwendet. Eine zerfallende Gruppe aus den Factoren 2, 60, 60 wird also stets eine Ikosaedergruppe ausgezeichnet enthalten, die durch jede Operation der ganzen Gruppe cogredient in sich transformirt wird.

Die Gruppe (74) werde jetzt mit Δ bezeichnet, sie ist aus den Factoren 2, 60, 60 gebildet und enthält eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2, nämlich die aus S, T, S', T' erzeugte. Es enthält ferner die Gruppe Δ zwei ausgezeichnete Ikosaedergruppen, die eine

*) Vergl. auch Bolza, Am. Journ. of Math. Vol. XI, p. 201.

wird aus S und T, die andere aus S' und T' erzeugt. Dies sind auch (vergl. den Anfang von § 45) die einzigen in Δ ausgezeichneten Ikosaedergruppen. Da nun die Operation U jede dieser beiden Ikosaedergruppen auf contragrediente Weise in sich transformirt, so kann die Gruppe Δ nicht zerfallen.

Wir können die Resultate dieses und der beiden vorigen Paragraphen so zusammenfassen:

Satz XXI. *Die Gruppe* (74) *ist die einzige nichtzerfallende Gruppe aus den Factoren* 2, 60, 60, *die eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index* 2 *und eine ausgezeichnete Ikosaedergruppe zulässt, und zwar besitzt sie zwei ausgezeichnete Ikosaedergruppen.*

§ 48.

Zweiter Fall einer Gruppe, die mit der Gruppe zweiter Ordnung meroedrisch isomorph ist.

Wir müssen jetzt wieder an den 45ten Paragraphen anknüpfen. Es wurde daselbst eine Gruppe Δ mit der ausgezeichneten Untergruppe Γ gesucht; Γ besass die Factoren der Zusammensetzung 60, 60, und die Gruppe $\Delta | \Gamma$ war von der zweiten Ordnung angenommen. Γ enthielt zwei ausgezeichnete Ikosaedergruppen. Es bleibt uns noch der Fall übrig, in dem diese Ikosaedergruppen sich vertauschen, wenn sie mit einer nicht in Γ enthaltenen Operation U der Gruppe Δ transformirt werden. Gilt dies für eine Operation U, so gilt dies auch für jede andere von den eben genannten Eigenschaften. Das Quadrat der Operation U ist mod Γ der Identität congruent, d. h. also in Γ enthalten.

Es lassen sich nun die Bezeichnungen der Operationen $A_1, A_2, \ldots A_{60}$ und $B_1, B_2, \ldots B_{60}$, d. h. der Operationen der genannten Ikosaedergruppen (vergl. (70) und (71)) so bestimmen, dass
$$U^{-1} A_\alpha U = B_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 60).$$
Ferner ist
$$U^{-1} B_\alpha U = A_{i_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 60),$$
wobei $i_1, i_2, \ldots i_{60}$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots 60$ bedeutet, die so beschaffen ist, dass
$$J = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \ldots & A_{60} \\ A_{i_1}, & A_{i_2}, & A_{i_3}, & \ldots & A_{i_{60}} \end{pmatrix}$$
einen Isomorphismus der Gruppe (70) in sich vorstellt. Durch Verknüpfen der beiden letzten Gleichungen erhält man
$$U^{-2} A_\alpha U^2 = A_{i_\alpha}.$$
Weil aber U^2 der Gruppe Γ angehört und deshalb von der Form $A_k B_l$ ist, so ergiebt die letzte Gleichung

$$B_l^{-1} A_k^{-1} A_\alpha A_k B_l = A_{i_\alpha}.$$

Hieraus aber folgt, da B_l mit allen Operationen A vertauschbar ist,

$$A_k^{-1} A_\alpha A_k = A_{i_\alpha}.$$

Es ist also J der cogrediente Isomorphismus, den man erhält, wenn man die Gruppe (70) mit ihrer Operation A_k transformirt.

Jetzt führe man statt U die Operation

$$U' = U A_k^{-1}$$

ein. Es berechnet sich leicht, dass

$$\begin{aligned} U'^{-1} A_\alpha U' &= B_\alpha \\ U'^{-1} B_\alpha U' &= A_\alpha \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots 60).$$

Durch die Transformation mit U' werden also die Operationen A mit den gleichnamigen Operationen B vertauscht. Deshalb nun muss U'^2 mit allen Operationen A und B vertauschbar sein, und da U'^2 der Gruppe Γ angehören muss, indem $\Delta | \Gamma$ nur von der Ordnung zwei ist, so ist U'^2 eine ausgezeichnete Operation der Gruppe Γ. Also ist

$$U'^2 = 1.$$

Durch diese Ergebnisse ist im Grund die Gruppe schon beschrieben. Um definirende Relationen aufzustellen, wähle ich zwei Symbole S und T, welche die Gruppe (70), und zwei Symbole S' und T', welche die Gruppe (71) erzeugen sollen; ein weiteres Symbol U von der 2ten Ordnung soll S und S' und ebenso T und T' in einander transformiren. Man erhält so die Relationen

$$\begin{gathered} S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \\ S'^5 = 1, \quad T'^2 = 1, \quad (S'T')^3 = 1, \\ U^{-1} S U = S', \quad U^{-1} T U = T', \quad U^2 = 1. \end{gathered} \tag{78}$$

Durch diese Relationen und durch die Bedingung, dass S und T mit S' und T' vertauschbar sein sollen, muss sich die vorausgesetzte Gruppe definiren lassen, wenn sie existirt. Dass andererseits die Relationen wirklich eine Gruppe der Ordnung $2 \cdot 60^2$ unter der genannten Bedingung definiren, folgt aus dem im 43. Band dieser Annalen p. 329 gegebenen Verfahren. Diese durch die Relationen (78) definirte Gruppe ist aus den Factoren 2, 60, 60 gebildet und enthält eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2; in dieser sind die aus S und T und die aus S' und T' erzeugte Gruppe die ausgezeichneten Ikosaedergruppen, die aber in Δ nicht ausgezeichnet sind. Es besitzt also (vgl. den Anfang von § 45) Δ überhaupt 122 Ikosaedergruppen, von denen keine in Δ ausgezeichnet ist. Dass die Gruppe nicht zerfällt, folgt (§ 39) aus dem letzten Umstand von selbst. Wir fassen die Resultate so zusammen:

Satz XXII. *Die Gruppe* (78) *ist die einzige Gruppe aus den Factoren* 2, 60, 60, *welche eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index* 2 *und keine ausgezeichnete Ikosaedergruppe enthält. Diese Gruppe zerfällt nicht und hat* 122 *Untergruppen vom Ikosaedertypus.*

Zehnter Abschnitt.

Das directe Product der Ikosaedergruppe in eine Gruppe von Primzahlordnung wird zur ausgezeichneten Untergruppe gewählt.

§ 49.

Die Isomorphismen der gegebenen Gruppe in sich.

Ich gehe jetzt von einer Gruppe Γ aus, welche durch die Relationen

(79) $$S^5=1,\quad T^2=1,\quad (ST)^3=1,\quad \Theta^p=1$$

und durch die Bedingung definirt ist, dass Θ mit S und T vertauscht werden kann. In dieser Gruppe sind die Operationen

$$1,\ \Theta,\ \Theta^2, \ldots .\ \Theta^{p-1}$$

die einzigen, welche ausgezeichnet sind. Will man nun einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich construiren, so muss man Θ durch eine Potenz Θ^k ersetzen. Diejenigen Operationen, welche an Stelle von S und T treten, können jedenfalls in die Formen

$$S'\Theta^a,\quad T'\Theta^b$$

gesetzt werden, wobei S' und T' Ausdrücke bedeuten, die aus S und T allein gebildet sind. Die Operationen $S'\Theta^a$ und $T'\Theta^b$ müssen nun denselben Relationen genügen wie die Operationen S und T, an deren Stelle sie treten, so dass also

$$(S'\Theta^a)^5=1,\quad (T'\Theta^b)^2=1,\quad (S'\Theta^aT'\Theta^b)^3=1$$

ist. Dieses Gleichungssystem spaltet sich aber in die beiden folgenden:

$$S'^5=1,\quad T'^2=1,\quad (S'T')^3=1;$$
$$\Theta^{5a}=\Theta^{2b}=\Theta^{3a+3b}=1.$$

Es bestehen also die Congruenzen

$$5a\equiv 2b\equiv 3a+3b\equiv 0 \mod p,$$

woraus mit Hilfe der Identitäten

$$a=2(3a+3b)-5a-3(2b),$$
$$b=5(3a+3b)-3(5a)-7(2b)$$

sofort folgt, dass

$$a\equiv b\equiv 0 \mod p.$$

Somit sind in der Formel

$$(80) \qquad \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & S', & T' \end{pmatrix}$$

alle Isomorphismen der Gruppe Γ in sich enthalten. Hier ist

$$k = 1, 2, 3, \ldots p-1$$

zu setzen, und S' und T' sind so zu wählen, dass

$$\begin{pmatrix} S & T \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus der aus S und T erzeugten Ikosaedergruppe vorstellt.

Nun transformire man in der Formel (80) die untere Reihe mit einer Operation U der Gruppe Γ; dadurch wird einfach der Isomorphismus (80) mit einem cogredienten Isomorphismus multiplicirt. Es genügt hier mit einer Operation U zu transformiren, die aus S und T allein zusammengesetzt ist. Man erkennt, dass durch die genannte Transformation der Exponent k nicht geändert werden kann. Aus dem, was man aber von der Ikosaedergruppe weiss (vgl. § 30), ergiebt sich, dass man U entweder so wählen kann, dass

$$U^{-1}S'U = S, \quad U^{-1}T'U = T,$$

oder so, dass

$$U^{-1}S'U = STS^2TS^4, \quad U^{-1}T'U = T$$

wird, und zwei Isomorphismen von der Form (80), die sich in dieser Hinsicht verschieden verhalten, können nicht in dieselbe Classe gehören. Es werden also die Formeln

$$\begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & S, & T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & STS^2TS^4, & T \end{pmatrix},$$

in denen $k = 1, 2, 3, \ldots p-1$ zu setzen ist, jede Isomorphismenclasse der Gruppe Γ genau einmal repräsentiren.

Setzt man jetzt

$$J_k = \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & S, & T \end{pmatrix},$$

$$J' = \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta, & STS^2TS^4, & T \end{pmatrix},$$

so erscheinen alle Isomorphismenclassen in den $2(p-1)$ Isomorphismen

$$(81) \qquad J_k J'^{\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots p-1 \\ \varepsilon = 0, 1 \end{pmatrix}$$

repräsentirt, und zwar jede nur einmal. Die Isomorphismen (81) bilden aber eine Gruppe vertauschbarer Operationen, weil

$$J_k J'^{\varepsilon} \times J_l J'^{\delta} = J_{kl} J'^{(\varepsilon+\delta)}$$

ist, wie man sofort berechnet.

Man kommt somit zu dem Ergebniss:

Das directe Product der Ikosaedergruppe in die Gruppe von der Primzahlordnung p ist eine Gruppe mit $2(p-1)$ *Isomorphismenclassen. Diese Classen sind, als Operationen betrachtet, vertauschbar.*

§ 50.

Gruppe, die mit einer einfachen Gruppe von zusammengesetzter Ordnungszahl meroedrisch isomorph ist.

Es wird jetzt eine Gruppe Δ gesucht, welche die soeben betrachtete Gruppe Γ ausgezeichnet enthält. Dabei wird zuerst $\Delta|\Gamma$ als einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnungszahl angenommen. In diesem Fall kann man den Satz II des 3[ten] Paragraphen anwenden; jede Operation der Gruppe Δ transformirt die Gruppe Γ in cogredienter Weise in sich.

Bezeichnet man mit $A_1, A_2, \ldots A_{60}$ die Operationen, die aus S und T sich zusammensetzen, so ist jede Operation der Gruppe Γ in der Formel

$$A_\alpha \Theta^\beta \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots 60 \\ \beta = 0, 1, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

einmal enthalten. Man kann jetzt die Operationen $U_1, U_2, \ldots U_r$ so aus der Gruppe Δ auswählen, dass in der Formel

$$U_\varrho A_\alpha \Theta^\beta \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots r \\ \alpha = 1, 2, \ldots 60 \\ \beta = 1, 2, \ldots p-1 \end{pmatrix} \tag{82}$$

jede Operation der Gesammtgruppe Δ einmal und nicht häufiger vorkommt; zugleich kann man es (vergl. § 1) so einrichten, dass jede Operation U die Gruppe Γ nicht bloss cogredient, sondern identisch in sich transformirt. Jede Operation U ist jetzt mit jeder Operation der Gruppe Γ vertauschbar. Da auch das Product von zwei Operationen U in die Form (82) gesetzt werden kann, so ist

$$U_k U_l = U_m A_n \Theta^w. \tag{83}$$

Nun sind aber U_k, U_l, U_m und Θ mit den Operationen der Gruppe Γ vertauschbar; es gilt somit dasselbe von A_n. Diese Operation A_n ist also mit S und T vertauschbar und aus S und T zusammengesetzt. Somit ist

$$A_n = 1.$$

Mit Hilfe der Gleichung (83) erkennt man jetzt, dass die Ausdrücke

$$U_\varrho \Theta^\beta \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots r \\ \beta = 0, 1, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

eine Gruppe bilden. Die Operationen dieser Gruppe sind vertauschbar

mit den Operationen A, welche auch eine Gruppe bilden, und jede Operation der Gesammtgruppe ist in der Formel

$$A_\alpha \times U_\varrho \Theta^\beta$$

genau einmal enthalten. Es spaltet sich somit eine Ikosaedergruppe ab. *Jede Gruppe Δ, welche die im vorliegenden Abschnitt betrachtete Gruppe Γ als ausgezeichnete Maximaluntergruppe von zusammengesetztem Index enthält, ist zerfallend.*

§ 51.

Die gesuchte Gruppe sei mit einer cyklischen Gruppe meroedrisch isomorph.

Die Gruppe Δ, die wir jetzt suchen, soll wiederum die durch das System (79) definirte Gruppe Γ ausgezeichnet enthalten. Es soll aber nunmehr $\Delta \mid \Gamma$ eine Gruppe q^{ter} Ordnung und q eine Primzahl sein; in diesem Fall ist $\Delta \mid \Gamma$ eine cyklische Gruppe. Bedeutet U eine nicht in der Gruppe Γ enthaltene Operation der Gruppe Δ, so ist U mod Γ von der q^{ten} Ordnung; es ist U^q gleich einer Operation der Gruppe Γ, und U erzeugt zusammen mit der Gruppe Γ die ganze Gruppe Δ.

Wird die Gruppe Γ mit Hilfe der Operation U transformirt, so erhält man einen Isomorphismus J der Gruppe Γ in sich. Man kann es nun, nöthigenfalls durch Aenderung der Operation U, so einrichten, dass der Isomorphismus J in der Formel (81) enthalten ist. Die Aenderung der Operation U um einen der Gruppe Γ angehörigen Factor bedeutet nämlich eine Aenderung des Isomorphismus J innerhalb seiner Classe, und die Isomorphismen (81) repräsentiren überhaupt jede Classe. Ist nun J in (81) enthalten, so ist es auch J^q. Es ist aber J^q der Isomorphismus, welcher der Transformation mit U^q, also der Transformation mit einer Operation der Gruppe Γ entspricht. J^q ist also cogredient. In der Formel (81) ist nur der identische Isomorphismus cogredient. Es ist somit

$$J^q = 1, \tag{84}$$

und U^q kann mit allen Operationen der Gruppe Γ vertauscht werden. Da nun U^q der Gruppe Γ selbst angehört, so ist (§ 49)

$$U^q = \Theta^l. \tag{85}$$

Setzt man jetzt

$$J = J_\mu J'^{\nu}, \tag{86}$$

wobei die Bedeutungen von J_μ und von J' aus dem 49^{ten} Paragraphen zu entnehmen sind, so ergiebt sich die Gleichung

$$J^q = J_{\mu^q} J'^{q\nu}.$$

Verbindet man dieses Resultat mit (84), so gewinnt man die Congruenzen

$$(87)\qquad \begin{cases} \mu^q \equiv 1 \mod p \\ q\nu \equiv 0 \mod 2, \end{cases}$$

deren Erfüllung eine nothwendige Bedingung ist.

Man erhält noch eine Congruenz. Wegen der Gleichung (85) ist U mit Θ^l vertauschbar. Es muss also in dem Isomorphismus J der Gruppe Γ, der durch Transformation mit U erhalten wird, Θ^l ungeändert bleiben. Mit Rücksicht auf den für J aufgestellten Ausdruck (86) ergiebt dies

$$\Theta^{l\mu} = \Theta^l$$

oder

$$(88)\qquad l(\mu - 1) \equiv 0 \mod p.$$

Nimmt man andererseits zu den Gleichungen (79), in denen Θ mit S und T vertauschbar ist, ein Symbol U hinzu, setzt man die Gleichung (85) fest, verlangt man, dass U die aus S, T, Θ erzeugte Gruppe gemäss dem Isomorphismus (86) in sich transformiren soll, und dass die Bedingungen (87) und (88) bestehen, so erhält man in der That eine Gruppe von der gesuchten Beschaffenheit. Es ist nämlich dann der Isomorphismus (86) von der Ordnung q und versetzt diejenige Operation der Gruppe Γ nicht, der U^q in (85) gleichgesetzt worden ist. Man hat nun nur das in diesen Annalen Bd. 43, p. 334 gelehrte Verfahren anzuwenden.

Wir trennen die Fälle $\nu \equiv 0 \mod 2$ und $\nu \equiv 1 \mod 2$. Der 2te Fall tritt wegen der Bedingung (87) nur dann ein, wenn die Primzahl $q = 2$ ist. Weil nun Θ nicht mehr mit allen Symbolen vertauschbar zu sein braucht, wird jetzt R für Θ gesetzt; es müssen dann zugleich die Relationen hinzugefügt werden, welche ausdrücken, dass R mit S und T vertauscht werden kann. Man erhält im Fall $\nu \equiv 0$ das System

$$(89)\qquad \begin{gathered} U^q = R^l, \quad U^{-1}SU = S, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^\mu, \\ S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \\ R^{-1}SR = S, \quad R^{-1}TR = T, \quad R^p = 1. \end{gathered}$$

Dabei müssen noch die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \mu^q &\equiv 1 \\ l(\mu-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \mod p$$

bestehen. Im zweiten Fall, in welchem $\nu \equiv 1$ ist, ergeben sich die Relationen

$$(90)\qquad \begin{gathered} U^2 = R^l, \; U^{-1}SU = STS^2TS^1, \; U^{-1}TU = T, \; U^{-1}RU = R^\mu, \\ S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \\ R^{-1}SR = S, \quad R^{-1}TR = T, \quad R^p = 1, \end{gathered}$$

wobei die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \mu^2 &\equiv 1 \\ l(\mu-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod p \tag{91}$$

erfüllt sein müssen.

Die durch (89) *und* (90) *definirten Gruppen sind die einzigen, welche die besprochene Gruppe* Γ *als ausgezeichnete Untergruppe von Primzahlindex enthalten.*

§ 52.

Zerfallende Gruppen.

Das System (89) stellt eine zerfallende Gruppe dar. Es ergeben nämlich die erste, vierte und letzte der Gleichungen (89), dass die Operationen

$$U^\varrho R^\alpha \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \ldots q-1 \\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

eine Gruppe bilden. Indem man diese Gruppe direct mit der Ikosaedergruppe multiplicirt, erhält man die Gruppe (89).

Das System (90) liefert eine zerfallende Gruppe, wenn gleichzeitig $\mu \equiv 1 \bmod p$ und $l \equiv 0 \bmod p$ ist. Es erzeugen dann U, S, T eine mit der symmetrischen Gruppe 120ter Ordnung holoedrisch isomorphe Gruppe. Wenn man die 120 Operationen dieser Gruppe rechts mit allen Potenzen von R multiplicirt, so erhält man jede Operation der Gruppe (90) gerade einmal. Weil jetzt auch R mit den Operationen U, S und T vertauschbar ist, so stellt sich die Gruppe (90) als directes Product der symmetrischen Gruppe 120ter Ordnung in die Gruppe $p$ter Ordnung heraus.

§ 53.

Neue Bildungen.

Nach dem Vorhergehenden haben wir das System (90) weiter zu discutiren, wenn wir nichtzerfallende Gruppen erhalten wollen; dabei ist noch der Fall auszuschliessen, in dem $\mu \equiv 1$ und $l \equiv 0$ ist mod p. Es sollen jetzt die Fälle $p = 2$ und $p > 2$ unterschieden werden. Wenn $p = 2$ ist, so hat man $\mu = 1$ anzunehmen, und l kann vermöge (91) gleich 0 oder gleich 1 gesetzt werden. Da aber $l = 0$ auf den auszuschliessenden Fall führen würde, so haben wir $l = 1$ zu setzen. Es ist nunmehr die Operation R mit allen anderen Operationen vertauschbar, wesshalb für R das Symbol Θ gesetzt werden soll. Die Relationen erhalten nun die Gestalt

$$\begin{gathered} U^2 = \Theta, \quad U^{-1}SU = STS^2TS^4, \quad U^{-1}TU = T, \\ S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^2 = 1. \end{gathered} \tag{92}$$

Nimmt man die Primzahl p ungerade an, so ergiebt (91) entweder $\mu \equiv 1 \bmod p$ und l beliebig oder $\mu \equiv -1 \bmod p$ und $l \equiv 0 \bmod p$. Im ersten Fall ist R mit allen anderen Symbolen vertauschbar; also ist auch

$$(UR^\gamma)^2 = U^2 R^{2\gamma} = R^{l+2\gamma}.$$

Nun kann man jedenfalls γ so bestimmen, dass die Congruenz

$$l + 2\gamma \equiv 0 \bmod p$$

erfüllt ist. Führt man jetzt die Operation

$$U' = UR^\gamma$$

an Stelle von U ein, so erhält man in U', R, S, T dieselben Gleichungen, die vorher in U, R, S, T bestanden, nur dass der neue Exponent l der Null congruent ist. Man hat also in diesem Fall nach dem Ergebniss des vorigen Paragraphen eine zerfallende Gruppe.

Es bleibt nun noch der Fall $\mu \equiv -1 \bmod p$, $l \equiv 0 \bmod p$ übrig. Man gewinnt dabei die Relationen

$$\begin{gathered} U^2=1, \quad U^{-1}SU=STS^2TS^4, \quad U^{-1}TU=T, \quad U^{-1}RU=R^{-1}, \\ S^5=1, \quad T^2=1, \quad (ST)^3=1, \\ RS=SR, \quad RT=TR, \quad R^p=1, \end{gathered} \tag{93}$$

in denen also p eine ungerade Primzahl bedeutet. Es haben sich somit aus (89) *und* (90) *nur die beiden Gruppen* (92) *und* (93) *als möglicherweise nichtzerfallend ergeben.*

§ 54.

Andere Herleitung der beiden letzten Gruppen.

Die beiden durch die Systeme (92) und (93) dargestellten Gruppen können auch nach dem Princip des 46ten Paragraphen gebildet werden. Wir gehen zunächst von drei Gruppen aus. Die erste ist durch das System

$$\begin{gathered} \mathfrak{U}^2=1, \quad \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{U}=\mathfrak{S}\mathfrak{T}\mathfrak{S}^2\mathfrak{T}\mathfrak{S}^4, \quad \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{U}=\mathfrak{T}, \\ \mathfrak{S}^5=1, \quad \mathfrak{T}^2=1, \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{T})^3=1 \end{gathered} \tag{94}$$

dargestellt, es ist dies im Grund die symmetrische Gruppe von der 120ten Ordnung. Die zweite Gruppe ist die zur ungeraden Primzahl p gehörende metacyklische Gruppe $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Relationen

$$\mathfrak{V}^2=1, \quad \mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{V}=\mathfrak{R}^{-1}, \quad \mathfrak{R}^p=1 \tag{95}$$

definirt ist. Die dritte Gruppe ist die cyklische von der 4ten Ordnung und kann durch die Gleichungen

$$\mathfrak{W}^2=\vartheta, \quad \vartheta^2=1 \tag{96}$$

ausgedrückt werden. Jede dieser drei Gruppen soll nun isomorph auf

die Gruppe 2$^{\text{ter}}$ Ordnung bezogen werden, und zwar sollen der identischen Operation dieser Gruppe in (94) die aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ gebildeten Operationen, in (95) die Potenzen von $\mathfrak{R}$, in (96) die Operationen 1 und ϑ entsprechen.

Leitet man nun aus den Gruppen (94) und (96) nach dem Princip von § 46 eine neue Gruppe ab, so enthält diese die Operationen

$$U = \mathfrak{U}\mathfrak{W}, \quad S = \mathfrak{S}\mathfrak{W}^0, \quad T = \mathfrak{T}\mathfrak{W}^0, \quad \Theta = \mathfrak{U}^0\vartheta,$$

welche den Relationen (92) genügen. Man erhält in der That die Gruppe (92). Wendet man aber das genannte Princip auf die Gruppen (94) und (95) an, so erhält man eine Gruppe, in welcher die Operationen

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}, \quad \mathfrak{S}\mathfrak{V}^0, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{V}^0, \quad \mathfrak{U}^0\mathfrak{R}$$

vorkommen. Werden nun diese Operationen der Reihe nach mit U, S, T, R bezeichnet, so erfüllen diese 4 Symbole die Gleichungen (93). Man erhält mittelst des erwähnten Princips die Gruppe (93).

§ 55.

Die zwei Gruppen zerfallen nicht.

Es ist noch zu beweisen, dass die durch (92) und (93) dargestellten Gruppen nicht zerfallen. Setzt man in dem System (92) das Symbol Θ gleich der Identität, so erhält man die symmetrische Gruppe 120$^{\text{ter}}$ Ordnung, die keine ausgezeichnete Operation, ausser der identischen, besitzt. Daraus folgt, dass die durch (92) dargestellte Gruppe nur die 2 ausgezeichneten Operationen 1 und Θ besitzt. Diese Gruppe enthält eine Untergruppe vom Ikosaedertypus, die aus S und T erzeugt wird. Wir wollen noch zeigen, dass die Gruppe (92) keine mit der symmetrischen 120$^{\text{ter}}$ Ordnung holoedrisch isomorphe Untergruppe besitzt. Wäre nämlich H eine solche Untergruppe, so könnte diese keine ausgezeichnete Operation, also auch nicht die Operation Θ enthalten. Ordnet man jetzt die Operationen der ganzen Gruppe in Paare von der Form

$$Y, \quad Y\Theta,$$

so kann H von jedem Paar höchstens eine Operation enthalten. Da aber die Anzahl der Paare gleich 120, also gleich der Ordnung von H ist, so muss H von jedem Paar genau eine Operation besitzen. Es wird daher entweder die Operation U oder die Operation $U\Theta$ in der Untergruppe H enthalten sein. Nun ist

$$U^2 = (U\Theta)^2 = \Theta,$$

und es müsste also, entgegen dem schon Gefundenen, doch Θ in H vorkommen. Damit ist ein Widerspruch aufgedeckt.

Nun ist leicht zu erweisen, dass die Gruppe (92) nicht zerfällt. Da nämlich die Gruppe aus den Factoren der Zusammensetzung 60, 2

und 2 gebildet ist, so kann sie nur zerfallen entweder in eine Ikosaedergruppe und eine Gruppe 4ter Ordnung oder in eine Gruppe von der zweiten und in eine aus der Ikosaedergruppe gebildete Gruppe von der 120ten Ordnung. Im ersten Fall müssten vier ausgezeichnete Operationen vorhanden sein, was nicht ist. Im anderen Fall kann die Gruppe 120ter Ordnung zerfallen oder mit $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ oder endlich mit der symmetrischen Gruppe 120ter Ordnung übereinstimmen. Es führen aber die ersten beiden von diesen 3 Unterfällen wieder darauf, dass die ganze Gruppe 240ter Ordnung 4 ausgezeichnete Operationen enthalten müsste. Der 3te Unterfall ist auch unmöglich, weil die symmetrische Gruppe 120ter Ordnung in (92) nicht vorkommt.

Wir betrachten jetzt die Gruppe (93) mod R, dadurch geht sie in die symmetrische Gruppe 120ter Ordnung über. Eine ausgezeichnete cyklische Untergruppe K der Gruppe (93) wird mod R eine ausgezeichnete cyklische Untergruppe der symmetrischen Gruppe 120ter Ordnung ergeben. Es muss also K mod R zur Identität zusammenfallen, und es ist jetzt ersichtlich, dass die Gruppe (93) nur eine nichtidentische ausgezeichnete cyklische Untergruppe besitzt. Diese besteht aus den Potenzen von R. Diese Untergruppe wird durch alle Operationen der ganzen Gruppe in sich transformirt, es sind aber die nichtidentischen Operationen der Untergruppe nicht in der Gesammtgruppe ausgezeichnet. Eine cyklische Untergruppe, deren Ordnung grösser als 1, und deren Operationen alle in der Gesammtgruppe ausgezeichnet wären, existirt also nicht. Die Gruppe (93) enthält eine Ikosaedergruppe ausgezeichnet, die aus S und T erzeugt wird. Nach dem Satz des 5ten Paragraphen ist dies die einzige in der Gruppe (93) enthaltene Untergruppe vom Ikosaedertypus. Diese Ikosaedergruppe wird durch die Operation U in contragredienter Weise in sich transformirt.

Um nun nachzuweisen, dass die Gruppe (93) nicht zerfällt, hat man zu überlegen, dass sie aus den Factoren der Zusammensetzung 2, 60, p gebildet ist, wobei p eine ungerade Primzahl bedeutet. Die Gruppe könnte also jedenfalls nur zerfallen in eine Ikosaedergruppe und eine Gruppe $2p$ter Ordnung oder in eine Gruppe 2ter Ordnung und eine aus den Factoren 60 und p entstehende, nach § 10 und § 17 selbst zerfallende Gruppe oder in eine Gruppe $p$ter Ordnung und eine aus den Factoren 60 und 2 bestehende Gruppe. Im ersten dieser drei Fälle müsste in der Gesammtgruppe eine ausgezeichnete Untergruppe vom Ikosaedertypus enthalten sein, die durch alle Operationen der Gesammtgruppe nur cogredient in sich transformirt wird. In den beiden letzten Fällen dagegen enthielte die Gesammtgruppe eine cyklische Gruppe $p$ter Ordnung, deren sämmtliche Operationen in der Gesammtgruppe ausgezeichnet wären. Beides ist bei der Gruppe (93) unmöglich.

Das Resultat dieses ganzen Abschnitts mag so zusammengefasst werden:

Satz XXIII. *Für jede Primzahl p giebt es eine einzige nichtzerfallende Gruppe, welche die aus den Factoren p und 60 gebildete zerfallende Gruppe als ausgezeichnete Maximaluntergruppe enthält. Es ist diese Gruppe für $p = 2$ durch die Relationen (92) für $p > 2$ durch die Relationen (93) dargestellt.*

Elfter Abschnitt.

Das directe Product der Gruppe von Primzahlordnung in die Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ soll ausgezeichnete Untergruppe werden.

§ 56.

Die Isomorphismen der Gruppe in sich.

In diesem Abschnitt werden die von § 49 bis § 55 gegebenen Entwicklungen auf einen analogen Fall übertragen. Man lege eine Gruppe zu Grunde, welche durch die Relationen

$$(97) \quad S^7 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (S^6 T)^3 = 1, \quad (S^4 T)^4 = 1, \quad \Theta^p = 1$$

definirt ist. Es bedeutet hier p eine Primzahl, und das Symbol Θ ist mit den anderen Symbolen vertauschbar. Jeder Isomorphismus dieser Gruppe in sich kann nach dem im 49^{ten} Paragraphen gezeigten Verfahren gefunden werden. Es ist jeder solche Isomorphismus in der Formel

$$(98) \qquad \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & S', & T' \end{pmatrix}$$

enthalten, wobei S' und T' so zu bestimmen sind, dass

$$\begin{pmatrix} S, & T \\ S', & T' \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus der aus S und T erzeugbaren Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ vorstellt. Wir müssen nun aus der Formel (98) eine Anzahl von Isomorphismen der Gruppe (97) in sich so herausgreifen, dass jede Isomorphismenclasse gerade einmal repräsentirt ist. Zwei Isomorphismen (98) gehören in dieselbe Classe, wenn man die unteren Reihen Θ^k, S', T' der sie darstellenden Formeln in einander überführen kann durch wiederholte Transformationen mit den Symbolen S, T, Θ. Durch solche Transformationen kann man aber aus S', T' entweder S, T oder S^{-1}, T machen (§ 40). Man erhält also in den Formeln

$$(99) \qquad \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & S, & T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Theta, & S, & T \\ \Theta^k, & S^{-1}, & T \end{pmatrix},$$

in denen $k=1, 2, 3, \ldots p-1$ gesetzt werden kann, alle die gesuchten Isomorphismenclassen, jede einmal. Die Isomorphismen (99) bilden ausserdem eine Gruppe vertauschbarer Operationen, und man erhält den Satz: Die Gruppe (97) besitzt $2(p-1)$ Isomorphismenclassen; diese Classen stellen vertauschbare Operationen vor.

§ 57.

Aufstellung der gesuchten Gruppen.

Eine genaue Uebertragung der Betrachtungen des 50ten Paragraphen liefert nun den Satz:

Wenn die Gruppe Δ eine mit der Gruppe (97) holoedrisch isomorphe Untergruppe Γ ausgezeichnet enthält, und $\Delta \mid \Gamma$ eine einfache Gruppe von zusammengesetzter Ordnungszahl ist, so spaltet sich die Gruppe $\mathfrak{G}_{168}$ von der Gruppe Δ ab.

Nach Analogie des 51ten Paragraphen ergiebt sich ferner:

Wenn die Gruppe Δ eine mit (97) holoedrisch isomorphe Untergruppe Γ vom Primzahlindex q ausgezeichnet enthält, so ist Δ entweder durch die Formeln

$$(100)\quad \begin{gathered} U^q = R^l, \quad U^{-1}SU = S, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^\mu, \\ S^7 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = 1, \\ R^{-1}SR = S, \quad R^{-1}TR = T, \quad R^p = 1 \end{gathered}$$

mit den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \mu^q &\equiv 1 \\ l(\mu-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod p$$

vorgestellt, oder es ist $q=2$, und es entspricht Δ den Relationen

$$(101)\quad \begin{gathered} U^2 = R^l, \quad U^{-1}SU = S^{-1}, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^\mu, \\ S^7 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = 1, \\ R^{-1}SR = S, \quad R^{-1}TR = T, \quad R^p = 1, \end{gathered}$$

wobei noch die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \mu^2 &\equiv 1 \\ l(\mu-1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod p$$

erfüllt sein müssen. Die Systeme (100) und (101) ergeben auch unter den aufgestellten Bedingungen stets Gruppen der verlangten Art,

§ 58.

Die nichtzerfallenden unter den gewonnenen Gruppen.

Die Systeme (100) und (101) werden nun genau so behandelt, wie in § 52 und § 53 die Systeme (89) und (90) behandelt worden sind. Wenn es unter den aufgestellten Gruppen solche giebt, die nicht zerfallen, so werden diese alle aus dem System (101) erhalten mit $p = 2$, $\mu = 1$, $l = 1$ und mit $p > 2$, $\mu = -1$, $l = 0$. Es ergeben sich einerseits die Gleichungen

$$(102)\qquad \begin{gathered} U^2 = \Theta,\quad U^{-1}SU = S^{-1},\quad U^{-1}TU = T, \\ S^7 = 1,\quad T^2 = 1,\quad (S^6T)^3 = 1,\quad (S^4T)^4 = 1,\quad \Theta^2 = 1, \end{gathered}$$

in denen die Operation R, welche jetzt mit allen anderen vertauschbar geworden ist, mit Θ bezeichnet erscheint. Andererseits erhält man die Relationen

$$(103)\qquad \begin{gathered} U^2 = 1,\quad U^{-1}SU = S^{-1},\quad U^{-1}TU = T,\quad U^{-1}RU = R^{-1}, \\ S^7 = 1,\quad T^2 = 1,\quad (S^6T)^3 = 1,\quad (S^4T)^4 = 1, \\ R^{-1}SR = S,\quad R^{-1}TR = T,\quad R^p = 1, \end{gathered}$$

in welchen p eine ungerade Primzahl bedeutet.

Dass die Gruppen (102) und (103) nicht zerfallen, wird nach Analogie des 55ten Paragraphen gezeigt. Diese Gruppen können auch nach dem Princip des 46ten Paragraphen gebildet werden.

Wir haben also folgendes Resultat gewonnen:

Satz XXIV. *Für jede Primzahl p giebt es eine einzige nichtzerfallende Gruppe, welche die aus den Factoren p und* 168 *gebildete zerfallende Gruppe als ausgezeichnete Maximaluntergruppe enthält; es ist dies für $p = 2$ die Gruppe* (102), *für $p > 2$ die Gruppe* (103).

Zwölfter Abschnitt.

Folgerungen.

§ 59.

Bezeichnungen.

Es sollen nun einige Folgerungen gezogen werden, welche gewisse besondere, meist aus drei Factoren der Zusammensetzung gebildete Gruppen betreffen. Die Bezeichnungen, deren ich mich dabei bediene, und die grossentheils schon an früheren Stellen eingeführt worden sind, stelle ich hier zusammen.

p und q bedeuten Primzahlen, und wo diese Zeichen zusammen

vorkommen, bedeuten sie verschiedene Primzahlen. Die cyklische Gruppe m^{ter} Ordnung wird mit $[m]$, die zur Primzahl p gehörige metacyklische Gruppe pq^{ter} Ordnung, welche existirt, wenn q ein Theiler von $p-1$ ist, wird mit $[q, p]$ bezeichnet. Die letzte Gruppe ist durch die Relationen

$$S^q = 1, \quad S^{-1}TS = T^\varrho, \quad T^p = 1$$

dargestellt, wobei ϱ mod p zum Exponenten q gehört. Aus den linear gebrochenen Substitutionen, welche in Beziehung auf einen Primzahlmodul p betrachtet werden, entstehen die Gruppen $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ und $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{p(p^2-1)}$ besteht aus den sämmtlichen Substitutionen

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \bmod p,$$

die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ nur aus denjenigen dieser Substitutionen, für welche $ad - bc$ ein quadratischer Rest des Moduls p ist. Die Beziehung dieser Gruppen zur Transformation der elliptischen Functionen ist bekannt. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$ ist einfach, wenn die Primzahl p grösser als 3 ist. $\mathfrak{G}_{60}$ kann auch als Ikosaedergruppe, $\mathfrak{G}_{120}$ als Gruppe der sämmtlichen Vertauschungen von 5 Dingen aufgefasst werden. Ausserdem werden noch die Bezeichnungen $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ vorkommen. Die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ ist von der $60m^{\text{ten}}$ Ordnung und wird durch die Relationen

$$S^5 = 1, \quad T^2 = \Theta^{\frac{m}{2}}, \quad (ST)^3 = 1, \quad \Theta^m = 1$$

dargestellt, die Gruppe $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ dagegen hat die Ordnung $168\,m$ und ist repräsentirt durch die Formeln:

$$S^7 = 1, \quad T^2 = \Theta^{\frac{m}{2}}, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = \Theta^{\frac{m}{2}}, \quad \Theta^m = 1.$$

Es bedeutet dabei m nothwendig eine gerade Zahl. Die Gruppen $\mathfrak{K}_{60}^{(m)}$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(m)}$ zerfallen nur dann, wenn m einen ungeraden Primfactor enthält.

Unter zerfallenden Gruppen verstehen wir solche, die als directe*) Producte erhalten werden können. Solche Producte drücke ich durch blosse Zusammenstellung der Factoren aus. Es werden in die folgenden Uebersichten die zerfallenden Gruppen sämmtlich mit aufgenommen.

Verschiedene Gruppen werden durch definirende Relationen dargestellt werden; es bedeutet dabei Θ, wie im Vorigen, stets eine Operation, die mit allen anderen Operationen der Gruppe vertauschbar ist.

*) Vergl. diese Annalen Bd. 43, p. 330.

§ 60.

Specielle Gruppen aus zwei Factoren der Zusammensetzung.

Zunächst mögen die Gruppen aus den Factoren der Zusammensetzung $60, p$ und $168, p$ aufgeführt werden. Eine Gruppe aus den Factoren $60, p$ muss entweder eine einfache Gruppe 60^{ter} Ordnung ausgezeichnet enthalten oder einer einfachen Gruppe 60^{ter} Ordnung meroedrisch isomorph sein. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{60}$ ist aber die einzige einfache Gruppe 60^{ter} Ordnung*). Man hat nun entweder den Satz IX des 11^{ten} Paragraphen oder den Satz X in § 17 anzuwenden. Dadurch ergiebt sich für eine ungerade Primzahl p, dass nur eine Gruppe aus den Factoren der Zusammensetzung 60 und p existirt, nämlich die zerfallende Gruppe. Ist $p = 2$, so existiren noch die zwei Gruppen $\mathfrak{G}_{120}$ und $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$. Diese beiden Gruppen sind nichtzerfallend (IX, X) und von einander verschieden, und zwar das letztere, weil $\mathfrak{G}_{120}$ eine Ikosaedergruppe enthält und $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ nicht (vgl. § 22).

Ebenso werden die Gruppen aus den Factoren der Zusammensetzung 168 und p behandelt. Es findet sich einmal eine zerfallende Gruppe, welche für $p > 2$ zugleich die einzige ist. Für $p = 2$ ergeben sich noch die Gruppen $\mathfrak{G}_{336}$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$, die nicht zerfallen (IX, XI) und von einander verschieden sind (§ 22).

§ 61.

Specielle Gruppen aus drei Factoren der Zusammensetzung.

Es lassen sich jetzt alle Gruppen aus den Factoren der Zusammensetzung $60, p, p$ oder $60, p, q$ oder $168, p, p$ oder $168, p, q$ bestimmen. Diejenigen unter diesen Gruppen, welche zerfallen, kann man direct bilden. Es ist zu diesem Zweck nur nöthig, dass man alle die Gruppen kennt, welche aus zwei von den jedesmal genannten drei Factoren gebildet sind; das sind die Gruppen der Ordnungen p^2 und pq, welche man kennt**), und die im vorigen Paragraphen aufgestellten Gruppen. Durch diese Bemerkung werden in der unten folgenden Zusammenstellung die zerfallenden Gruppen sofort verständlich sein.

Wir bilden jetzt die nichtzerfallenden Gruppen aus den Factoren $60, p, p$. Jede Gruppe, welche aus diesen Factoren der Zusammensetzung gebildet ist, enthält entweder eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe von der Ordnung p^2 oder eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe, die aus den Factoren 60 und p gebildet ist. Der erste

*) Math. Annalen Bd. 40, p. 67.

**) Vergl. Math. Annalen Bd. 43, p. 409 und 410.

Fall giebt zwei Unterfälle, je nachdem die Untergruppe der Ordnung p^2 cyklisch ist oder nicht. Im ersten Unterfall hat man den Lehrsatz X des 17ten Paragraphen anzuwenden, wobei man nur dann, wenn $p = 2$ ist, eine nichtzerfallende Gruppe, nämlich die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(4)}$, erhält. Im zweiten Unterfall kommt der Satz XIII des 25ten Paragraphen zur Geltung; dieser führt aber nur auf zerfallende Gruppen.

Es ist nun der zweite Hauptfall zu erörtern, in welchem die gesuchte, aus den Factoren $60, p, p$ gebildete, nichtzerfallende Gruppe eine Untergruppe mit den Factoren 60 und p ausgezeichnet enthält. Diese Untergruppe kann zerfallend sein, so dass sie durch die Gleichungen (79) dargestellt wird, also gleich dem directen Product $[p]\ \mathfrak{G}_{60}$ ist. Dies muss sein (§ 60), wenn p ungerade ist; wenn aber $p = 2$ ist, so kann die Untergruppe auch mit $\mathfrak{G}_{120}$ oder mit $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ übereinstimmen. Dadurch ergeben sich drei Unterfälle. Im ersten Unterfall ist der Satz XXIII des § 55 zu benutzen. Dieser Satz ergiebt, dass nur eine Gruppe existirt, welche die zerfallende Gruppe $[p]\ \mathfrak{G}_{60}$ als ausgezeichnete Maximaluntergruppe enthält. Diese Gruppe hat aber, wenn p ungerade ist, die Factoren $60, 2, p$ und gehört nicht hierher. Ist aber $p = 2$, so ergiebt der Satz XXIII die Gruppe (92) mit den Factoren $60, 2, 2$. Die beiden anderen Unterfälle kommen nur vor, wenn $p = 2$ ist. Im zweiten Unterfall ist $\mathfrak{G}_{120}$ in der zu bestimmenden Gruppe ausgezeichnet enthalten, es müsste also diese (VIII, § 11) zerfallen. Im dritten Unterfall liegt die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ als ausgezeichnete Untergruppe vor. Es folgt nun aus dem Satz XVII, § 36, dass die gesuchte Gruppe, da sie nicht zerfallen soll, durch eines der Systeme (48), (49), (50) dargestellt ist. Diese drei Gruppen sind unter einander verschieden, dagegen stimmt die Gruppe (48) mit der schon beim ersten Hauptfall aufgeführten Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(4)}$ überein. Keine der Gruppen (48), (49), (50) enthält eine Untergruppe vom Ikosaedertypus; die Gruppe (92) enthält eine solche Untergruppe und ist somit von den drei Gruppen verschieden.

Wir haben also für ein ungerades p gar keine nichtzerfallende Gruppe gefunden, für $p = 2$ jedoch vier nichtzerfallende Gruppen.

Nunmehr mögen die nichtzerfallenden Gruppen aus den Factoren $60, p, q$ gebildet werden. Wir nehmen $p > q$ an, dann ist p nothwendig eine ungerade Primzahl. Jede von den zu bildenden Gruppen enthält eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe, die entweder von der pq^{ten} Ordnung ist oder die Zahlen $60, p$ oder $60, q$ zu Factoren der Zusammensetzung hat. Dadurch ergeben sich drei Hauptfälle. Der erste Hauptfall liefert zwei Unterfälle, da die ausgezeichnete Untergruppe pq^{ter} Ordnung cyklisch oder metacyklisch sein kann, das letztere allerdings nur, wenn q Theiler von $p - 1$ ist. Im ersten dieser

Unterfälle benutzt man den Satz X in § 17 und berücksichtigt dabei, dass die Zahl pq an der Zahl p einen ungeraden Theiler besitzt. Im zweiten Unterfall ist der Satz XIV des 29ten Paragraphen heranzuziehen. Weder das eine noch das andere Mal findet sich eine nichtzerfallende Gruppe.

Im zweiten Hauptfall enthält die gesuchte Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe mit den Factoren der Zusammensetzung $60, p$. Da p ungerade ist, so folgt aus dem Resultat des 60ten Paragraphen, dass die Untergruppe durch das System (79) vorgestellt ist. Aus Satz XXIII, § 55 folgt nun, dass man nur für $q = 2$ eine nichtzerfallende Gruppe erhält, und zwar die durch (93) dargestellte.

Im letzten Hauptfall ist eine ausgezeichnete Untergruppe mit den Factoren 60 und q vorhanden. Wenn diese Untergruppe zerfällt, was nothwendig geschieht, wenn $q > 2$ ist, so hat man wieder aus dem Satz XXIII zu schliessen und man erhält dabei, da auch p ungerade ist, keine nichtzerfallende Gruppe. Ist aber $q = 2$, so bleibt noch die Annahme offen, dass die zu bestimmende Gruppe $60pq$ter Ordnung entweder die Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$ oder die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ ausgezeichnet enthält. Man hat nun entweder den Satz VIII in § 11 oder den Satz XVI in § 35 anzuwenden, wobei wiederum nur zerfallende Gruppen erscheinen, die wir jetzt nicht suchen.

Es hat sich also gar keine nichtzerfallende Gruppe aus den Factoren $60, p, q$ $(p > q)$ ergeben für ein ungerades q und eine einzige für $q = 2$.

Die nichtzerfallenden Gruppen aus den Factoren $168, p, p$ und aus den Factoren $168, p, q$ bestimmen sich auf genau dieselbe Weise. Die Schlüsse bleiben in allen Punkten analog und sollen deshalb nicht wiederholt werden. An Stelle der Sätze X, XXIII, XVII, XVI sind jetzt die analogen, XI in § 20, XXIV in § 58, XX in § 43, XIX in § 43 anzuwenden, während die anderen angeführten Sätze nach wie vor zu benutzen sind. Dabei ergiebt sich das folgende Resultat: Wenn die Primzahl p ungerade ist, so existiren keine Gruppen mit den Factoren $168, p, p$, ausser den zerfallenden; dagegen giebt es vier nichtzerfallende Gruppen mit den Factoren 168, 2, 2, nämlich $\mathfrak{K}_{168}^{(4)}$, (68), (69) und (102). Eine nichtzerfallende Gruppe mit den Factoren $168, p, q$ existirt nur dann, wenn die kleinere der beiden Primzahlen gleich 2 ist; es liegt unter diesen Umständen die Gruppe (103) vor.

§ 62.

Zusammenstellung der Gruppen.

Stellen wir nun die Resultate der beiden letzten Paragraphen zusammen. Es ergiebt sich die folgende Tabelle:

Factoren der Zusammensetzung $60, p$.

Zerfallende Gruppe: $\mathfrak{G}_{60}[p]$.

Nichtzerfallende Gruppen: Nur für $p=2$, $\mathfrak{G}_{120}$ und $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$.

Factoren der Zusammensetzung $168, p$.

Zerfallende Gruppe: $\mathfrak{G}_{168}[p]$.

Nichtzerfallende Gruppen: Für $p=2$, $\mathfrak{G}_{336}$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}$.

Factoren der Zusammensetzung $60, p, p$.

Zerfallende Gruppen: $\mathfrak{G}_{60}[p][p]$, $\mathfrak{G}_{60}[p^2]$ und für $p=2$ ausser diesen beiden noch $\mathfrak{G}_{120}[2]$ und $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}[2]$.

Nichtzerfallende Gruppen: Nur für $p=2$, und zwar die folgenden vier:

1) $\mathfrak{K}_{60}^{(4)}$;

2) $U^2=1,\quad U^{-1}SU=STS^2TS^4\Theta,\quad U^{-1}TU=T\Theta,$
$S^5=1,\quad T^2=\Theta,\quad (ST)^3=1,\quad \Theta^2=1;$

3) $U^2=\Theta,\quad U^{-1}SU=STS^2TS^4\Theta,\quad U^{-1}TU=T\Theta,$
$S^5=1,\quad T^2=\Theta,\quad (ST)^3=1,\quad \Theta^2=1;$

4) $U^2=\Theta,\quad U^{-1}SU=STS^2TS^4,\quad U^{-1}TU=T,$
$S^5=1,\quad T^2=1,\quad (ST)^3=1,\quad \Theta^2=1.$

Factoren der Zusammensetzung $60, p, q\ (p>q)$.

Zerfallende Gruppen: zunächst die eine $\mathfrak{G}_{60}[p][q]$. Ist q ein Theiler von $p-1$, so giebt es ausserdem noch die Gruppe $\mathfrak{G}_{60}[q,p]$, und wenn zugleich $q=2$ ist, so kommen noch die zwei Gruppen $\mathfrak{G}_{120}[p]$ und $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}[p]$ dazu.

Nichtzerfallende Gruppen: Nur für den Fall $q = 2$ die eine:

$$U^2 = 1, \quad U^{-1}SU = STS^2TS^4, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^{-1},$$
$$S^5 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1,$$
$$RS = SR, \quad RT = TR, \quad R^p = 1,$$

wobei also p ungerade zu denken ist.

Factoren der Zusammensetzung 168, p, p.

Zerfallende Gruppen: $\mathfrak{G}_{168}[p][p]$ und $\mathfrak{G}_{168}[p^2]$ und für $p = 2$ noch zwei weitere Gruppen: $\mathfrak{G}_{336}[2]$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}[2]$.

Nichtzerfallende Gruppen: Nur für $p = 2$, nämlich:

1) $\mathfrak{K}_{168}^{(4)}$;

2) $U^2 = 1, \quad U^{-1}SU = S^{-1}, \quad U^{-1}TU = T\Theta,$
$S^7 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1;$

3) $U^2 = \Theta, \quad U^{-1}SU = S^{-1}, \quad U^{-1}TU = T\Theta,$
$S^7 = 1, \quad T^2 = \Theta, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^3 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1;$

4) $U^2 = \Theta, \quad U^{-1}SU = S^{-1}, \quad U^{-1}TU = T,$
$S^7 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = 1, \quad \Theta^2 = 1.$

Factoren der Zusammensetzung 168, p, q $(p > q)$.

Zerfallende Gruppen: $\mathfrak{G}_{168}[p][q]$. Wenn q Theiler von $p - 1$ ist, ausserdem $\mathfrak{G}_{168}[q, p]$ und für $q = 2$ noch eine dritte und vierte, nämlich $\mathfrak{G}_{336}[p]$ und $\mathfrak{K}_{168}^{(2)}[p]$.

Nichtzerfallende Gruppen: Eine, die aber nur für $q = 2 (p > 2)$ existirt:

$$U^2 = 1, \quad U^{-1}SU = S^{-1}, \quad U^{-1}TU = T, \quad U^{-1}RU = R^{-1},$$
$$S^7 = 1, \quad T^2 = 1, \quad (S^6T)^3 = 1, \quad (S^4T)^4 = 1,$$
$$RS = SR, \quad RT = TR, \quad R^p = 1.$$

Zwei Gruppen, die hier besonders aufgezählt erscheinen, sind stets verschieden. Es ist nicht überflüssig, dies noch für die zerfallenden Gruppen zu beweisen, weil es nicht allgemein erwiesen ist, dass eine zerfallende Gruppe nur auf eine Art als ein directes Product von

nichtzerfallenden dargestellt werden kann. Doch ist die Frage für die hier auftretenden Beispiele schnell zu erledigen. So wäre z. B. die Verschiedenheit der Gruppen $\mathfrak{G}_{60}[p]\,[p]$ und $\mathfrak{G}_{60}[p^2]$, und für $p=2$ die Verschiedenheit der vier Gruppen $\mathfrak{G}_{60}[2]\,[2]$, $\mathfrak{G}_{60}[4]$, $\mathfrak{G}_{120}[2]$ und $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}[2]$ zu beweisen. Nun ergiebt die Anwendung des Lehrsatzes V in § 5 leicht, dass die Gruppen $\mathfrak{G}_{60}[p]\,[p]$, $\mathfrak{G}_{60}[p^2]$ und $\mathfrak{G}_{120}[2]$ je nur eine Untergruppe vom Ikosaedertypus enthalten. In der Gruppe $\mathfrak{G}_{60}[p]\,[p]$ bilden die mit der Ikosaedergruppe vertauschbaren Operationen eine nichtcyklische Gruppe der Ordnung p^2, in $\mathfrak{G}_{60}[p^2]$ eine cyklische Gruppe der Ordnung p^2, in $\mathfrak{G}_{120}[2]$ eine Gruppe 2[ter] Ordnung. Es sind also die Gruppen $\mathfrak{G}_{60}[p]\,[p]$ und $\mathfrak{G}_{60}[p^2]$ von einander und für $p=2$ auch von $\mathfrak{G}_{120}[2]$ verschieden. Auf die Gruppe $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}[2]$ kann nun auch der Satz V angewendet werden. Wenn diese Gruppe eine Ikosaedergruppe enthielte, so müsste diese Untergruppe von $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ sein, was (§ 22) nicht möglich ist. Ganz ebenso erledigen sich die anderen Fälle.

§ 63.

Die nichtauflösbaren Gruppen bis zur Ordnung 479.

Es lassen sich jetzt auch alle nichtauflösbaren Gruppen bis zu einer gewissen Ordnung aufstellen. Eine Gruppe ist auflösbar, d. h. ist die Gruppe einer auflösbaren algebraischen Gleichung, wenn die sämmtlichen Factoren der Zusammensetzung Primzahlen sind. Jede nichtauflösbare Gruppe muss also mindestens einen zusammengesetzten Factor der Zusammensetzung besitzen. Nun sind die Zahlen, welche überhaupt Factoren der Zusammensetzung sein können, die Ordnungen der einfachen Gruppen. Die zusammengesetzten Zahlen, die als Factoren einer Gruppe auftreten können, sind also identisch mit den zusammengesetzten Zahlen, die Ordnungen einfacher Gruppen sind. Die Aufzählung dieser Ordnungszahlen habe ich bis zur Ordnung 200 erledigt*), und sie ist dann von Herrn Cole**) bis zur Ordnung 660 fortgesetzt worden. Es haben sich dabei die Zahlen

$$60,\quad 168,\quad 360,\quad 504,\quad 660$$

als die fünf niedrigsten ergeben, die zusammengesetzt und Ordnungszahlen einfacher Gruppen sind. Zu jeder dieser Zahlen gehört eine einzige einfache Gruppe.

Die Ordnung einer nichtauflösbaren Gruppe muss somit, wenn sie nicht grösser als 660 ist, durch eine der genannten fünf Zahlen theil-

*) Mathematische Annalen Bd. 40, p. 55.

**) American Journal of Mathematics, Vol. XIV, p. 378, ibidem Vol. XV, pag. 303.

bar sein. Die Ordnungszahlen, für welche diese Theilbarkeit besteht, lassen sich, soweit sie kleiner als 480 sind, mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Sätze behandeln. Sucht man z. B. die nichtauflösbaren Gruppen 360[ter] Ordnung, so muss eine solche Gruppe den Factor der Zusammensetzung 60 enthalten oder die Zahl 360 als einzigen Factor der Zusammensetzung besitzen. Im zweiten Falle liegt die einfache Gruppe 360[ter] Ordnung vor, die als Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Elementen dargestellt werden kann. Enthält aber die Gruppe 360[ter] Ordnung den Factor 60, so ist das Product der übrigen Factoren gleich 6. Da aber 6 kein Factor der Zusammensetzung sein kann, so hat die Gruppe noch die zwei Factoren 3 und 2. Es liegt also eine Gruppe aus drei Factoren 60, p, q vor. Die Tabelle des 62[ten] Paragraphen liefert nun, da $q = 2$ ist, noch fünf Gruppen. In ähnlicher Weise sind die anderen Fälle zu erörtern. Man erhält schliesslich die folgende Uebersicht:

Ordnung	60	120	168	180	240	300	336	360	420
Zahl der nichtauflösb. Gr.	1	3	1	1	8	1	3	6	1

Die Gruppen aller anderen Ordnungen unter 480 sind auflösbar.

§ 64.

Die Gruppen aus den Factoren der Zusammensetzung 60, 60, 2.

Wir suchen jetzt die Gruppen aus den Factoren 60, 60, 2. Eine solche Gruppe Δ muss eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe Γ enthalten, die entweder aus den Factoren 60, 60 oder aus den Factoren 60, 2 gebildet ist. Jede Gruppe aus den Factoren 60, 60 ist (IX, § 11) vom Typus $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{G}_{60}$; jede Gruppe aus den Factoren 60, 2 gehört einem der drei Typen $\mathfrak{G}_{60}[2]$, $\mathfrak{G}_{120}$, $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ an. Wir können also vier Fälle unterscheiden, die einzeln behandelt werden; dabei suchen wir zunächst die nichtzerfallenden Gruppen.

1) Die gesuchte Gruppe Δ enthält eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe vom Typus $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{G}_{60}$. Man hat die Sätze XXI und XXII aus § 47 und § 48 anzuwenden. Diese Sätze führen auf die Gruppen (74) und (78), von denen die erste ausgezeichnete Ikosaedergruppen enthält, die zweite nicht. Die Gruppe (78) enthält 122 nichtausgezeichnete Ikosaedergruppen. Die beiden Gruppen (74) und (78) zerfallen nicht und sind die einzigen nichtzerfallenden Gruppen, auf die der Fall 1) führt.

2) Es ist eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe vom Typus $\mathfrak{G}_{60}[2]$ gegeben. In einem solchen Fall weiss man, auch wenn über

die Factoren und die Ordnung der gesuchten Gruppe Δ sonst nichts bekannt ist, dass (vergl. XXIII in § 55) nur eine nichtzerfallende Gruppe von der gesuchten Beschaffenheit existirt, nämlich die Gruppe (92); diese besteht aber aus den Factoren 2, 2, 60, entspricht also nicht den Bedingungen, welche in diesem Paragraphen der Gruppe Δ auferlegt werden.

3) Es ist eine ausgezeichnete Untergruppe vom Typus $\mathfrak{G}_{120}$ in der gesuchten Gruppe Δ enthalten. Unter dieser Voraussetzung kann aber Δ nach Satz VIII in § 11 keine nichtzerfallende Gruppe sein.

4) Eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe vom Typus $\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ ist in Δ bekannt. Man hat in diesem Fall den Lehrsatz XVIII des 39ten Paragraphen anzuwenden und man wird dabei auf die Gruppe (53) geführt. Diese Gruppe zerfällt nicht, sie enthält 120 Ikosaedergruppen, von denen keine in ihr ausgezeichnet enthalten ist.

Man erhält also im Ganzen drei nichtzerfallende Gruppen aus den Factoren 60, 60, 2, nämlich (74), (78) und (53). Die erste dieser Gruppen enthält ausgezeichnete Ikosaedergruppen, die zweite und die dritte nicht. Die zweite enthält 122, die dritte 120 nichtausgezeichnete Ikosaedergruppen. Somit sind die genannten drei Gruppen verschieden.

Die zerfallenden Gruppen aus den Factoren 60, 60, 2 lassen sich direct bilden, und man gelangt zu der folgenden Zusammenstellung:

Gruppen aus den Factoren 60, 60, 2.

Zerfallende Gruppen: $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{G}_{60}[2]$; $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{G}_{120}$; $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$.

Nichtzerfallende Gruppen:

1. $$S^5=1,\quad T^2=1,\quad (ST)^3=1,$$
$$S'^5=1,\quad T'^2=1,\quad (S'T')^3=1,$$
$$U^{-1}SU=STS^2TS^4,\quad U^{-1}S'U=S'T'S'^2T'S'^4,$$
$$UT=TU,\quad UT'=T'U,\quad U^2=1,$$

wobei zugleich S und T mit S' und T' vertauscht werden können;

2. $$S^5=1,\qquad T^2=1,\qquad (ST)^3=1,$$
$$S'^5=1,\qquad T'^2=1,\qquad (S'T')^3=1,$$
$$U^{-1}SU=S',\quad U^{-1}TU=T',\qquad U^2=1,$$

und zugleich S und T mit S' und T' vertauschbar;

3. $$S^5=1,\quad T^2=\Theta,\quad (ST)^3=1,$$
$$S'^5=1,\quad T'^2=\Theta,\quad (S'T')^3=1,$$
$$\Theta^2=1,$$

wobei noch S und T mit S' und T', und Θ mit allen anderen Symbolen vertauscht werden darf.

Die Verschiedenheit der drei zerfallenden Gruppen wäre, strenge genommen, noch nachzuweisen. Es folgt dieser Nachweis aus den folgenden Thatsachen, die sich leicht constatiren lassen: Die Gruppe $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{G}_{120}$ enthält ausser der Identität keine ausgezeichnete Operation, jede der Gruppen $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{G}_{60}[2]$ und $\mathfrak{G}_{60}\mathfrak{K}_{60}^{(2)}$ enthält eine nichtidentische Operation ausgezeichnet. Von den beiden letzten Gruppen enthält die zweite eine Operation 4ter Ordnung, die erste nicht.

Tübingen, den 21. December 1894.

Ueber die focalen Eigenschaften collinearer Gebilde.

Von

Th. Reye in Strassburg i./E.

Vor 25 Jahren hat **Henry J. S. Smith** eine gedankenreiche Abhandlung „On the focal properties of homographic figures" veröffentlicht*), die mir erst jetzt in seinen gesammelten mathematischen Schriften zugänglich geworden ist. Bekanntlich giebt es in zwei collinearen Feldern i. A. zwei paar gleiche homologe Strahlenbüschel; die Mittelpunkte dieser Büschel aber nennt Smith die „Foci" der collinearen Felder. Sie sind, wie er nachweist, die Brennpunkte von zwei Schaaren homologer Kegelschnitte und die Punktkreise von zwei Büscheln homologer Kreise der Felder. Smith stellt a. a. O. die canonischen und die elliptischen Gleichungen der ebenen Collineation auf und entdeckt wichtige metrische Beziehungen collinearer Felder insbesondere hinsichtlich der Krümmung ihrer homologen Curven. Analoge Untersuchungen giebt er sodann für collineare Bündel und collineare Räume; u. a. findet er, dass die Axen gleicher homologer Ebenenbüschel von zwei collinearen Räumen die Geraden von zwei homologen Schaaren confocaler Flächen zweiten Grades sind.

Smith begründet seine Untersuchungen synthetisch mit Hülfe der unendlich fernen Kreispunkte und des unendlich fernen Kugelkreises. Seine Beweise entbehren jedoch, abgesehen von der Einleitung, sehr der Anschaulichkeit, und vielfach werden sie nur angedeutet oder ganz dem Leser überlassen. Deshalb sei mir gestattet, hier auf denselben Gegenstand zurückzukommen, zumal da seine Untersuchungen mit noch älteren von mir in nahem Zusammenhang stehen. Bei collinearen Räumen spielen namentlich gewisse, schon 1868 von mir untersuchte, quadratische Axencomplexe eine gewichtige Rolle, was Smith entgangen ist. Nicht alle seine Resultate auf's Neue abzuleiten, aber doch die wichtigeren anderweitig und vollständiger zu begründen, und sie nach gewissen Richtungen zu ergänzen, ist meine Absicht.

*) In den Proceedings of the London Mathem. Society, vol. II (1869) (p. 196—248; abgedruckt in seinen Collected Math. Papers, vol. I. p. 545—602 Oxford 1894, 2 vls.).

§ 1.

Collineare ebene Felder.

Wir beschränken unsere Untersuchung auf solche collineare Ebenen oder Felder η, η_1, die nicht affin sind, deren Fluchtlinien also nicht unendlich fern liegen. Die gerade Fluchtlinie m von η resp. n_1 von η_1 entspricht bekanntlich der unendlich fernen Geraden m_1 von η_1 resp. n von η. Die unendlich fernen Punkte mn und m_1n_1 der beiden Fluchtlinien m, n_1 entsprechen einander, und jeder zu m parallelen Geraden u von η entspricht folglich eine zu n_1 parallele Gerade u_1 von η_1, die zu u projectiv ähnlich ist. Zwei Geraden a, b von η, die in einem Punkte der Fluchtlinie m sich schneiden, entsprechen zwei parallele Gerade a_1b_1 von η_1, und es giebt deshalb zwei zu m parallele Gerade u, v, auf welchen die Geraden a und b Strecken von derselben Länge begrenzen, wie die beiden Parallelen a_1 und b_1 auf den entsprechenden Geraden u_1, v_1. Diese beiden Geraden u, v sind die einzigen des Feldes η, welche mit ihren homologen Geraden u_1, v_1 von η_1 projectiv gleich sind. Die Fluchtlinie m ist die Mittellinie zwischen den Parallelen u, v, und ebenso ist n_1 die Mittellinie zwischen u_1 und v_1.

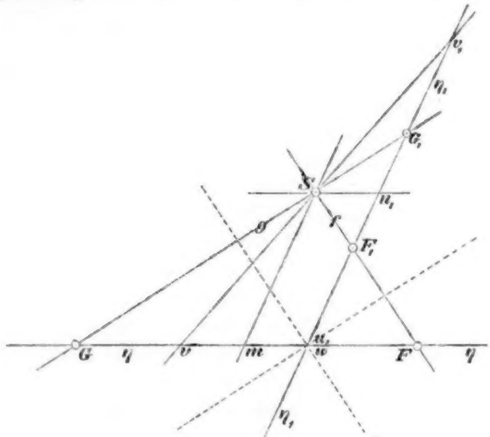


Fig. 1.

Die collinearen Felder η, η_1 werden bekanntlich perspectiv und Schnitte eines Strahlenbündels S, wenn sie in solche Lage gebracht werden, dass die homologen Punkte der Geraden u und u_1 sich decken. Gewisse zwei Ebenenbüschel des Bündels S werden alsdann von den Ebenen η, η_1 in je zwei homologen gleichen Strahlenbüscheln geschnitten; ihre Axen f, g sind zu je einer Halbirungsebene der von η

und η_1 gebildeten Flächenwinkel normal, und ihre Schnitte mit η und η_1 liegen symmetrisch bezüglich der zugehörigen Halbirungsebene. (Vgl. Fig. 1, welche den Schnitt der perspectiven Felder η, η_1 mit der zu u normalen Ebene des Bündels S darstellt). Die beiden gleichen Punktreihen v, v_1 liegen in der zu mn_1 parallelen Ebene des Bündels S. Wird die Ebene η um u gedreht, bis sie mit η_1 zusammenfällt, so vereinigen sich die homologen Strahlen von zwei gleichen Strahlenbüscheln der Felder.

Wir wollen noch auf andere Art die zwei paar homologen gleichen Strahlenbüschel in den collinearen Feldern nachweisen und ihre Mittelpunkte bestimmen. Die unendlich ferne Gerade m_1 hat mit den Schenkeln aller rechten Winkel in η_1 die Punktepaare einer elliptischen Involution gemein, welcher in η eine elliptische Punktinvolution auf der Fluchtlinie m entspricht. Jedem rechten Winkel in η_1 entspricht in η ein Winkel, dessen Schenkel von m in einem Punktepaare dieser Involution geschnitten werden. Ist auch der Winkel in η ein rechter, so gehen die Schenkel des entsprechenden rechten Winkels in η_1 durch ein Punktepaar einer analog bestimmten Involution auf der Fluchtlinie n_1. Wir bezeichnen als „conjugirte Normalstrahlen" des Feldes η oder η_1 die Schenkel eines rechten Winkels, welchem in dem anderen Felde ein rechter Winkel entspricht. Zwei conjugirte Normalstrahlen des Feldes η schneiden die Fluchtlinie m in einem Punktepaare jener elliptischen Involution; und zu einem beliebigen Strahle von η ist demnach der conjugirte Normalstrahl eindeutig bestimmt durch die Involution auf m.

Die elliptische Punktinvolution auf der Fluchtlinie m wird aus zwei Punkten F, G der Ebene η durch rechtwinklige Strahleninvolutionen projicirt; diese Punkte liegen symmetrisch in Bezug auf m, und durch sie gehen alle Kreise, welche die Fluchtlinie m in je einem Punktepaare der Involution rechtwinklig schneiden. Jeder der beiden Strahlenbüschel F, G des Feldes η aber ist dem entsprechenden Büschel F_1 resp. G_1 von η_1 gleich, weil jedem rechten Winkel im Büschel F oder G ein rechter Winkel in F_1 resp. G_1 entspricht. In zwei ungleichen projectiven Strahlenbüscheln giebt es ja bekanntlich nur ein Paar homologer rechter Winkel. Wir bezeichnen mit Smith die beiden Punkte F, G als die „Brennpunkte" und ihren halben Abstand $c = \frac{1}{2} FG$ als den „Parameter" des Feldes η, und ebenso F_1, G_1 als die Brennpunkte und $c_1 = \frac{1}{2} F_1 G_1$ als den Parameter von η_1. Die Strecke FG wird von der Fluchtlinie m rechtwinklig halbirt und schneidet sie in dem Mittelpunkte ihrer Punktinvolution; der Parameter c ist der Abstand der Brennpunkte F, G von der Fluchtlinie m.

Zwei conjugirte Normalstrahlen des Feldes η sind conjugirt be-

züglich der confocalen Kegelschnitte von η, deren Brennpunkte mit F und G zusammenfallen. Diese Kegelschnitte nämlich haben m zur gemeinsamen Nebenaxe, und bezüglich eines beliebigen von ihnen sind zwei normale Strahlen nur dann conjugirt, wenn ihre Schnittpunkte mit m aus jedem der Brennpunkte F, G durch zwei normale Strahlen projicirt werden*), wenn sie selbst also conjugirte Normalstrahlen von η sind. Jedem der confocalen Kegelschnitte von η entspricht in η_1 einer der confocalen Kegelschnitte, welche F_1 und G_1 zu Brennpunkten haben; denn der rechtwinkligen Strahleninvolution F oder G in η entspricht eine rechtwinklige Involution F_1 resp. G_1 von conjugirten Normalstrahlen in η_1.

Die confocalen Kegelschnitte in η theilen dieses Feld in unendlich kleine Rechtecke, welchen analog begrenzte Rechtecke in η_1 entsprechen. Sie sind theils Ellipsen, theils Hyperbeln, und nur die ersteren haben mit der Nebenaxe m reelle Punkte gemein, welchen in η_1 unendlich ferne Punkte entsprechen. Jeder Ellipse der confocalen Schaar in η oder η_1 entspricht demnach eine Hyperbel der Schaar in η_1 resp. η. Die Tangente und die Normale eines Punktes der Ellipse sind conjugirte Normalstrahlen von η resp. η_1 und entsprechen der Tangente und der Normale des homologen Punktes der Hyperbel. Auch die Krümmungscentren homologer Punkte und die Evoluten der Ellipse und der Hyperbel entsprechen folglich einander (Smith).

Wenn ein Punkt P in η eine dieser confocalen Ellipsen beschreibt, so drehen sich seine Brennstrahlen FP und GP in gleichem Sinne um die Brennpunkte F und G; zugleich aber beschreibt der entsprechende Punkt P_1 in η_1 eine Hyperbel, und seine Brennstrahlen F_1P_1 und G_1P_1 drehen sich um deren Brennpunkte F_1 und G_1 in entgegengesetztem Sinne. Wenn also die collinearen Felder η und η_1 auf einander gelegt werden, so haben allemal zwei ihrer homologen gleichen Strahlenbüschel, etwa F und F_1, denselben und die übrigen beiden G und G_1 entgegengesetzten Drehungssinn. Werden F und F_1 mit ihren homologen Strahlen zur Deckung gebracht, was auf zwei Arten geschehen kann, so decken sich bekanntlich zwei homologe gleiche Gerade von η und η_1 mit ihren homologen Punkten. In involutorische Lage können die collinearen Felder nur dann gebracht werden, wenn ihre Parameter und damit die Strecken FG und F_1G_1 gleich sind (Smith). Man lege sie so auf einander, dass F mit F_1 und G mit G_1 zusammenfällt; dann wird einer der Brennpunkte F, G das Involutionscentrum, und in dem anderen steht die Involutionsaxe zu FG normal. Sind die Parameter der collinearen Felder η, η_1 ungleich, so kann man ein zu η_1 ähnliches Feld construiren, welches denselben Parameter c hat, wie η, und zu η involutorisch liegt.

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage I, S. 156 (3. Aufl.).

Bekanntlich werden die Paare conjugirter Normalstrahlen bezüglich eines Kegelschnittes ebenso von dessen Hauptaxe wie von seiner Nebenaxe in Punktepaaren einer Involution geschnitten, und zwar sind die Brennpunkte des Kegelschnittes die Doppelpunkte dieser Involution. Zwei conjugirte Normalstrahlen des Feldes η sind demnach durch die Brennpunkte F, G harmonisch getrennt. Wenn also in η die Schenkel eines rechten Winkels sich um zwei durch F und G harmonisch getrennte Punkte A, A' drehen (Fig. 2), so sind und bleiben sie conjugirte Normalstrahlen des Feldes η; ihnen entsprechen aber in η_1 zwei conjugirte Normalstrahlen dieses Feldes, welche sich um zwei durch F_1 und G_1 harmonisch getrennte Punkte A_1, A_1' drehen. Die Scheitel dieser homologen rechten Winkel beschreiben homologe Kreise über den Durchmessern AA' und A_1A_1'. Jedem Kreise von η, welcher die Gerade FG in zwei durch F und G harmonisch getrennten Punkten rechtwinklig schneidet, entspricht demnach in η_1 ein Kreis, von welchem ein Durchmesser in F_1 und G_1 harmonisch getheilt ist;

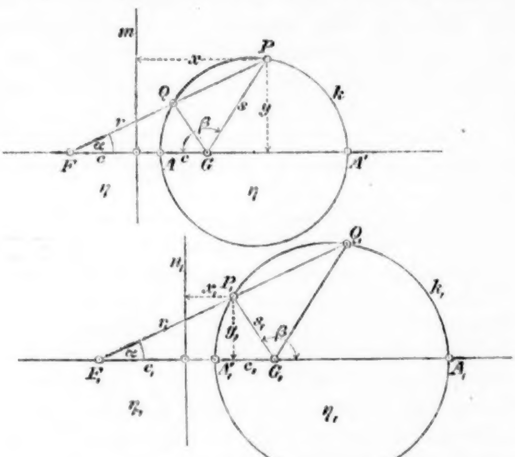


Fig. 2.

und die beiden Kreisbüschel, von welchen je zwei verschwindend kleine Kreise sich auf die Brennpunkte F, G resp. F_1, G_1 reduciren, entsprechen einander in den collinearen Feldern. Smith nennt diese homologen Kreise die „Focalkreise" der beiden Felder. Die Punktepaare der Involution auf der Fluchtlinie m bestehen aus je zwei Punkten, die conjugirt sind bezüglich der Focalkreise in η; denn ihnen entsprechen auf der unendlich fernen Geraden m_1 Paare von je zwei Punkten, die conjugirt sind bezüglich der entsprechenden Kreise in η_1.

Sind in den collinearen Feldern η, η_1 die beiden Paare homologer Brennpunkte F, F_1 und G, G_1 gegeben (Fig. 2), so kann zu einem beliebigen Punkte P von η der entsprechende Punkt P_1 von η_1 construirt werden. Seien nämlich α und β die Winkel des Dreiecks FGP bei F und G, und sei etwa $\alpha < \beta$; construirt man dann in η_1 ein Dreieck $F_1G_1P_1$, welches bei F_1 und G_1 die resp. Winkel α und $\pi - \beta$ hat, so entspricht dessen dritter Eckpunkt P_1 dem Punkte P von η. Der Punkt P_1 kann zwei in Bezug auf F_1G_1 symmetrische Lagen haben; ist er aber in einer dieser Lagen angenommen, so ist die projective Beziehung der gleichen Strahlenbüschel F, F_1 und G, G_1 und damit die Collineation der beiden Felder völlig bestimmt.

Die Punkte P, P_1 liegen auf zwei homologen Kreisen k, k_1 der collinearen Felder, diese Kreise aber werden von FP resp. F_1P_1 in noch zwei homologen Punkten Q, Q_1 geschnitten (Fig. 2). Weil F und G einen Durchmesser des Kreises k harmonisch theilen, so ist die Polare von F in Bezug auf k normal zu FG im Punkte G; sie ist ausserdem durch P und Q, also auch durch GP und GQ harmonisch getrennt von FG, und bildet folglich ebenso wie FG gleiche Winkel mit GP und GQ. Die Dreiecke FGQ und $F_1G_1P_1$ sind demnach ähnlich, ebenso aber FGP und $F_1G_1Q_1$, sowie QGP und $P_1G_1Q_1$. Die Seiten dieser ähnlichen Dreiecke und folglich auch die Durchmesser der homologen Kreise k, k_1 verhalten sich zu einander, wie $FG : F_1G_1$ oder $2c : 2c_1$, also wie die Parameter c, c_1 der collinearen Felder η, η_1.

Ueber die Krümmung collinearer ebener Curven sagt Henry Smith u. a.:

> „Da verschwindend kleine Linienelemente, die einen „Endpunkt gemein haben und auf derselben Geraden liegen, „durch eine Collineation alle in demselben Verhältniss ge-„ändert werden, so wird die Krümmung aller Curven, die „sich in einem gegebenen Punkte berühren, in demselben „Verhältniss geändert. Wenn z. B. eine Curve in η einen „Focalkreis berührt, so wird ihr Krümmungsradius an dem „Berührungspunkte durch die Collineation der Felder η, η_1 „in dem Verhältnisse von c zu c_1 geändert".

Der von Smith hier nur angedeutete Beweis seines Satzes lässt sich leicht vervollständigen. Zweien Curven k, l von η, die eine Gerade t im Punkte P berühren, entsprechen in η_1 zwei Curven k_1, l_1 welche in dem entsprechenden Punkte P_1 eine Gerade t_1 berühren. Wenn nun k und l auf einer Geraden g, welche durch P geht und mit der Tangente t einen unendlich kleinen Winkel bildet, die verschwindend kleinen Sehnen PK und PL begrenzen, so verhalten sich die Radien ihrer Krümmungskreise in P zu einander, wie diese Sehnen PK und PL. Ebenso aber verhalten sich nach Smith die entsprechenden

Sehnen $P_1 K_1$ und $P_1 L_1$ der Curven k_1 und l_1, und folglich die Radien ihrer Krümmungskreise im Punkte P_1. Die Krümmungsradien der sich berührenden Curven k und l im Punkte P werden also wirklich in gleichem Verhältnisse durch die Collineation geändert. — Den Beweis des hier benutzten Hülfssatzes von Smith werden wir sogleich nachholen; Smith selbst unterdrückt ihn.

Wir beziehen die collinearen Felder η und η_1 auf rechtwinklige Coordinatensysteme (Fig. 2), von denen die Abscissenaxen mit FG und $F_1 G_1$, die Ordinatenaxen aber mit den Fluchtlinien m und n_1 zusammenfallen. Für die Coordinaten homologer Punkte P, P_1 und ihre Abstände r, s resp. r_1, s_1 von den Brennpunkten erhalten wir dann die Gleichungen:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{c+x}{c_1+x_1} = \frac{x-c}{c_1-x_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{s}{s_1}$$

woraus sich sofort die canonischen Gleichungen der Collineation ergeben (vgl. Chasles, Géométrie supérieure, Nr. 533), nämlich:

$$xx_1 = cc_1\,, \quad \text{oder} \quad x_1 x = c_1 c,$$
$$yx_1 = cy_1, \qquad y_1 x = c_1 y.$$

Die Abscissen der homologen gleichen Punktreihen der Felder sind $x = \pm c_1$ und $x_1 = \pm c$; denn für sie folgt $y = \pm y_1$. Der Kreis $x^2 + y^2 + 2\lambda cx + c^2 = 0$ geht durch die canonischen Gleichungen über in den Kreis $x_1^2 + y_1^2 + 2\lambda c_1 x_1 + c_1^2 = 0$, und die Radien dieser homologen Kreise verhalten sich in der That wie $c : c_1$. Die Ellipse oder Hyperbel $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$ geht über in die Hyperbel resp. Ellipse $\frac{x_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{y_1^2}{c_1^2 - \lambda_1^2} = 1$, deren Halbaxe λ_1 von der halben Axe λ der ersteren Curve mittelst der Gleichung $\lambda \lambda_1 = cc_1$ abhängt. Wenn λ sich ändert, so beschreiben diese homologen Kegelschnitte die confocalen Schaaren, deren Brennpunkte F, G resp. F_1, G_1 sind.

In einem beliebigen Punkte P von η schneiden sich zwei confocale Kegelschnitte der ersteren Schaar rechtwinklig; die auf FG liegenden Halbaxen λ, λ' dieser beiden Kegelschnitte aber nennt man die elliptischen Coordinaten des Punktes P. Sie sind mit den elliptischen Coordinaten λ_1, λ_1' des entsprechenden Punktes P_1 von η_1 durch die Gleichungen verbunden:

$$\lambda \lambda_1 = \lambda' \lambda_1' = cc_1 \quad \text{oder} \quad (r \pm s)(r_1 \mp s_1) = 4cc_1,$$

welche aus der allgemeinen Gleichung $xx_1 = cc_1$ ohne Weiteres folgen.

Sind ds und ds_1 zwei verschwindend kleine homologe Linienelemente der collinearen Felder, dx resp. dx_1 ihre Projectionen auf den Abscissenaxen, und φ resp. φ_1 ihre mit diesen Axen gebildeten Winkel, so ist:

$$ds \cos\varphi = dx, \quad ds_1 \cos\varphi_1 = dx_1 = -\frac{cc_1}{x^2}\,dx,$$

und folglich:

$$\frac{ds}{ds_1} = -\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}\cdot\frac{x^2}{cc_1} = -\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}\cdot\frac{x}{x_1}.$$

Dieses Verhältniss der beiden Linienelemente ändert sich nur mit ihren Richtungen und ihren Abscissen, ist aber, wenn diese ungeändert bleiben, unabhängig von ihren Längen. Der früher benutzte Hülfssatz von Smith ist damit bewiesen.

§ 2.

Collineare Strahlenbündel.

Die Methoden, die wir zur Herleitung der focalen Eigenschaften collinearer Strahlenbündel benutzen, wurden schon 1868 in meiner „Geometrie der Lage"*) entwickelt und zu ähnlichen Untersuchungen verwendet. Wir können uns deshalb hier kurz fassen.

Wir beschränken uns auf collineare Bündel, deren Mittelpunkte S, S_1 nicht unendlich fern liegen. Ordnen wir im Bündel S_1 jedem Strahle die zu ihm normale Ebene zu, so wird S_1 ein rechtwinklig polarer Strahlenbündel; zugleich aber wird S ein polarer Bündel, wenn auch kein rechtwinkliger, und zwar entsprechen einem beliebigen Strahle von S und seiner Polarebene allemal ein Strahl und dessen Normalebene in S_1. Zwei conjugirten Strahlen oder Ebenen des Bündels S entsprechen zwei zu einander normale Strahlen resp. Ebenen des Bündels S_1, und jedem Poldreikant von S_1 entspricht ein rechtwinkliges Dreikant von S_1. Bekanntlich enthält jeder polare Bündel ein und i. A. nur ein rechtwinkliges Poldreikant, dessen zu einander normale Kanten und Flächen von den drei Hauptaxen und den drei Symmetrieebenen des Bündels gebildet werden. Dem rechtwinkligen Poldreikant von S aber entspricht ein gleichfalls rechtwinkliges Dreikant des Bündels S_1. Den Specialfall, in welchem der polare Bündel S mehr als drei, nämlich unendlich viele Hauptaxen und Symmetrieebenen hat, schliessen wir aus.

In dem polaren Bündel S giebt es zu einer beliebigen Ebene ε eine conjugirte normale Ebene ε', welche den Polstrahl von ε mit dem zu ε normalen Strahle verbindet; ebenso giebt es in S zu einem beliebigen Strahle l einen conjugirten normalen Strahl l', in welchem sich die Polarebene von l und die zu l normale Ebene des Bündels schneiden. Eine Symmetrieebene von S ist zu allen ihr conjugirten

---

*) Erste Auflage (1868) Thl. II, S. 41 und 229—232; dritte Aufl. (1892) Thl. I, S. 179—190, Thl. II, S. 51 und 271.

Ebenen normal, und ebenso eine Hauptaxe von S zu allen ihr conjugirten Strahlen des Bündels. Zwei solchen „conjugirten Normalstrahlen" l, l' oder „conjugirten Normalebenen" ε, ε' des Bündels S entsprechen allemal zwei zu einander normale Strahlen resp. Ebenen des Bündels S_1, weil je zwei conjugirten Elementen von S zwei normale Elemente von S_1 entsprechen. Die collinearen Bündel S, S_1 enthalten demnach unendlich viele homologe rechte Winkel. Ueber conjugirte Normalebenen und Normalstrahlen eines polaren Bündels ist nun Folgendes bekannt*).

Wenn eine Ebene ε in dem polaren Bündel S um eine beliebige Axe s sich dreht, so umhüllt ihre conjugirte Normalebene ε' i. A. einen Kegel zweiter Ordnung, welcher die drei Symmetrieebenen von S berührt; liegt aber die Axe s in einer Symmetrieebene α des Bündels, so dreht sich auch ε' um eine in α liegende Gerade s'. Die Paare conjugirter Normalebenen ε, ε' werden von jeder Symmetrieebene des Bündels in Strahlenpaaren s, s' einer Involution geschnitten. Nur in einer der drei Symmetrieebenen hat die so erhaltene Involution zwei reelle Doppelstrahlen f, g, welche die „Focalaxen" des polaren Bündels heissen. Die beiden Focalaxen f, g trennen demnach je zwei conjugirte Normalebenen und insbesondere die übrigen beiden Symmetrieebenen harmonisch, und jede von ihnen ist die Axe einer rechtwinkligen Involution conjugirter Ebenen des Bündels S. Sind die Focalaxen f, g gegeben, so kann man hiernach zu jeder Ebene des Bündels die conjugirte Normalebene leicht construiren. Die von f und g gebildeten Nebenwinkel werden von zwei Hauptaxen des polaren Bündels halbirt; die dritte Hauptaxe ist zu f, g und der Symmetrieebene fg normal.

Wenn in dem polaren Bündel S ein Strahl l eine beliebige Ebene φ beschreibt, so beschreibt sein conjugirter Normalstrahl l' i. A. einen durch die drei Hauptaxen gehenden Kegel zweiter Ordnung; geht aber φ durch eine Hauptaxe a des Bündels, so beschreibt auch l' eine durch a gehende Ebene φ'. Die Paare conjugirter Normalstrahlen l, l' werden aus jeder Hauptaxe durch Ebenenpaare φ, φ' einer Involution projicirt. Nur für eine der drei Hauptaxen hat die zugehörige Involution zwei reelle Doppelebenen $\varkappa, \lambda$, welche die „cyklischen Ebenen" des polaren Bündels heissen. Diese cyklischen Ebenen $\varkappa$, λ trennen je zwei conjugirte Normalstrahlen und insbesondere die übrigen beiden Hauptaxen harmonisch, und jede von ihnen enthält eine rechtwinklige Involution conjugirter Strahlen des Bündels S. Die von $\varkappa$ und λ gebildeten Nebenwinkel werden von zwei Symmetrieebenen des Bündels halbirt.

Den vier rechtwinkligen Involutionen conjugirter Elemente von S, welche die Focalaxen f, g und die cyklischen Ebenen $\varkappa$, λ dieses

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., I, S. 179–190.

polaren Bündels zu Trägern haben, entsprechen im Bündel S_1 wiederum rechtwinklige Ebenen- und Strahleninvolutionen. Nun giebt es aber in zwei ungleichen projectiven Büscheln nur ein Paar homologer rechter Winkel. Die Ebenenbüschel f, g und die Strahlenbüschel $\varkappa$, λ von S sind deshalb den entsprechenden Ebenenbüscheln f_1, g_1 resp. Strahlenbüscheln $\varkappa_1$, λ_1 des Bündels S_1 projectiv gleich. Ueberhaupt giebt es hiernach in zwei collinearen Strahlenbündeln i. A. zwei Paare homologer gleicher Strahlen- bezw. Ebenenbüschel.

Bringt man die Ebenenbüschel f, f_1 mit ihren homologen Ebenen zur Deckung, so werden bekanntlich die collinearen Bündel S, S_1 perspectiv und Scheine eines ebenen Feldes η; von ihren homologen gleichen Strahlenbüscheln liegen dann zwei in Ebenen, die zu η parallel sind, und die Ebenen der übrigen beiden gehen durch die Schnittlinie von η mit der Ebene μ, welche die Strecke SS_1 rechtwinklig halbirt (Vgl. Fig. 3, welche die Schnitte dieser Ebenen mit einer durch SS_1 normal zu η gelegten Ebene darstellt). Die Axen der projectiv gleichen Ebenenbüschel g, g_1 gehen durch die Spiegelbilder der resp. Punkte S_1 und S bezüglich der Ebene η. Die cyklischen Ebenen $\varkappa$, λ des Bündels S schneiden sich also in der zu den Focalaxen f, g normalen Hauptaxe.

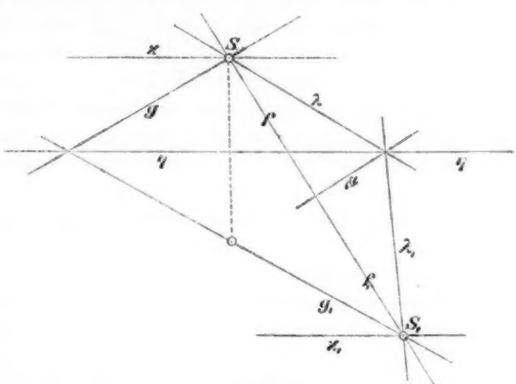


Fig. 3.

Da je zwei conjugirte Normalebenen ε, ε' des polaren Bündels S harmonisch getrennt sind durch f und g, so sind sie nach bekannten Sätzen*) conjugirt bezüglich aller Kegel zweiter Ordnung, welche f und g zu Focalaxen haben. Die Polstrahlen der beliebigen Ebene ε von S bezüglich dieser confocalen Kegel liegen demnach alle in einer

*) Vgl. Reye, Geom. d. Lage, I, S. 183.

zu ε normalen Ebene ε'. Jede der Ebenen ε, ε' berührt in dem Strahle $\overline{\varepsilon\varepsilon'}$ einen der confocalen Kegel; die Kegel schneiden sich also rechtwinklig in ihren gemeinsamen Strahlen. Den confocalen Kegeln entsprechen im Bündel S_1 confocale Kegel zweiter Ordnung, welche f_1 und g_1 zu Focalaxen haben. In den collinearen Bündeln S, S_1 entsprechen einander nicht nur die Berührungs- sondern auch die Normalebenen dieser homologen Kegel, sowie die von den Normalebenen umhüllten Flächen, weil zwei conjugirten Normalebenen von S allemal zwei normale Ebenen in S_1 entsprechen.

In analoger Weise sind je zwei conjugirte Normalstrahlen l, l' des polaren Bündels S conjugirt bezüglich aller Kegel zweiter Ordnung, welche $\varkappa$ und λ zu cyklischen Ebenen haben. Die Polarebenen des Strahles l von S bezüglich dieser „concyklischen" Kegel gehen demnach alle durch den zu l conjugirten Normalstrahl l'; diese Kegel bilden also einen Büschel. Die Ebene ll' wird in jedem der conjugirten Normalstrahlen l, l' von einem der concyklischen Kegel berührt. Diesen Kegeln entsprechen in dem Bündel S_1 concyklische Kegel zweiter Ordnung, welche $\varkappa_1$ und λ_1 zu gemeinsamen cyklischen Ebenen haben.

Wir bringen nun alle diese Kegel und überhaupt die collinearen Bündel S, S_1 zum Schnitt mit den resp. Kugeln α, α_1, welche mit dem Radius eins um ihre Mittelpunkte beschrieben werden. Homologe Ebenen, Strahlen oder Kegel der Bündel S, S_1 schneiden dann die Kugeln α, α_1 in je zwei homologen Hauptkreisen, Punktepaaren oder sphärischen Kegelschnitten. Jedem Punkte P von α entsprechen demnach die Endpunkte P_1, P_1' eines Durchmessers von α_1, und jeder Tangente t von α im Punkte P entsprechen zwei parallele Tangenten t_1, t_1' von α_1 in den Punkten P_1, P_1'; die Ebene $t_1 t_1'$ von S_1 entspricht der durch t gehenden Ebene des Bündels S. Wenn die Tangente t um P sich dreht, so beschreiben zugleich t_1 und t_1' zwei zum Büschel P projective Tangentenbüschel P_1 und P_1' der Kugel α_1. Nur zwei dieser drei Büschel, etwa P und P_1, werden, wenn man sie aus den resp. Mittelpunkten der Kugeln betrachtet, in gleichem Sinne beschrieben, d. h. beide von links nach rechts oder beide von rechts nach links herum; denn die Büschel P_1 und P_1' erscheinen vom Punkte S_1 aus als in entgegengesetztem Sinne beschrieben. Wir beziehen nun die Punkte der beiden Kugeln α, α_1 *eindeutig* auf einander, indem wir dem beliebigen Punkte P von α den Punkt P_1 von α_1 und dem Gegenpunkte P' von P den Gegenpunkt P_1' von P_1 als entsprechenden zuweisen. Homologe Tangentenbüschel der Kugeln sind dann nicht allein Schnitte homologer Ebenenbüschel der Bündel S und S_1, sondern sie sind auch, wenn man sie aus den resp. Mittelpunkten betrachtet, in gleichem Sinne beschrieben. Diese eindeutige Beziehung der Kugeln

ist nur dann eine collineare, wenn jedem Kreise von α ein Kreis auf α_1 entspricht, was aber nur im Falle congruenter Bündel S, S_1 zutrifft.

Die Kugel α schneidet die vorhin erwähnten confocalen Kegel zweiter Ordnung von S und deren Focalaxen f, g in confocalen sphärischen Kegelschnitten und in deren zwei paar Brennpunkten F, F' und G, G'; sie schneidet die concyklischen Kegel und deren cyklische Ebenen $\varkappa$, λ in concyklischen sphärischen Kegelschnitten und in deren cyklischen Hauptkreisen k, l. Diesen confocalen resp. concyklischen Kegelschnitten auf α aber entsprechen auf der Kugel α_1 wiederum confocale resp. concyklische Kegelschnitte, in welchen α_1 die entsprechenden Kegel des Bündels S_1 schneidet. Die Kugelflächen α, α_1 werden durch ihre homologen confocalen Kegelschnitte in unendlich kleine homologe Rechtecke getheilt. Von diesen homologen Kegelschnitten entsprechen einander nicht nur die sphärischen Tangenten, sondern auch die sphärischen Normalen und Krümmungscentren homologer Punkte und die sphärischen Evoluten.

Die sphärischen Kegelschnitte sind Zwillingscurven, d. h. sie bestehen aus je zwei getrennten gleichen Linien, deren Punkte einander paarweise diametral gegenüber liegen. Da nun die confocalen Kegel im Bündel S ihre beiden Focalaxen f, g einschliessen, so umschliesst ein beliebiger der confocalen Kegelschnitte auf α seine vier Brennpunkte, und zwar zwei, etwa F und G, mit dem einen, und die beiden übrigen F', G' mit dem anderen seiner beiden Linienzüge. Wenn ein veränderlicher Punkt P den ersteren Linienzug durchläuft, so drehen sich die Hauptkreisbögen FP, GP und ihre Tangenten in F und G, vom Mittelpunkte S aus gesehen, in gleichem Sinne. In demselben Sinne aber drehen sich auf der Kugel α_1, von ihrem Mittelpunkte S_1 aus betrachtet, die entsprechenden Hauptkreisbögen F_1P_1 und G_1P_1, indem P_1 den entsprechenden Linienzug auf α_1 durchläuft. Homologe Linienzüge von zwei einander entsprechenden Kegelschnitten der confocalen Schaaren umschliessen also allemal zwei paar homologe Brennpunkte und zwei homologe Flächentheile der Kugeln α und α_1. Die homologen sphärischen Dreiecke FPG und $F_1P_1G_1$ aber haben gleiche Winkel bei F und F_1, sowie bei G und G_1, und zwar sind diese gleichen Winkel, wenn man sie von den resp. Kugelcentren aus betrachtet, in gleichem Sinne beschrieben.

Sind auf der Kugel α die beiden Brennpunkte F, G und auf α_1 die ihnen entsprechenden Brennpunkte F_1, G_1 gegeben, so kann man hiernach zu jedem Punkte P von α den entsprechenden Punkt P_1 von α_1 leicht und eindeutig bestimmen. Man construire auf α_1 das sphärische Dreieck $F_1P_1G_1$ so, dass seine beiden Winkel bei F_1 und G_1 auch dem Drehungssinne nach gleich den Winkeln des sphärischen Dreiecks FPG bei resp. F und G werden; dann entspricht der Punkt P_1 von

α_1 dem Punkte P von α. In den collinearen Bündeln S_1 und S aber entsprechen einander die Strahlen S_1P_1 und SP.

Von den zahlreichen Formeln, welche Smith aus dieser Construction abgeleitet hat, sei hier nur eine hervorgehoben. In den sphärischen Dreiecken FPG und $F_1P_1G_1$ mögen den Eckpunkten G, F, P und G_1, F_1, P_1 die resp. Seiten $r, s, 2c$ und $r_1, s_1, 2c_1$ gegenüberliegen; dann ergiebt sich aus den Napier'schen Analogien sofort:

$$\operatorname{tg}\frac{r+s}{2}:\operatorname{tg}\frac{r_1+s_1}{2}=\operatorname{tg}c:\operatorname{tg}c_1=\operatorname{tg}\frac{r-s}{2}:\operatorname{tg}\frac{r_1-s_1}{2}.$$

Hieraus aber folgt wiederum, dass den confocalen sphärischen Kegelschnitten auf α, welche durch die Gleichungen $r\pm s=\text{Const.}$ dargestellt werden, die confocalen Kegelschnitte $r_1\pm s_1=\text{Const.}$ auf α_1 entsprechen.

§ 3.

Collineare Räume.

Wir beschränken unsere Untersuchung auf solche collineare Räume Σ, Σ_1, die nicht affin sind, deren unendlich ferne Ebenen also nicht einander entsprechen. Die Fluchtebene μ von Σ resp. ν_1 von Σ_1 enthält die Fluchtlinien aller Ebenen dieses Raumes und entspricht der unendlich fernen Ebene μ_1 resp. ν des anderen Raumes Σ_1 resp. Σ. Die unendlich fernen Geraden $\mu\nu$ und $\mu_1\nu_1$ der beiden Fluchtebenen μ, ν_1 entsprechen einander, und jeder zu μ parallelen Ebene φ von Σ entspricht demnach eine zu ihr affine und zu ν_1 parallele Ebene φ_1 von Σ_1. Zwei homologe Ebenen der collinearen Räume enthalten i. A. zwei paar gleiche homologe Gerade, zwei paar gleiche homologe Strahlenbüschel und zwei Büschel homologer Kreise (§ 1). Ebenso enthalten zwei homologe Strahlenbündel von Σ und Σ_1 i. A. zwei paar gleiche homologe Strahlenbüschel und zwei paar gleiche homologe Ebenenbüschel (§ 2). Gleiche homologe Gerade u, u_1 der collinearen Räume sind zu den resp. Fluchtebenen μ, ν_1 parallel, und alle zu u parallelen Geraden von Σ, die von μ denselben Abstand haben wie u, sind ihren entsprechenden Geraden in Σ_1 projectiv gleich.

Als Schnitt eines rechtwinklig polaren Strahlenbündels mit der unendlich fernen Ebene μ_1 von Σ_1 erhalten wir in μ_1 ein polares Feld, dessen Ordnungscurve der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis ist. Diesem Felde entspricht in der Fluchtebene μ von Σ ein anderes polares Feld; und zwar gehen zwei Ebenen oder Strahlen von Σ dann durch zwei conjugirte Strahlen oder Punkte des polaren Feldes μ, wenn ihnen in Σ_1 zwei zu einander normale Ebenen oder Strahlen ent-

sprechen. Wir wollen in diesem Falle die beiden Ebenen resp. Strahlen von Σ selbst conjugirt nennen. Jeder rechtwinkligen Involution von Ebenen oder Strahlen des Raumes Σ_1 entspricht hiernach eine Involution conjugirter Ebenen resp. Strahlen von Σ. Eine Ebene und eine Gerade von Σ nennen wir conjugirt, wenn sie das polare Feld μ in einer Geraden und in deren Pole schneiden; ihnen entsprechen dann in Σ_1 eine Ebene und eine Gerade, die zu einander normal sind.

In der Fluchtebene von Σ_1 erhalten wir ebenso ein polares Feld ν_1, welchem der Schnitt eines rechtwinkligen Strahlenbündels mit der unendlich fernen Ebene ν von Σ entspricht. Zwei normalen conjugirten Ebenen oder Strahlen von Σ entsprechen in Σ_1 zwei normale Ebenen resp. Strahlen, welche durch zwei conjugirte Strahlen resp. Punkte des polaren Feldes ν_1 gehen. Die Ordnungscurve des polaren Feldes μ resp. ν_1 entspricht dem unendlich fernen Kugelkreise in μ_1 resp. ν und ist wie dieser imaginär; die Involutionen conjugirter Punkte oder Strahlen von μ oder ν_1 sind deshalb alle elliptisch.

Eine beliebige Gerade g von μ enthält allemal eine dieser Punktinvolutionen und ist die Axe eines Kreises, aus dessen Punkten die Involution durch rechtwinklig involutorische Strahlenbüschel projicirt wird (vgl. § 1). Jedem dieser rechtwinkligen Büschel von Σ aber entspricht in Σ_1 ein rechtwinklig involutorischer und folglich ihm gleicher Strahlenbüschel. Wird von zwei homologen gleichen Strahlenbüscheln S, S_1 der collinearen Räume der eine S um die Fluchtlinie g seiner Ebene gedreht, sodass sein Mittelpunkt einen Kreis um die Axe g beschreibt, so bleibt er dem ihm entsprechenden Büschel S_1 von Σ_1 projectiv gleich; der Mittelpunkt dieses Büschels S_1 aber beschreibt eine Hyperbel und seine Ebene verschiebt sich parallel zu ihrer Anfangslage.

Das polare Feld μ hat einen Mittelpunkt M, dessen Polare in μ unendlich fern liegt, und eine Involution conjugirter Durchmesser, die alle durch M gehen. Ist diese Involution rechtwinklig, so ist das polare Feld μ ein circuläres, und seine Ordnungscurve ist ein imaginärer Kreis. In diesem besonderen Falle wird die Involution seiner unendlich fernen conjugirten Punkte aus einem beliebigen Punkte P von Σ durch einen rechtwinklig involutorischen Strahlenbüschel projicirt, welchem in Σ_1 ein rechtwinklig involutorischer und folglich ihm gleicher Strahlenbüschel P_1 entspricht. Auch die beiden unendlich fernen homologen Geraden der Fluchtebenen μ, ν_1 sind demnach projectiv gleich, je zwei zu μ resp. ν_1 parallele homologe Felder von Σ und Σ_1 aber sind ähnlich, und es giebt in den collinearen Räumen zwei paar congruente homologe Felder (vgl. § 1). Die beiden Räume können also in diesem Falle auf zwei verschiedene Arten in perspective Lage gebracht werden; sie enthalten zwei paar gleiche homologe Strahlen-

bündel und zwei Büschel homologer Kugeln*) mit proportionalen Radien (vgl. § 1). Wir schliessen diesen Specialfall von jetzt an aus.

Das polare Feld μ hat i. A. nur ein Paar zu einander normaler conjugirter Durchmesser oder Axen. Zu einer beliebigen Ebene η von Σ sind unendlich viele Ebenen conjugirt und normal, nämlich die Ebenen einer zu η conjugirten und normalen Geraden e, welche das polare Feld μ in dem Pole der Geraden $\eta\mu$ trifft. Ich nenne e den „conjugirten Normalstrahl" der Ebene η, und η die „conjugirte Normalebene" von e. Ihnen entsprechen in Σ_1 zwei zu einander normale Elemente η_1, e_1, die bezüglich des polaren Feldes ν_1 conjugirt sind. Die zu μ parallelen Ebenen von Σ haben einen und denselben conjugirten Normalstrahl h, welcher die Fluchtebene μ in ihrem Mittelpunkte M rechtwinklig schneidet und die „Hauptaxe" des Raumes Σ heissen möge. Die entsprechende Hauptaxe h_1 von Σ_1 ist ebenso zu der Fluchtebene ν_1 in deren Mittelpunkte N_1 normal. Weil die beiden Axen des polaren Feldes μ conjugirt sind und sich in M rechtwinklig schneiden, so werden sie aus der Hauptaxe h durch zwei conjugirte normale Ebenen α, β projicirt, welchen in Σ_1 zwei normale Ebenen α_1, β_1 der Hauptaxe h_1 entsprechen. Wir nennen α und β resp. α_1 und β_1 die „Hauptebenen" von Σ resp. Σ_1. Jeder zu der Hauptebene α oder β normale Strahl kann als ihr conjugirter Normalstrahl aufgefasst werden, denn er geht durch den unendlich fernen Pol der Axe $\mu\alpha$ resp. $\mu\beta$ bezüglich des polaren Feldes μ; ihm entspricht in Σ_1 ein zu α_1 resp. β_1 normaler Strahl. Ebenso ist jeder durch den Mittelpunkt M gehende Strahl ein conjugirter Normalstrahl der unendlich fernen Ebene ν von Σ, und jeder zu μ normale Strahl ein solcher der Fluchtebene μ.

Die drei normalen Ebenen α, β, μ bilden mit der unendlich fernen Ebene ν von Σ ein Tetraeder, welches von unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung ein Poltetraeder ist. Eine dieser Flächen in Σ ist völlig bestimmt, wenn von einer beliebigen Ebene η der Pol E gegeben ist; sie hat α, β und μ zu Symmetrieebenen, und ihr entspricht in Σ_1 eine Fläche zweiter Ordnung, von welcher die Ebenen α_1, β_1, μ_1, ν_1 ein Poltetraeder bilden und α_1, β_1, ν_1 die drei Symmetrieebenen sind. Wird der Pol E von η auf dem conjugirten Normalstrahle e der Ebene η angenommen, so fällt von jener Fläche in Σ eine Focalcurve zusammen mit der imaginären Ordnungscurve des polaren Feldes μ**); denn das polare Feld der Focalcurve in der Symmetrieebene μ ist bestimmt durch seine beiden Axen $\mu\alpha$, $\mu\beta$ und durch die Gerade $\mu\eta$ und deren Pol μe, und ist folglich mit dem vorhin in μ angenommenen polaren

*) Kilbinger, Problem der homologen Kreise in collinearen Räumen (Strassb. Inaug. Diss.), Bonn 1880.

**) Vgl. Reye, Geom. d. Lage, 3. A., II, S. 150.

Felde identisch. Es giebt demnach in Σ eine Schaar confocaler Flächen zweiter Ordnung, welche die Ordnungscurve des polaren Feldes μ zur gemeinsamen Focalcurve haben; die Pole einer beliebigen Ebene η bezüglich dieser Flächen liegen allemal auf dem conjugirten Normalstrahle e und η, und zwei normale Ebenen η, η' sind folglich conjugirt bezüglich aller dieser confocalen Flächen, wenn sie bezüglich einer derselben conjugirt sind.

Die conjugirten Normalstrahlen aller Ebenen des Raumes Σ bilden den quadratischen Axencomplex*) der confocalen Flächen, welcher alle Normalen dieser Flächen, die Axen ihrer Kegelschnitte und die Hauptaxen ihrer Tangentenkegel enthält. Den confocalen Flächen entsprechen in Σ_1 confocale Flächen zweiter Ordnung, welche die Ordnungscurve des polaren Feldes ν_1 zur Focalcurve haben; denn jeder Ebene η von Σ und ihrem conjugirten Normalstrahle e entsprechen in Σ_1 eine Ebene η_1 und ein zu ihr normaler Strahl e_1 so, dass $\nu_1 e_1$ der Pol der Geraden $\nu_1 \eta_1$ ist bezüglich des polaren Feldes ν_1. Auch die Axencomplexe der beiden confocalen Schaaren entsprechen hiernach einander in Σ und Σ_1; und je zwei normalen Ebenen oder Strahlen, die bezüglich der einen Schaar conjugirt sind, entsprechen zwei bezüglich der anderen Schaar conjugirte, normale Ebenen resp. Strahlen.

Als „Focalaxe" einer Fläche zweiter Ordnung bezeichnen wir jede Gerade, deren zu einander normale Ebenen conjugirt sind bezüglich der Fläche. Zu den Focalaxen der Fläche gehören demnach die Focalaxen aller ihrer Tangentenkegel und alle auf der Fläche liegenden Geraden. Confocale Flächen zweiter Ordnung haben alle dieselben Focalaxen, und durch jede ihrer Focalaxen geht eine der confocalen Flächen**). Jeder Focalaxe f der confocalen Schaar in Σ entspricht demnach eine Focalaxe f_1 der confocalen Schaar in Σ_1; der rechtwinkligen Involution conjugirter Ebenen des Büschels f aber entspricht eine rechtwinklige Involution im Büschel f_1, und die homologen Ebenenbüschel f, f_1 der collinearen Räume sind folglich projectiv gleich. Ueberhaupt giebt es im Raume Σ zweifach unendlich viele Ebenenbüschel, die ihren entsprechenden Ebenenbüscheln in Σ_1 projectiv gleich sind. Ihre Axen sind die Focalaxen der confocalen Flächen zweiter Ordnung in Σ, und liegen auf je einer dieser Flächen; die ihnen entsprechenden Axen aber liegen auf je einer der confocalen Flächen in Σ_1, und bilden wie jene eine Congruenz sechster Ordnung zweiter Classe***).

Ueberhaupt entsprechen von den beiden confocalen Schaaren die einschaligen Hyperboloide einander; jedem Ellipsoide der einen Schaar

*) Vgl. Reye, G. d. L., II, S. 138.

**) Vgl. ebenda S. 154.

***) Sturm, Math. Annalen Bd. 28, S. 264.

aber entspricht ein zweischaliges Hyperboloid der anderen, welches mit der zugehörigen Fluchtebene keinen reellen Punkt, mit der unendlich fernen Ebene aber einen reellen Kegelschnitt gemein hat. Der Focalellipse jeder Schaar entspricht ebenso die Focalhyperbel der anderen Schaar. Diese reellen Focalcurven liegen in den homologen Hauptebenen α, α_1 oder β, β_1 der collinearen Räume. Von zwei homologen Bündeln in Σ und Σ_1, deren Mittelpunkte auf zwei Focalcurven liegen, fallen die Focalaxen mit den zugehörigen Tangenten dieser Curven zusammen; diese Bündel enthalten also nur ein Paar gleicher homologer Ebenenbüschel, deren Axen jene Tangenten sind.

Weil sich confocale Flächen zweiter Ordnung rechtwinklig schneiden, so werden die collinearen Räume durch die beiden confocalen Schaaren in unendlich kleine homologe rechtwinklige Parallelepipeda getheilt. Von zwei homologen Flächen dieser Schaaren entsprechen einander in Σ und Σ_1 nicht nur die Berührungsebenen sondern auch die Normalen homologer Punkte als die conjugirten Normalstrahlen dieser Ebenen, folglich auch die Krümmungslinien, die Kreispunkte, die Schaaren abwickelbarer Normalenflächen, die Krümmungsmittelpunkte und deren Orte. Homologe abwickelbare Normalenflächen haben homologe geodätische Linien der Krümmungscentrenflächen zu Rückkehrkanten und berühren diese Flächen ausserdem in homologen Curven. Von zwei homologen Flächen der confocalen Schaaren entsprechen einander auch die Normalebenen homologer Punkte. Jeder geodätischen Linie der einen entspricht deshalb eine geodätische Linie der anderen Fläche; denn die Krümmungsebenen einer geodätischen Linie sind ja zu der Fläche normal. Die Tangentenflächen von zwei homologen geodätischen Linien sind zwei anderen homologen Flächen der confocalen Schaaren umgeschrieben und berühren sie längs homologer Curven von Σ und Σ_1. Alle diese und einige andere Folgerungen finden sich schon in der Abhandlung von Henry Smith.

Wir beziehen die collinearen Räume Σ, Σ_1 durch rechtwinklige Coordinaten auf ihre Flucht- und Hauptebenen μ, α, β resp. ν_1, α_1, β_1; und zwar wählen wir zu Y- und Z-Axen die Fluchtlinien von α und β resp. α_1 und β_1, zu X-Axen aber die resp. Hauptaxen $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ von Σ und Σ_1. Bezeichnen c, c_1 resp. d, d_1 die Parameter der homologen Felder α, α_1 resp. β, β_1, so ergeben sich sofort die canonischen Gleichungen der Collineation (vgl. § 1):

$$\begin{aligned} xx_1 &= cc_1 = dd_1, &\quad \text{oder} \quad x_1x &= c_1c = d_1d, \\ yx_1 &= cy_1, & y_1x &= c_1y, \\ zx_1 &= dz_1, & z_1x &= d_1z. \end{aligned}$$

Durch sie gehen die beiden Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - d^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{y_1^2}{\lambda_1^2 - c_1^2} + \frac{z_1^2}{\lambda_1^2 - d_1^2} = 1,$$

wenn $\lambda\lambda_1 = cc_1 = dd_1$ ist, in einander über. Sie repräsentiren zwei homologe Flächen zweiter Ordnung, zugleich aber, wenn λ und λ_1 als willkürliche Parameter aufgefasst werden, die beiden homologen Schaaren confocaler Flächen von Σ und Σ_1.

Ueber die homologen Kreise der collinearen Räume macht Henry Smith keinerlei Angaben; ihre Lage in den beiden Räumen wurde auf meine Anregung von Herrn Kilbinger in der citirten Dissertation näher erörtert. Weil zwei nicht affine homologe Ebenen von Σ und Σ_1 allemal zwei Büschel homologer Kreise enthalten, so giebt es überhaupt vierfach unendlich viele Paare homologer Kreise. Eine beliebige Kugel $\varkappa$ von Σ enthält zwei Büschel reeller Kreise k, denen in Σ_1 Kreise entsprechen; denn ihr entspricht in Σ_1 eine Fläche $\varkappa_1$ zweiter Ordnung, die von zwei Büscheln paralleler Ebenen in reellen Kreisen k_1 geschnitten wird, und jedem dieser k_1 entspricht auf der Kugel $\varkappa$ ein Kreis k. Die Ebenen dieser Focalkreise k schneiden die Fluchtebene μ von Σ in zwei Geraden a, a' (Kilbinger); denn sie bilden zwei Büschel, welche den beiden Büscheln paralleler Ebenen von Σ_1 entsprechen.

Aendert sich die Kugel $\varkappa$ so, dass sie beständig durch einen bestimmten Focalkreis k' geht und einen Kugelbüschel beschreibt, so bleibt von ihren beiden „Focalkreisaxen" a, a' die eine a', welche mit k' in einer Ebene liegt, ungeändert. Die übrigen durch a' gehenden Ebenen schneiden demnach den Kugelbüschel in je einem Büschel von Focalkreisen k, denen in Σ_1 wieder Kreise entsprechen. Alle diese Focalkreise k und die durch sie gelegten Kugeln haben a' zur gemeinsamen Potenzaxe; sie bilden also einen Kugelbündel, und ihre Mittelpunkte liegen in einer zu a' normalen Ebene. Diese Centralebene enthält auch den Orthogonalkreis des Kugelbündels, den Ort seiner verschwindend kleinen Kugeln und Kreise.

Durch den Focalkreis k' gehen unendlich viele Flächen zweiter Ordnung von Σ, denen in Σ_1 Kugeln entsprechen. Eine beliebige von ihnen $\varkappa'$ schneidet die durch k' gehenden Kugeln in k' und je einem anderen Focalkreise k, dessen Ebene die zweite zu der betreffenden Kugel gehörige Focalkreisaxe a zur Fluchtlinie hat. Aber die Ebenen dieser anderen Focalkreise k sind bekanntlich parallel, und ihre Schnittlinien a mit der Fluchtebene μ haben folglich gleiche Richtung. Wenn sich also in Σ eine Kugel $\varkappa$ so verändert, dass die eine a' ihrer beiden Focalkreisaxen ihre Lage beibehält, so verschiebt sich die andere a in μ, ohne ihre Richtung zu ändern (Kilbinger). — Wir nehmen nun an, dass a' zu keiner der der beiden Hauptebenen α, β von Σ normal ist.

Wir können nach dem Vorhergehenden die Kugel $\varkappa$ so verändern, dass ihr Mittelpunkt auf eine der Hauptebenen α, β, etwa auf α fällt.

Ihr entspricht dann in Σ_1 eine Fläche $\varkappa_1$ zweiter Ordnung, welche die entsprechende Hauptebene α_1 zur Symmetrieebene hat; denn jeder zu α normalen Sehne der Kugel $\varkappa$ entspricht eine zu α_1 normale und von α_1 halbirte Sehne der Fläche $\varkappa_1$. Die Kreisschnittebenen von $\varkappa_1$ bilden folglich mit der Hauptebene α_1 gleiche Winkel, und zwar schiefe Winkel; denn wären sie zu α_1 normal oder parallel, so würden die Fluchtlinien a, a' der ihnen in Σ entsprechenden Ebenen zu α oder β normal sein gegen unsere Annahme. Je zwei auf α_1 sich schneidenden Kreisschnittebenen der Fläche $\varkappa_1$ aber entsprechen in Σ zwei Focalkreisebenen von $\varkappa$, die auf α sich schneiden und mit α gleiche Winkel bilden; und auch die Fluchtlinien a, a' dieser beiden Focalkreisebenen sind gegen die Hauptebene α gleich geneigt, weil sie in der zu α normalen Fluchtebene μ liegen. Die beiden Focalkreisaxen a, a' einer beliebigen Kugel des Raumes Σ bilden demnach mit der einen Hauptebene α und ebenso mit der anderen β gleiche Winkel*), sind aber nicht parallel.

Wenn zwei nicht parallele Gerade a, a' in der Fluchtebene η liegen und mit der Hauptebene α gleiche Winkel bilden, so sind sie die Focalkreisaxen von unendlich vielen Kugeln, die einen Büschel bilden. Denn jeder Focalkreis k', dessen Ebene durch a' geht, liegt auf unendlich vielen Kugeln, die ausser a' noch je eine zu α parallele Focalkreisaxe haben; diese letztere aber fällt für eine der Kugeln mit a zusammen. Die Focalkreise der durch a und a' gehenden Ebenen liegen also büschelweise auf Kugeln, welche a und a' zu gemeinsamen Potenz- und Focalkreisaxen haben. Diese Kugeln haben die Fluchtebene aa' oder η zur gemeinsamen Potenzebene und bilden folglich einen Büschel. Ihnen entsprechen im Raume Σ_1 concyklische Flächen zweiter Ordnung.

Die beiden Focalkreisaxen a, a' einer Kugel können zu der Hauptebene α parallel oder normal sein; sie sind dann zu einander parallel und können, wenn die Kugel sich ändert, sogar zusammenfallen. In jeder zu α parallelen oder normalen Geraden der Fluchtebene η vereinigen sich so die Focalkreisaxen eines Büschels von Kugeln, denen im Raume Σ_1 Rotationsflächen zweiter Ordnung mit parallelen Rotationsaxen entsprechen.

Strassburg i./E., 4. December 1894.

---

*) Diese Bemerkung ist Herrn Kilbinger a. a. O. entgangen.

Die quadratische Transformation der Thetafunctionen.

Von

A. Krazer in Strassburg i. E.

Der zweite Theil der Abhandlung: „Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen“ (Leipzig 1892, Teubner)*) beschäftigt sich mit dem Transformationsproblem der Thetafunctionen. Die dort im siebenten Abschnitte mitgetheilte Behandlung der nicht linearen Transformation ist nach verschiedenen Seiten hin weiterer Ausgestaltung fähig. Aus den von dem Verf. im Falle $p=1$ angestellten Untersuchungen: „Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen“ (Mathem. Annalen Bd. 43, pag. 413—504) erhellt nämlich zunächst, dass die Formel (A)**) durch eine allgemeinere ersetzt werden kann, welche an Stelle der n'^{ten} Potenz einer ursprünglichen Thetafunction ein Product von n' solchen Thetafunctionen mit beliebigen Charakteristiken und an Stelle der n^{ten} Potenzen von transformirten Thetafunctionen Producte von n transformirten Thetafunctionen enthält. Von der Mittheilung dieser allgemeineren Formel mag aber vorerst abgesehen werden; weitere Untersuchungen haben nämlich dem Verf. gezeigt, dass man das bisher zur Gewinnung der Formel für die nicht lineare Transformation eingeschlagene Verfahren durch ein anderes ersetzen kann, das aus verschiedenen Gründen, insbesondere aber wegen der einfacheren Form, in der dabei die als Constanten vorkommenden Theilwerthe von Thetafunctionen auftreten, vor jenem den Vorzug verdient. Es mag für den speciellen Fall der quadratischen Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen der Gedankengang in Kürze dargelegt werden, welcher den Verf. auf diese neue Methode hingewiesen hat.

Wenn man die zum Falle $p=2$ gehörige specielle lineare Transformation:

*) Im Nachstehenden wird diese Abhandlung kurz mit N. G. citirt.
**) N. G. pag. 128.

$$Q' = \left|\begin{array}{cc|cc} \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} \\ \hline \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma}{2} & \frac{\delta}{2} & \frac{\delta}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma}{2} & -\frac{\delta}{2} & \frac{\delta}{2} \end{array}\right|,$$

wobei die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch die Gleichung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 2$$

mit einander verknüpft sind, auf eine Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ anwendet, bei der:

$$a_{11} = a_{22} = a, \quad a_{12} = 0; \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = u$$

ist, die also, wenn man noch:

$$g_1 = g', \quad h_1 = h', \quad g_2 = g, \quad h_2 = h$$

setzt, in das Product $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(0)_a \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ zerfällt, so führt diese Transformation auf Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b$, bei denen:

$$b_{11} = b_{22} = b, \quad b_{12} = 0, \quad v_1 = v_2 = v$$

ist, wenn man:

$$b = \frac{\gamma\pi i + \delta a}{\alpha\pi i + \beta a}\pi i, \qquad v = \frac{u\pi i}{\alpha\pi i + \beta a}$$

setzt, die also Producte von zwei solchen zum Falle $p = 1$ gehörigen Thetafunctionen sind, wie sie bei der Transformation einer Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ mittelst der quadratischen Transformation:

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right|$$

auftreten. Man kann folglich jede quadratische Transformation einer Thetafunction einer Veränderlichen als eine lineare Transformation einer speciellen Thetafunction zweier Veränderlichen ansehen und in Folge dessen auch die Formel für die allgemeine zum Falle $p = 1$ gehörige quadratische Transformation Q aus der für die lineare Transformation aufgestellten Formel (L)*) ableiten; indem man darin $p = 2$,

*) N. G. pag. 118.

$r = s = 2$ setzt, an Stelle der sechzehn Zahlen $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$, $\delta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2$) die aus Q' zu entnehmenden speciellen Werthe einführt und die Argumente und Parameter der links stehenden Thetafunction in der oben angegebenen Weise specialisirt.

Setzt man aber weiter die lineare Transformation Q' in der Form:

$$Q' = \left|\begin{array}{cc|cc} \frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\beta}{2} \\ \hline \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right|$$

aus zwei einfacheren linearen Transformationen zusammen, so zeigt sich noch eine andere Methode für die Gewinnung der zur Transformation Q gehörigen Thetaformel, die darin besteht, dass man zunächst jede der beiden Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(0)_a$ und $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ für sich mittelst der linearen Transformation:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right|$$

transformirt und hierauf, nachdem man die beiden Gleichungen mit einander multiplicirt hat, die rechts auftretenden Thetaproducte mittelst einer Formel von der Art der Formel ($\overline{\Pi}$)*) in Producte von Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(v)_b$ überführt. Dieses Verfahren kann sofort auf den Fall, wo $p > 1$ ist, ausgedehnt werden.

Der in den letzten Zeilen skizzirte Weg wird in den ersten drei Artikeln zur Gewinnung der allgemeinen Formel (Q) für die quadratische Transformation der Thetafunctionen beliebig vieler Variablen eingeschlagen. Um sodann die Brauchbarkeit der so gewonnenen Formel darzuthun, wird dieselbe in Art. 4 für den speciellen Fall $p = 1$ aufgestellt, und werden aus ihr in den darauf folgenden Artikeln die Formeln für jene drei einfachsten quadratischen Trans-

*) N. G. pag. 31.

formationen abgeleitet, welche als Repräsentanten der nicht äquivalenten Classen quadratischer Transformationen zu dienen pflegen*).

Die Ausdehnung dieser Methoden auf Transformationen höheren Grades bleibt späteren Mittheilungen vorbehalten.

Ableitung der Formel für die allgemeinste quadratische Transformation der Thetafunctionen beliebig vieler Variablen.

1.

Gegeben sei die allgemeinste ganzzahlige quadratische, d. h. zur Zahl 2 gehörige Transformation:

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right|,$$

bei der die $4p^2$ ganzen Zahlen $\alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu}, \gamma_{\mu\nu}, \delta_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ den $p(2p-1)$ Relationen**):

$$(\mathrm{T}_1)\quad \begin{gathered} \sum_\varepsilon (\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \quad \sum_\varepsilon (\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p) \\ \sum_\varepsilon (\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} 2, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered}$$

oder den damit äquivalenten:

$$(\mathrm{T}_2)\quad \begin{gathered} \sum_\varepsilon (\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \quad \sum_\varepsilon (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p) \\ \sum_\varepsilon (\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} 2, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered}$$

genügen. Die hier vorliegende Aufgabe besteht darin, die zu dieser Transformation gehörige Thetaformel aufzustellen.

Durch die Charakteristik:

$$\mathfrak{Q} = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{2} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{2} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

*) Vergl. Königsberger, Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. (Leipzig 1868, Teubner) p. 59 u. f.

**) Im Nachstehenden ist allenthalben statt $\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}, \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}, \ldots$ zur Abkürzung nur $\sum\limits_\varepsilon, \sum\limits_\mu, \ldots$ gesetzt.

wird, wie aus den Relationen (T_1), (T_2) unmittelbar ersichtlich ist, eine lineare Transformation bestimmt; zu ihr gehört eine Thetaformel, welche aus der Formel (L)*) hervorgeht, wenn man darin $r = 2$ und $s = 1$ setzt.

Aendert man dann noch die Bezeichnung in einer für die jetzigen Zwecke passenden Weise ab, so kann man derselben die Gestalt:

$$(\mathfrak{L}) \qquad s\,\overline{\Delta}_{\tilde{\beta}}^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde{\beta}}\Delta_A}}\; e^{-\Phi} e^{\psi(g,h)} e^{\tilde{\varphi}\binom{0}{(\sigma)}}\, \tilde{G}\,[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\eta_\nu\eta'_\nu\pi i + \sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i + \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu - \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\sum\limits_{\nu}\hat{g}_\nu\eta'_\nu\pi i}\;\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{2} \\ \hat{h}+\eta' \end{bmatrix}(\!(2v)\!)_{2b}$$

geben. In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu \mathsf{A}'_{\mu\nu}u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu \mathsf{A}'_{\mu\nu}\mathsf{B}_{\mu\nu'}, \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $\mathsf{A}_{\mu\nu}$, $\mathsf{B}_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$\mathsf{A}_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad \mathsf{B}_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa},$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm \mathsf{A}_{11}\mathsf{A}_{22}\ldots\mathsf{A}_{pp}$ und mit $\mathsf{A}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\mathsf{A}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

---

*) N. G. pag. 118. Es muss zu dieser Formel berichtigend bemerkt werden, dass das auf der rechten Seite unter dem Wurzelzeichen stehende $+$, das verlangt, die Wurzel möge so ausgezogen werden, dass ihr reeller Theil positiv wird, fortzulassen ist. Das auf Seite 85 der N. G. stehende Product von p Wurzeln kann nämlich, wie ich nachträglich bemerkt habe, nicht zu einer einzigen Wurzel vereinigt werden, und es bleibt daher bezüglich des Vorzeichens der in der Transformationsformel auftretenden Wurzel die von Herrn Weber auf Seite 68 seiner Abhandlung: „Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ-Function" (Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 74, pag. 57) gemachte Bemerkung in Kraft. Da im Folgenden das Vorzeichen der Wurzel keine Rolle spielt, mag hier nicht näher darauf eingegangen werden.

$$\hat{g}_\nu = \frac{1}{2} \sum_\mu \alpha_{\nu\mu} \beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\hat{h}_\nu = \frac{1}{2} \sum_\mu \gamma_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{\Delta_A} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} \mathrm{A}'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g, h) = \frac{1}{2} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu} \gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu} \beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'}) \pi i$$

$$- \frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} (\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'}) \pi i,$$

$$\tilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma}) = -\frac{1}{2} \sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\tilde{\delta}_{\nu\varepsilon} \tilde{\beta}'_{\nu'\varepsilon}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \Big(\overset{0}{\sigma}_\nu + \frac{1}{2} \sum_\mu \alpha_{\nu\mu} \beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\overset{0}{\sigma}_{\nu'} + \frac{1}{2} \sum_{\mu'} \alpha_{\nu'\mu'} \beta_{\nu'\mu'}\Big) \pi i$$

$$- \frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} \Big(\overset{0}{\sigma}_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'} \beta_{\nu\mu'}\Big) \pi i,$$

$$G[\overset{0}{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{\Delta}_{\tilde{\beta}}-1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu} \tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \varrho_\mu \varrho_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \left(\overset{0}{\sigma}_\nu + \frac{1}{2} \sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon} \beta_{\nu\varepsilon}\right) \varrho_\mu \pi i},$$

wobei $\Delta_{\tilde{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde{\beta}_{11} \tilde{\beta}_{22} \ldots \tilde{\beta}_{pp}$ und $\tilde{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\overset{0}{\sigma}_1, \ldots, \overset{0}{\sigma}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungsystems:

$$(\tilde{\mathrm{E}}) \quad \begin{cases} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu} \tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \bar{\varrho}^{(i)}_\mu \bar{\varrho}^{(i)}_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \left(\sigma_\nu + \frac{1}{2} \sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon} \beta_{\nu\varepsilon}\right) \bar{\varrho}^{(i)}_\mu \pi i} = 1, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

zu verstehen ist, bei dem mit $\bar{\varrho}^{(i)}_1, \ldots, \bar{\varrho}^{(i)}_p$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\tilde{\mathrm{C}}) \quad \sum_{\mu'} \sum_\nu \tilde{\alpha}_{\nu 1} \tilde{\beta}'_{\nu\mu'} \varrho_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\tilde{\beta}}}, \ldots, \sum_{\mu'} \sum_\nu \tilde{\alpha}_{\nu p} \tilde{\beta}'_{\nu\mu'} \bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\Delta_{\tilde{\beta}}},$$

mit m also deren Anzahl bezeichnet ist; es ist weiter bezüglich der Bedeutung des unter der Wurzel vorkommenden Buchstabens ϱ und der Buchstaben $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ das Folgende zu bemerken:

Fall I. Sind in der vorgelegten Transformation die Zahlen β sämmtlich der Null gleich, so ist $\varrho = 0$ und

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{\beta}_{\mu\nu} = -\alpha_{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\ldots,p\\ \nu = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

zu setzen.

Fall II. Sind in der vorgelegten Transformation die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt ihre Determinante

$$\Delta_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{pp}$$

einen von Null verschiedenen Werth, so ist $\varrho = p$ und

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\ldots,p\\ \nu = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

zu setzen.

Fall III. Sind in der vorgelegten Transformation die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1}\beta_{m_2 n_2}\ldots\beta_{m_q n_q}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q + 1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden, so ist $\varrho = q$ und

$$\tilde{\alpha}_{\mu\varepsilon} = \alpha_{\mu\varepsilon}, \quad \tilde{\beta}_{\mu\varepsilon} = \beta_{\mu\varepsilon}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\varepsilon} = \gamma_{\mu\varepsilon}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\varepsilon} = \delta_{\mu\varepsilon}, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\ldots,p\\ \varepsilon = m_1,\ldots,m_q\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\alpha}_{\mu\eta} = \beta_{\mu\eta}, \quad \tilde{\beta}_{\mu\eta} = -\alpha_{\mu\eta}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\eta} = \delta_{\mu\eta}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\eta} = -\gamma_{\mu\eta}, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\ldots,p\\ \eta = m_{q+1},\ldots,m_p\end{pmatrix}$$

zu setzen*); es bezeichnet endlich s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\eta) \qquad \eta_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 2), \ldots, \eta_p \equiv 0 \ (\text{mod. } 2).$$

Setzt man in der Formel ($\mathfrak{L}$) $u_1 = \cdots = u_p = 0$ und ersetzt für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ g_μ durch g'_μ, h_μ durch h'_μ, indem man zugleich die dadurch aus $\hat{g}_\nu$, $\hat{h}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ hervorgehenden Ausdrücke mit $\hat{g}_\nu'$, $\hat{h}_\nu'$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ bezeichnet, so erhält man, wenn man noch auf der rechten Seite die Summationsbuchstaben mit $\bar{\varkappa}_\nu$, $\bar{\lambda}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ bezeichnet, und unter $\bar{\eta}_\nu$, $\bar{\eta}_\nu'$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ Ausdrücke versteht, die aus ihnen ebenso zusammengesetzt sind, wie die η, η' aus den $\varkappa$, λ die Formel:

---

*) Die auf Seite 120 der N. G. an entsprechender Stelle gemachten Angaben, bei denen mit Rücksicht auf den Gang der dortigen Untersuchung der hier vorliegende dritte Fall als Fall IV und der in ihm enthaltene den Werthen

$$m_1 = n_1 = 1, \ldots, m_q = n_q = q$$

entsprechende specielle Fall als Fall III bezeichnet ist, sind unrichtig und entsprechend den hier gemachten zu berichtigen.

$$(\mathfrak{L}_0) \qquad s\,\overline{\Delta}_{\tilde{\beta}}^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_a = \sqrt{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde{\beta}}\Delta_A}}\; e^{\psi(g',h')}\, e^{\tilde{\varphi}\left(\overset{0}{\sigma}\right)}\, \tilde{G}\left[\overset{0}{\sigma}\right]$$

$$\times \sum_{\substack{\bar{\varkappa}_1,\dots,\bar{\varkappa}_p \\ \bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\bar{\eta}_\nu\bar{\eta}_\nu'\pi i + \sum\limits_{\mu}\bar{\varkappa}_\mu\bar{\lambda}_\mu\pi i + \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}\left(\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\bar{\eta}_\nu' - \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\bar{\eta}_\nu\right)\pi i}$$

$$\times e^{-\sum\limits_{\nu}\hat{g}_\nu'\bar{\eta}_\nu'\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}' + \overset{0}{\sigma} + \bar{\eta}}{2} \\ \hat{h}' + \bar{\eta}' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_{2b}.$$

Durch Multiplication der beiden Formeln ($\mathfrak{L}$) und ($\mathfrak{L}_0$) erhält man endlich die für das folgende als Ausgangspunkt dienende Formel:

$$(\mathrm{I}) \qquad s^2\,\overline{\Delta}_{\tilde{\beta}}^{2p-2}\,\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_a\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$$

$$= \frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde{\beta}}\Delta_A}\, e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)+\psi(g',h')}\, e^{2\tilde{\varphi}\left(\overset{0}{\sigma}\right)}\, \tilde{G}^2\left[\overset{0}{\sigma}\right]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\dots,\lambda_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\eta_\nu\eta_\nu'\pi i + \sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i + \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}\left(\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta_\nu' - \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu\right)\pi i + \sum\limits_{\nu}\hat{g}_\nu\eta_\nu'\pi i}$$

$$\times \sum_{\substack{\bar{\varkappa}_1,\dots,\bar{\varkappa}_p \\ \bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\bar{\eta}_\nu\bar{\eta}_\nu'\pi i + \sum\limits_{\mu}\bar{\varkappa}_\mu\bar{\lambda}_\mu\pi i + \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}\left(\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\bar{\eta}_\nu' - \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\bar{\eta}_\nu\right)\pi i + \sum\limits_{\nu}\hat{g}_\nu'\bar{\eta}_\nu'\pi i}$$

$$\times\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}' + \overset{0}{\sigma} + \bar{\eta}}{2} \\ \hat{h}' + \bar{\eta}' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_{2b}\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta}{2} \\ \hat{h} + \eta' \end{bmatrix}(\!(2v)\!)_{2b}.$$

2.

Setzt man in der Formel ($\overline{\Pi}$)*) $n = 2$ und gleichzeitig für $\mu = 1, 2, \dots, p$ $g_\mu = h_\mu = \varkappa_\mu = 0$, so erhält man daraus bei passender Wahl der Bezeichnung die Formel:

$$2^p\,\vartheta(\!(v^{(1)} - v^{(2)})\!)_{2b}\,\vartheta(\!(v^{(1)} + v^{(2)})\!)_{2b} = \sum_{\tau_1,\dots,\tau_p}^{0,1}\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\tau}{2} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_b\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\tau}{2} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_b$$

und aus ihr weiter, indem man

*) N. G. pag. 31.

$$\text{das System } (v^{(1)}) \text{ in das System } \left(v^{(1)} + \left|\frac{\mathfrak{g}+\mathfrak{g}'}{\mathfrak{h}+\mathfrak{h}'}{2}\right|\right) \text{*)}$$

und gleichzeitig

$$\text{das System } (v^{(2)}) \text{ in das System } \left(v^{(2)} + \left|\frac{\mathfrak{g}-\mathfrak{g}'}{\mathfrak{h}-\mathfrak{h}'}{2}\right|\right),$$

wobei die $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ beliebige Constanten bezeichnen, übergehen lässt, hierauf die bekannte Hülfsformel (A)**) anwendet und sodann die den beiden Seiten der Gleichung gemeinsamen Exponentialfactoren durch Division entfernt, die allgemeinere:

$$(\mathfrak{P}) \qquad 2^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\mathfrak{g}'\\ \mathfrak{h}'\end{bmatrix}(\!(v^{(1)}-v^{(2)})\!)_{2b}\,\vartheta\begin{bmatrix}\mathfrak{g}\\ \mathfrak{h}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)}+v^{(2)})\!)_{2b}$$
$$=\sum_{\tau_1,\dots,\tau_p}^{0,1} e^{-2\sum\limits_\nu \mathfrak{g}_\nu \tau_\nu \pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\mathfrak{g}+\mathfrak{g}'\\ \dfrac{\mathfrak{h}+\mathfrak{h}'+\tau}{2}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_b\,\vartheta\begin{bmatrix}\mathfrak{g}-\mathfrak{g}'\\ \dfrac{\mathfrak{h}-\mathfrak{h}'+\tau}{2}\end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_b.$$

Setzt man in der Formel ($\mathfrak{P}$) mit Rücksicht auf die am Ende des vorhergehenden Artikels gewonnene Formel (I) für $\nu = 1, 2, \dots, p$:

$$v_\nu^{(1)} = v_\nu^{(2)} = v_\nu,$$
$$\mathfrak{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\big(\hat{g}_\nu + \overset{0}{\sigma}_\nu + \eta_\nu\big), \qquad \mathfrak{h}_\nu = \hat{h}_\nu + \eta'_\nu,$$
$$\mathfrak{g}'_\nu = \tfrac{1}{2}\big(\hat{g}'_\nu + \overset{0}{\sigma}_\nu + \bar{\eta}_\nu\big), \qquad \mathfrak{h}'_\nu = \hat{h}'_\nu + \bar{\eta}'_\nu,$$

so geht das auf ihrer linken Seite stehende Thetaproduct in das auf der rechten Seite der Formel (I) im allgemeinen Gliede vorkommende über, und man erhält so für dieses die Gleichung:

$$(\text{II}) \qquad 2^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}'+\overset{0}{\sigma}+\bar{\eta}}{2}\\ \hat{h}'+\bar{\eta}'\end{bmatrix}(\!(0)\!)_{2b}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{2}\\ \hat{h}+\eta'\end{bmatrix}(\!(2v)\!)_{2b}$$
$$=\sum_{\tau_1,\dots,\tau_p}^{0,1} e^{-\sum\limits_\nu(\hat{g}_\nu+\overset{0}{\sigma}_\nu+\eta_\nu)\tau_\nu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\hat{g}'+2\overset{0}{\sigma}+\eta+\bar{\eta}}{2}\\ \dfrac{\hat{h}+\hat{h}'+\eta'+\bar{\eta}'+\tau}{2}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$
$$\times\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}-\hat{g}'+\eta-\bar{\eta}}{2}\\ \dfrac{\hat{h}-\hat{h}'+\eta'-\bar{\eta}'+\tau}{2}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b.$$

*) Zu der hier angewandten Symbolik vergl. N. G. pag. 6.
**) N. G. pag. 7.

3.

Ersetzt man nun, nachdem man vorher noch linke und rechte Seite der Gleichung (I) mit 2^p multiplicirt hat, das 2^p-fache des dort auf der rechten Seite im allgemeinen Gliede der Summe vorkommenden Thetaproductes durch den in der Gleichung (II) dafür erhaltenen Ausdruck, führt hierauf für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ an Stelle der Summationsbuchstaben $\varkappa_\mu$, λ_μ neue $\hat{\varkappa}_\mu$, $\hat{\lambda}_\mu$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\varkappa_\mu = \hat{\varkappa}_\mu - \bar{\varkappa}_\mu, \qquad \lambda_\mu = \hat{\lambda}_\mu - \bar{\lambda}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

ein, wobei man jene Ausdrücke, die sich aus den $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$ ebenso zusammensetzen wie die η, η' aus den $\varkappa$, λ, mit $\hat{\eta}$, $\hat{\eta}'$ bezeichnen wird, und beachtet, dass das allgemeine Glied der Summe nach den $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$ sich nicht ändert, wenn man diese Grössen durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul 2 ersetzt, dass also die Summation nach den $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$ so ausgeführt werden kann, dass jede dieser Grössen unabhängig von den anderen die Werthe 0, 1 annimmt, so erhält man, wenn man noch in den Exponentialgrössen die zusammengehörigen Glieder vereinigt, bei den Thetafunctionen die Charakteristiken auf Grund der bekannten Hülfsformel (B)*) ändert und die Summationen in passender Weise anordnet, die vorläufige Formel:

$$\text{(III)} \qquad 2^p\, s^2\, \Delta_{\tilde{\beta}}^{2p-2}\, \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_a\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$$

$$= \frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde{\beta}}\,\Delta_A}\, e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)+\psi(g',h')}\, e^{2\tilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma})}\, \tilde{G}^2[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\tau_1,\ldots,\tau_p}^{0,1} \sum_{\substack{\hat{\varkappa}_1,\ldots,\hat{\varkappa}_p \\ \hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_\nu \hat{\eta}_\nu \hat{\eta}'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \hat{\varkappa}_\mu \hat{\lambda}_\mu \pi i + \frac{1}{2}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\hat{\eta}'_\nu - \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\hat{\eta}_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\sum\limits_\nu g_\nu \hat{\eta}'_\nu \pi i + \sum\limits_\nu (\hat{g}_\nu + \overset{0}{\sigma}_\nu + \hat{\eta}_\nu)\tau_\nu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \hat{g}' + \hat{\eta}}{2} \\[2ex] \dfrac{\hat{h} + \hat{h}' + \tau + \hat{\eta}'}{2} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} - \hat{g}' + \hat{\eta}}{2} \\[2ex] \dfrac{\hat{h} - \hat{h}' + \tau + \hat{\eta}'}{2} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

$$\times \sum_{\substack{\bar{\varkappa}_1,\ldots,\bar{\varkappa}_p \\ \bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_p}}^{0,1} e^{-\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu(\bar{\eta}'_\nu - \tau_\nu)\pi i}\,.$$

*) N. G. pag. 7.

Die in der letzten Zeile stehende Summe nimmt, wenn man darin die Grössen $\bar{\eta}_\nu, \bar{\eta}_\nu'$ durch ihre Ausdrücke in den $\bar{\varkappa}$, $\bar{\lambda}$ ersetzt und die nach dem Modul 2 bestehenden Congruenzen:

$$\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \alpha_{\nu\mu} \gamma_{\nu\mu'} \bar{\varkappa}_\mu \bar{\varkappa}_{\mu'} \equiv \sum_\mu \sum_\nu \alpha_{\nu\mu} \gamma_{\nu\mu} \bar{\varkappa}_\mu,$$

$$\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu'} \bar{\lambda}_\mu \bar{\lambda}_{\mu'} \equiv - \sum_\mu \sum_\nu \beta_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu} \bar{\lambda}_\mu,$$

$$\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu'} \bar{\varkappa}_\mu \bar{\lambda}_{\mu'} + \beta_{\nu\mu} \gamma_{\nu\mu'} \bar{\lambda}_\mu \bar{\varkappa}_{\mu'}) \equiv 0,$$

berücksichtigt, die Form:

$$\sum_{\substack{\bar{\varkappa}_1, \cdots, \bar{\varkappa}_p \\ \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_p}}^{0,1} e^{\sum\limits_\mu \left[\sum\limits_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu} + \alpha_{\nu\mu}\tau_\nu)\bar{\varkappa}_\mu - \sum\limits_\nu (\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \beta_{\nu\mu}\tau_\nu)\bar{\lambda}_\mu\right]\pi i}$$

an, aus der man erkennt, dass sie nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth 2^{2p} besitzt, wenn die Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_p$ den $2p$ Congruenzen:

$$(\tau) \qquad \begin{aligned} &\sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu} + \alpha_{\nu\mu}\tau_\nu) \equiv 0 \text{ (mod. 2)}, \\ &\sum_\nu (\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \beta_{\nu\mu}\tau_\nu) \equiv 0 \text{ (mod. 2)}, \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p)$$

genügen. In der Formel (III) fallen daher bei der Ausführung der Summation nach den τ alle jene Glieder weg, für welche das an Stelle von $\tau_1, \ldots, \tau_p$ tretende System von p Zahlen nicht eine Lösung der Congruenzen (τ) ist, und man kann in Folge dessen die Summation nach den τ auch in der Weise ausführen, dass man an Stelle des Systems der p Grössen $\tau_1, \ldots, \tau_p$ von vorneherein nur die Normallösungen des Congruenzensystems (τ) treten lässt; deren Anzahl sei in der Folge mit s' bezeichnet.

Ist aber $\tau_1', \ldots, \tau_p'$ eine erste, $\tau_1'', \ldots, \tau_p''$ eine zweite dieser Lösungen, so folgt aus den Congruenzen (τ) sofort:

$$\begin{aligned} &\sum_\nu \alpha_{\nu\mu}(\tau_\nu'' - \tau_\nu') \equiv 0 \text{ (mod. 2)}, \\ &\sum_\nu \beta_{\nu\mu}(\tau_\nu'' - \tau_\nu') \equiv 0 \text{ (mod. 2)}, \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

und weiter, indem man:

$$\begin{aligned} &\sum_\nu \alpha_{\nu\mu}(\tau_\nu'' - \tau_\nu') = 2\lambda_\mu, \\ &\sum_\nu \beta_{\nu\mu}(\tau_\nu'' - \tau_\nu') = 2\varkappa_\mu, \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

setzt, durch Auflösung mittelst der Relationen (T_2):

$$\begin{aligned} \tau_\nu'' - \tau_\nu' &= \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \\ 0 &= \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu); \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

es lässt sich also mit Hülfe einer beliebigen Lösung $\tau_1', \ldots, \tau_p'$ des Congruenzensystems (τ) jede andere in der Form:

$$\tau_\nu'' = \tau_\nu' + \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

darstellen, wobei die $\varkappa$, λ ganze Zahlen bezeichnen, welche den p Bedingungen:

$$\sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen. Nun erhält aber bei der Formel (III) das allgemeine Glied der auf die τ bezüglichen Summe den nämlichen Werth, gleichgültig, ob man an Stelle von $\tau_1, \ldots, \tau_p$ die Zahlen $\tau_1', \ldots, \tau_p'$ oder Zahlen

$$\tau_1'' = \tau_1' + \sum_\mu(-\gamma_{1\mu}\varkappa_\mu + \delta_{1\mu}\lambda_\mu), \ldots, \tau_p'' = \tau_p' + \sum_\mu(-\gamma_{p\mu}\varkappa_\mu + \delta_{p\mu}\lambda_\mu),$$

bei denen die $\varkappa$, λ irgend welche den soeben angeschriebenen p Bedingungen genügende ganze Zahlen sind, treten lässt — man kann nämlich den zweiten, durch Einführung der τ'' entstehenden Ausdruck in den ersten, durch Einführung der τ' entstandenen überleiten, indem man für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ die Summationsbuchstaben $\hat{\varkappa}_\mu$, $\hat{\lambda}_\mu$ durch $\hat{\varkappa}_\mu - \varkappa_\mu$, $\hat{\lambda}_\mu - \lambda_\mu$ ersetzt — und es ist daher diese Summe selbst das s'-fache eines beliebigen ihrer Summanden. Die Formel (III) bleibt in Folge dessen richtig, wenn man auf ihrer rechten Seite das auf die τ bezügliche Summenzeichen unterdrückt, in dem dahinter stehenden allgemeinen Gliede dieser Summe an Stelle von $\tau_1, \ldots, \tau_p$ eine beliebige Lösung $\overset{0}{\tau}_1, \ldots, \overset{0}{\tau}_p$ des Congruenzensystems (τ) treten lässt und endlich der rechten Seite den Factor s' hinzufügt. Ersetzt man dann noch die in der letzten Zeile stehende Summe durch ihren Werth 2^{2p} und dividirt linke und rechte Seite der entstandenen Gleichung durch $2^{2p}s'$, so erhält man die Formel:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{s^2}{2^p s'}\Delta_{\tilde{\beta}}^{2p-2}\,\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_a\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$$

$$= \frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde{\beta}}\Delta_A}\,e^{-\Phi}\,e^{\psi(g,h)+\psi(g',h')}\,e^{2\tilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma})}\,\tilde{G}^2[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\hat{\varkappa}_1, \ldots, \hat{\varkappa}_p \\ \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_\nu \hat{\eta}_\nu \hat{\eta}_\nu' \pi i + \sum\limits_\mu \hat{\varkappa}_\mu \hat{\lambda}_\mu \pi i + \frac{1}{2}\sum\limits_\nu\sum\limits_\mu(\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\hat{\eta}_\nu' - \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\hat{\eta}_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \hat{\eta}_\nu' \pi i - \sum\limits_\nu(\hat{g}_\nu + \overset{0}{\sigma}_\nu + \hat{\eta}_\nu)\overset{0}{\tau}_\nu \pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \hat{g}' + \hat{\eta}}{2} \\[2ex] \dfrac{\hat{h} + \hat{h}' + \overset{0}{\tau} + \hat{\eta}'}{2} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} - \hat{g}' + \hat{\eta}}{2} \\[2ex] \dfrac{\hat{h} - \hat{h}' + \overset{0}{\tau} + \hat{\eta}'}{2} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b.$$

Die Anzahl s' der Normallösungen des Congruenzensystems (τ) hängt, wie jetzt gezeigt werden soll, in einfacher Weise mit der Anzahl s der Normallösungen des in Art. 1 angeschriebenen Congruenzensystems (η) zusammen. Da nämlich der Ausdruck:

$$\frac{1}{2^{2p}} \sum_{\substack{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\dots,\lambda_p}}^{0,1} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\left[(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu}+\alpha_{\nu\mu}\tau_\nu)\varkappa_\mu-(\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}+\beta_{\nu\mu}\tau_\nu)\lambda_\mu\right]\pi i}$$

dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth 1 besitzt, wenn die Zahlen $\tau_1, \dots, \tau_p$ den Congruenzen (τ) genügen, so wird die Anzahl s' durch die Summe:

$$\begin{aligned}
s' &= \sum_{\tau_1,\dots,\tau_p}^{0,1} \frac{1}{2^{2p}} \sum_{\substack{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\dots,\lambda_p}}^{0,1} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\left[(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu}+\alpha_{\nu\mu}\tau_\nu)\varkappa_\mu-(\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}+\beta_{\nu\mu}\tau_\nu)\lambda_\mu\right]\pi i} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{\substack{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\dots,\lambda_p}}^{0,1} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu-\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\lambda_\mu)\pi i} \\
&\quad \times \left(\sum_{\tau_1,\dots,\tau_p}^{0,1} e^{\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu-\beta_{\nu\mu}\lambda_\mu)\tau_\nu\pi i}\right)
\end{aligned}$$

geliefert. Nun besitzt aber die letzte in Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth 2^p, wenn bei der Ausführung der Summation nach den $\varkappa$, λ an Stelle des Systems dieser $2p$ Grössen eine der Normallösungen des Congruenzensystems (η) tritt, und da weiter für jede solche auf Grund der nach dem Modul 2 geltenden Congruenz:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu}\sum_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu-\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\lambda_\mu) \\
\equiv &\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}(\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu-\beta_{\nu\mu}\lambda_\mu)(-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu+\delta_{\nu\mu}\lambda_\mu) \equiv 0
\end{aligned}$$

die vor der genannten, in Klammern eingeschlossenen Summe stehende Exponentialgrösse den Werth 1 hat, so erhält man zur Bestimmung von s' die Gleichung:

$$s' = \frac{1}{2^{2p}} \cdot s \cdot 2^p = \frac{s}{2^p}.$$

Führt man diesen Werth an Stelle von s' in die Formel (IV) ein und ersetzt auf ihrer rechten Seite noch $\hat{\varkappa}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\eta}'$ einfacher durch $\varkappa$, λ, η, η', so erhält man *die der allgemeinen quadratischen Trans-*

formation Q entsprechende Thetaformel in der folgenden endgültigen Gestalt:

$$\text{(Q)}\qquad s\,\Delta_{\tilde\beta}^{2p-2}\,\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(0)\!)_a\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$$

$$=\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde\beta}\Delta_{A}}\,e^{-\Phi}\,e^{\psi(g,h)+\psi(g',h')}\,e^{2\tilde\varphi(\overset{0}{\sigma})}\,\tilde G^2[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times\sum_{\substack{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\dots,\lambda_p}}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\eta_\nu\eta'_\nu\pi i+\sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i+\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu-\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu)\pi i-\sum\limits_{\nu}\hat g_\nu\eta'_\nu\pi i}$$

$$\times e^{-\sum\limits_{\nu}(\hat g_\nu+\overset{0}{\sigma}_\nu+\eta_\nu)\overset{0}{\tau}_\nu\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat g+\hat g'+\eta}{2}\\[2ex] \dfrac{\hat h+\hat h'+\overset{0}{\tau}+\eta'}{2}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat g-\hat g'+\eta}{2}\\[2ex] \dfrac{\hat h-\hat h'+\overset{0}{\tau}+\eta'}{2}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b.$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu=\frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu}\mathsf{A}'_{\mu\nu}u_\mu,\qquad b_{\nu\nu'}=\frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu}\mathsf{A}'_{\mu\nu}\mathsf{B}_{\mu\nu'},\qquad(\nu,\nu'=1,2,\dots,p)$$

wenn man mit $\mathsf{A}_{\mu\nu}$, $\mathsf{B}_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$\mathsf{A}_{\mu\nu}=\alpha_{\nu\mu}\pi i+\sum_{\varkappa}\beta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa},\qquad \mathsf{B}_{\mu\nu}=\gamma_{\nu\mu}\pi i+\sum_{\varkappa}\delta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa},\qquad(\mu,\nu=1,2,\dots,p)$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma\pm\mathsf{A}_{11}\mathsf{A}_{22}\dots\mathsf{A}_{pp}$ und mit $\mathsf{A}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\mathsf{A}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es bezeichnen ferner

$$g_\mu,\ h_\mu,\ g'_\mu,\ h'_\mu\qquad\qquad(\mu=1,2,\dots,p)$$

beliebige reelle Constanten, aus denen sich die Grössen

$$\hat g_\nu,\ \hat h_\nu,\ \hat g'_\nu,\ \hat h'_\nu\qquad\qquad(\nu=1,2,\dots,p)$$

und $\psi(g,h)$, $\psi(g',h')$ gemäss den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\hat g_\nu&=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}+\sum_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}g_\mu-\beta_{\nu\mu}h_\mu),\\
\hat h_\nu&=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}+\sum_{\mu}(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu+\delta_{\nu\mu}h_\mu),\\
\hat g'_\nu&=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}+\sum_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}g'_\mu-\beta_{\nu\mu}h'_\mu),\\
\hat h'_\nu&=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}+\sum_{\mu}(-\gamma_{\nu\mu}g'_\mu+\delta_{\nu\mu}h'_\mu),
\end{aligned}\qquad(\nu=1,2,\dots,p)$$

$$\begin{aligned}
\psi(g,h)&=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\sum_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'}-2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'}+\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'}-\beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i,\\
\psi(g',h')&=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\sum_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g'_\mu g'_{\mu'}-2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g'_\mu h'_{\mu'}+\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h'_\mu h'_{\mu'})\pi i\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g'_{\mu'}-\beta_{\nu\mu'}h'_{\mu'})\pi i,
\end{aligned}$$

zusammensetzen. Bezüglich der Bedeutung der Grössen Φ, η, η', s, ϱ, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$, σ, $\tilde{\varphi}[\overset{0}{\sigma}]$, $\tilde{G}[\overset{0}{\sigma}]$ mag der Kürze halber auf das in Art. 1 Gesagte verwiesen werden, während $\overset{0}{\tau}_1, \ldots, \overset{0}{\tau}_p$ eine beliebige Lösung des Congruenzensystems:

$$(\tau) \qquad \begin{aligned} &\sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu} + \alpha_{\nu\mu}\tau_\nu) \equiv 0 \text{ (mod. 2)},\\ &\sum_\nu (\beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \beta_{\nu\mu}\tau_\nu) \equiv 0 \text{ (mod. 2)} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnet.

Aufstellung der Formel für die allgemeinste quadratische Transformation der Thetafunctionen einer Variable.

4.

Im speciellen Falle $p = 1$ geht die im letzten Artikel gewonnene Formel (Q) in die der allgemeinen zum Falle $p = 1$ gehörigen quadratischen Transformation:

$$Q_1 = \left| \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array} \right| \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 2)$$

entsprechende Thetaformel über, und man erhält so diese, wenn man dann noch s durch seinen Werth*):

$$s = 2t_{\alpha\beta},$$

wobei $t_{\alpha\beta}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α und β bezeichnet, ersetzt, in der Gestalt:

$$(\mathrm{Q}_1) \qquad 2t_{\alpha\beta}\, \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(0)_a\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$$

$$= \frac{-\pi i^{\varrho'}}{\tilde{\beta} A}\, e^{-\frac{\beta u^2}{A}}\, e^{\psi(g,h)+\psi(g',h')}\, e^{2\tilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma})}\, \tilde{G}^2[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1} e^{-\frac{1}{2}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i + \frac{1}{2}(\alpha\beta\eta' - \gamma\delta\eta)\pi i - \hat{g}\eta'\pi i}$$

$$\times e^{-(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)\overset{0}{\tau}\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \hat{g}' + \eta}{2} \\[2ex] \dfrac{\hat{h} + \hat{h}' + \overset{0}{\tau} + \eta'}{2} \end{bmatrix}(v)_b\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} - \hat{g}' + \eta}{2} \\[2ex] \dfrac{\hat{h} - \hat{h}' + \overset{0}{\tau} + \eta'}{2} \end{bmatrix}(v)_b.$$

*) Vergl. die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Zweite Abhandlung. (Mathem. Annalen, Bd. 43, pag. 477.)

In dieser Formel ist zunächst:

$$\mathsf{A} = \alpha\pi i + \beta a, \qquad \mathsf{B} = \gamma\pi i + \delta a,$$
$$v = \frac{\pi i}{\mathsf{A}} u, \qquad b = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}} \pi i,$$
$$\eta = \alpha\varkappa - \beta\lambda, \qquad \eta' = -\gamma\varkappa + \delta\lambda,$$

es bezeichnen ferner g, h, g', h' beliebige reelle Constanten, aus denen sich die Grössen $\hat{g}, \hat{h}, \hat{g}', \hat{h}'$, $\psi(g, h)$, $\psi(g', h')$ gemäss den Gleichungen:

$$\hat{g} = \frac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h, \qquad \hat{h} = \frac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$
$$\hat{g}' = \frac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g' - \beta h', \qquad \hat{h}' = \frac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$

$$\psi(g, h) = \frac{1}{2}(\alpha\gamma g^2 - 2\beta\gamma g h + \beta\delta h^2 - \alpha\gamma\delta g + \beta\gamma\delta h)\pi i,$$
$$\psi(g', h') = \frac{1}{2}(\alpha\gamma g'^2 - 2\beta\gamma g' h' + \beta\delta h'^2 - \alpha\gamma\delta g' + \beta\gamma\delta h')\pi i,$$

zusammensetzen; es ist weiter:

$$\tilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma}) = -\frac{\delta}{2\tilde{\beta}}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2 \pi i - \frac{1}{2}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\pi i,$$

$$\tilde{G}[\overset{0}{\sigma}] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\tilde{\beta}-1} e^{-\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\tilde{\beta}}(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta)\varrho\pi i},$$

wobei*):

$$\overset{0}{\sigma} = -\frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta} - 1)}{2}\alpha'\beta'$$

ist, wenn man mit $t_{\alpha\beta}$, wie oben, den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α und β bezeichnet und $\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha'$, $\beta = t_{\alpha\beta}\beta'$ setzt; es ist ferner bezüglich der Bedeutung des Buchstabens ϱ' und der Buchstaben $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ zu bemerken:

1) Ist $\beta \gtrless 0$, so ist $\varrho' = 0$, $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$ zu setzen,

2) Ist $\beta = 0$, so ist $\varrho' = 1$, $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{\beta} = -\alpha$ zu setzen;

es bezeichnet endlich $\overset{0}{\tau}$ eine beliebige Lösung der beiden Congruenzen:

$$(\tau) \qquad \begin{aligned} \alpha(\gamma + \tau) &\equiv 0 \pmod{2}, \\ \beta(\delta + \tau) &\equiv 0 \pmod{2}; \end{aligned}$$

man sieht leicht, dass der Werth:

$$\overset{0}{\tau} = 2 - t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta},$$

---

*) a. a. O. pag. 466.

wobei wie vorher $t_{\alpha\beta}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α und β, und entsprechend $t_{\gamma\delta}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen γ und δ bezeichnet, stets den beiden aufgestellten Congruenzen genügt, und es soll daher unter $\overset{0}{\tau}$ diese Zahl verstanden werden.

Beispiele.

5.

Setzt man in der Formel (Q_1):

$$\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1,$$

so erhält man daraus die der Landen'schen Transformation:

$$Q_1' = \left|\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right|$$

entsprechende Formel in der allgemeinen Gestalt:

$$(Q_1') \qquad 2\,\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(0)_a\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=1} e^{-2g\lambda\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g+g' \\ \dfrac{h+h'+\lambda}{2} \end{bmatrix}\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}}\,\vartheta\begin{bmatrix} g-g' \\ \dfrac{h-h'+\lambda}{2} \end{bmatrix}\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}}.$$

Aus dieser Formel gehen, wenn man an Stelle von g', h', g, h der Reihe nach die speciellen Werthe:

1. $g' = 0, \quad h' = 0, \quad g = 0, \quad h = 0;$
2. $g' = \frac{1}{2}, \quad h' = 0, \quad g = 0, \quad h = 0;$
3. $g' = 0, \quad h' = 0, \quad g = \frac{1}{2}, \quad h = 0;$
4. $g' = \frac{1}{2}, \quad h' = 0, \quad g = \frac{1}{2}, \quad h = 0;$
5. $g' = 0, \quad h' = \frac{1}{2}, \quad g = 0, \quad h = \frac{1}{2};$
6. $g' = 0, \quad h' = \frac{1}{2}, \quad g = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{2};$

einführt und gleichzeitig zur Vereinfachung für jedes auftretende Argument w und jeden auftretenden Parameter c:

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(w)_c = \vartheta_{00}(w)_c, \quad \vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(w)_c = \vartheta_{01}(w)_c,$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(w)_c = \vartheta_{10}(w)_c, \quad \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(w)_c = \vartheta_{11}(w)_c$$

setzt, die sechs speciellen Transformationsgleichungen*):

(1) $$2\vartheta_{00}(0)_a\vartheta_{00}(u)_a = \vartheta_{00}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}} + \vartheta_{01}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}},$$

(2) $$2\vartheta_{10}(0)_a\vartheta_{00}(u)_a = \vartheta_{10}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}} + \vartheta_{11}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}},$$

(3) $$2\vartheta_{00}(0)_a\vartheta_{10}(u)_a = \vartheta_{10}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}} - \vartheta_{11}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}},$$

(4) $$2\vartheta_{10}(0)_a\vartheta_{10}(u)_a = \vartheta_{00}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}} - \vartheta_{01}^2\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}},$$

(5) $$\vartheta_{01}(0)_a\vartheta_{01}(u)_a = \vartheta_{00}\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}} \vartheta_{01}\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}},$$

(6) $$\vartheta_{01}(0)_a\vartheta_{11}(u)_a = \vartheta_{10}\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}} \vartheta_{11}\left(\frac{u}{2}\right)_{\frac{a}{2}}.$$

6.

Setzt man in der Formel (Q_1):

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 2,$$

so erhält man daraus die der Gauss'schen Transformation:

$$Q_1'' = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right|$$

entsprechende Formel in der allgemeinen Gestalt:

(Q_1'') $$\vartheta\begin{bmatrix}g'\\h'\end{bmatrix}(0)_a\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(u)_a$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{g+g'+\varkappa}{2}\\h+h'\end{bmatrix}(u)_{2a}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{g-g'+\varkappa}{2}\\h-h'\end{bmatrix}(u)_{2a}.$$

*) Vergl. Weber, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen (Braunschweig 1891, Vieweg), pag. 79 u. f.

Aus dieser Formel gehen, wenn man an Stelle von g', h', g, h der Reihe nach die speciellen Werthe:

1. $g'=0,\quad h'=0,\quad g=0,\quad h=0;$
2. $g'=0,\quad h'=\frac{1}{2},\quad g=0,\quad h=0;$
3. $g'=0,\quad h'=0,\quad g=0,\quad h=\frac{1}{2};$
4. $g'=0,\quad h'=\frac{1}{2},\quad g=0,\quad h=\frac{1}{2};$
5. $g'=\frac{1}{2},\quad h'=0,\quad g=\frac{1}{2},\quad h=0;$
6. $g'=\frac{1}{2},\quad h'=0,\quad g=\frac{1}{2},\quad h=\frac{1}{2};$

einführt und wieder die im vorigen Artikel eingeführte Bezeichnungsweise bei den Thetafunctionen anwendet, die sechs speciellen Transformationsgleichungen*):

(1) $\vartheta_{00}(0)_a\vartheta_{00}(u)_a=\vartheta_{00}^2(u)_{2a}+\vartheta_{10}^2(u)_{2a},$

(2) $\vartheta_{01}(0)_a\vartheta_{00}(u)_a=\vartheta_{01}^2(u)_{2a}-\vartheta_{11}^2(u)_{2a},$

(3) $\vartheta_{00}(0)_a\vartheta_{01}(u)_a=\vartheta_{01}^2(u)_{2a}+\vartheta_{11}^2(u)_{2a},$

(4) $\vartheta_{01}(0)_a\vartheta_{01}(u)_a=\vartheta_{00}^2(u)_{2a}-\vartheta_{10}^2(u)_{2a},$

(5) $\vartheta_{10}(0)_a\vartheta_{10}(u)_a=2\vartheta_{00}(u)_{2a}\vartheta_{10}(u)_{2a},$

(6) $\vartheta_{10}(0)_a\vartheta_{11}(u)_a=2\vartheta_{01}(u)_{2a}\vartheta_{11}(u)_{2a}.$

7.

Setzt man in der Formel (Q_1):

$$\alpha=1,\quad \beta=0,\quad \gamma=1,\quad \delta=2,$$

so erhält man daraus die der Transformation:

$$Q_1'''=\left|\begin{array}{c|c}1&0\\\hline 1&2\end{array}\right|$$

entsprechende Formel in der allgemeinen Gestalt:

$$(Q_1''')\qquad \vartheta\begin{bmatrix}g'\\h'\end{bmatrix}(0)_a\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(u)_a=e^{\frac{1}{2}(g^2+g'^2)\pi i-g\pi i}$$

$$\times\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=1}e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2\pi i+g\varkappa\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{g+g'+\varkappa}{2}\\h+h'+\frac{1-g-g'-\varkappa}{2}\end{bmatrix}(u)_{2a+\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{g-g'+\varkappa}{2}\\h-h'+\frac{1-g+g'-\varkappa}{2}\end{bmatrix}(u)_{2a+\pi i}.$$

*) Vergl. Weber, a. a. O.

Aus dieser Formel gehen, wenn man an Stelle von g', h', g, h der Reihe nach die speciellen Werthe:

1. $g' = 0, \quad h' = 0, \quad g = 0, \quad h = 0;$
2. $g' = 0, \quad h' = \frac{1}{2}, \quad g = 0, \quad h = 0;$
3. $g' = 0, \quad h' = 0, \quad g = 0, \quad h = \frac{1}{2};$
4. $g' = 0, \quad h' = \frac{1}{2}, \quad g = 0, \quad h = \frac{1}{2};$
5. $g' = \frac{1}{2}, \quad h' = 0, \quad g = \frac{1}{2}, \quad h = 0;$
6. $g' = \frac{1}{2}, \quad h' = 0, \quad g = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{2};$

einführt und wieder die in Art. 5 eingeführte Bezeichnungsweise bei den Thetafunctionen anwendet, die sechs speciellen Transformationsgleichungen:

$$\vartheta_{00}(0)_a \vartheta_{00}(u)_a = \vartheta_{01}^2(u)_{2a+\pi i} - i\vartheta_{10}^2(u)_{2a+\pi i}, \tag{1}$$

$$\vartheta_{01}(0)_a \vartheta_{00}(u)_a = \vartheta_{00}^2(u)_{2a+\pi i} + i\vartheta_{11}^2(u)_{2a+\pi i}, \tag{2}$$

$$\vartheta_{00}(0)_a \vartheta_{01}(u)_a = \vartheta_{00}^2(u)_{2a+\pi i} - i\vartheta_{11}^2(u)_{2a+\pi i}, \tag{3}$$

$$\vartheta_{01}(0)_a \vartheta_{01}(u)_a = \vartheta_{01}^2(u)_{2a+\pi i} + i\vartheta_{10}^2(u)_{2a+\pi i}, \tag{4}$$

$$\vartheta_{10}(0)_a \vartheta_{10}(u)_a = 2e^{-\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_{10}(u)_{2a+\pi i}\vartheta_{01}(u)_{2a+\pi i}, \tag{5}$$

$$\vartheta_{10}(0)_a \vartheta_{11}(u)_a = 2e^{-\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_{00}(u)_{2a+\pi i}\vartheta_{11}(u)_{2a+\pi i}. \tag{6}$$

Strassburg i. E., im Juni 1894.

Arthur Cayley.

Von

M. Noether in Erlangen.

Vor etwa fünfzig Jahren entsprosste dem noch ganz jungen Stamme der algebraischen Geometrie ein neuer Wissenszweig: die Invariantentheorie; er entwickelte eine kräftige Krone, unter deren Schatten auch der Stamm vortrefflich gedieh. Meister von vier Nationen wetteiferten in der Pflege des Gebildes: Plücker und Hesse, Boole, Cayley, Sylvester und Salmon, Aronhold, Hermite und Brioschi, endlich auch Clebsch — um nur die bedeutendsten zu nennen. Aber während die deutschen Meister, wie auch der erstgenannte der englischen, längst geschieden sind, leuchtete das Fünfgestirn der Auswärtigen noch hell in unsere Jetztzeit hinein, bis nun auch einer seiner Sterne erloschen ist. Dem dahingegangenen Mitschöpfer und unermüdlichen Förderer zweier Wissenschaften, deren Anforderungen diese Annalen hauptsächlich ihr Entstehen verdanken und denen sie lange ihre besondere Pflege gewidmet haben, dem Mitarbeiter vom ersten Hefte an auch in ihren Blättern einen eingehenderen Nachruf zu widmen, ist eine ehrenvolle Pflicht, welcher die folgenden Zeilen entsprechen sollen*).

Arthur Cayley, als Sohn eines St. Petersburger Kaufmanns Henry Cayley, der einer ursprünglich Yorkshire'schen Familie entstammte, während eines kurzen Aufenthalts der Eltern in England

*) Ich beschränke mich des Raumes halber mehr auf die wissenschaftliche Würdigung, welche übrigens mit der von F. Brioschi „Notizie sulla vita e sulle opere di Arturo Cayley" (Rendic. d. R. Accad. d. Lincei, v. 3. März d. J.) sich nahe berührt. Für das Persönliche wurden einige von Mrs. Cayley mir freundlichst zur Verfügung gestellte Daten benutzt, ferner die lebhafte Schilderung von der Hand G. Salmon's (Zeitschrift „Nature", v. 20. Sept. 1883), und die auf die wissenschaftlichen Lebensumstände eingehende Darstellung von J. W. L. Glaisher („The Cambridge Review", v. 7. Febr. d. J.); eine Reihe weiterer Details enthält auch der warme Nachruf von E. V. [von der Hand eines langjährigen Freundes des Verstorbenen, des Canon Venables] in der Ztg. „The Guardian", v. 6. Febr. d. J. Vgl. ferner: Ch. Hermite in den C. R. v. 4. Febr. d. J.; Ch. A. Scott im Bullet. of the Amer. Soc., März d. J.

[Ausführliche biographische und wissenschaftliche Notizen über A. Cayley giebt A. R. Forsyth, der Herausgeber der weiteren Bände der Math. Papers, in dem eben erschienenen 8ten Bande (zuerst in den Proc. of the R. Soc., Bd. 58). (Zusatz bei der Revision, Aug. 1895.)]

den 16. August 1821 in Richmond (Surrey) geboren, verbrachte seine ersten acht Lebensjahre in Russland, lebte aber von 1829 an, nach dauernder Uebersiedlung der Familie, wieder auf englischem Boden, erst bei London, dann, nach dem 14ten Lebensjahre, in King's College in London. Schon 1838 trat er in das Trinity College der Universität Cambridge ein. Seine Fähigkeiten nicht bloss für das Mathematische, insbesondere seine energische Hingebung an jede ihn interessirende Materie, deren fast unmittelbares Erfassen und Durchdringen, haben sich früh und so glänzend entwickelt, dass er die nach englischen Begriffen höchsten Ehren eines „Senior Wrangler" — wie kurz vor ihm Ellis und Stokes, ein Jahr nachher Adams — und eines „First Smith's Prizeman" erreichte und im selben Jahre 1842 Fellow Tutor seines Collegs wurde. Schon 1841 begann die lange stetige Reihe seiner mathematischen Arbeiten, die auch durch grössere 1843—44 nach der Schweiz und Italien unternommene Reisen nicht unterbrochen wurde. Hier ist ihm der Sinn sowohl für die Natur als für die alte Kunst aufgegangen; jener hat ihn noch manchmal zu grösseren Fusswanderungen den Alpen zugeführt, dieser begleitete ihn noch bis zuletzt, wo er zeichnend und construirend sich seinen Erinnerungen hingab.

Seine math. Thätigkeit wird nicht einmal durch die Wahl eines neuen Berufes unterbrochen, dem sich Cayley zur grösseren Sicherung seiner Lebensstellung nun zuwendet: 1844—1849 arbeitet er bei einem berühmten Notar (conveyancer) London's, von da bis 1863 fungirt er selbständig als Barrister in Lincoln's Inn, mit Erfolg und den besten Aussichten in dieser Laufbahn. Im Gegentheil; es ist, als ob der Gegensatz zwischen beiden Thätigkeiten, der juristischen im Berufe und der mathematischen in den Mussestunden, der Gegensatz zwischen jener mehr formalen und dieser mehr abstracten Beschäftigung seine mathematischen Fähigkeiten und seine Arbeitsfreudigkeit auf's Höchste angeregt hätte. Aus der Zeit jenes Doppellebens stammen fast alle Arbeiten, welche die ersten vier Quartbände der Gesammtausgabe anfüllen; darunter gerade die, welche man als die bedeutendsten Leistungen seines Lebens auf dem formentheoretischen, grösstentheils auch auf dem geometrischen, Gebiete zu bezeichnen hat, ferner Forschungen über elliptische Functionen und eine ausgedehnte Reihe von Untersuchungen auf dem Gebiete der Dynamik, insbesondere der astronomischen. Ein für die Wissenschaft einflussreiches Ereigniss dieser Zeit ist weiter die enge Fühlung mit J. Sylvester, so innig, dass die beiden Forscher selbst nicht in der Lage waren, ihren Antheil an den einzelnen Entdeckungen, besonders in den Processen der Invariantentheorie, völlig klar zu legen; es führte auch zur gemeinsamen Gründung (1857) und Leitung des Quarterly Journal, an Stelle des Cambridge Math. Journ. (von 1841 an) und des Cambr. and Dubl. Math. Journ.

(von 1846 an). Auch die Freundschaft zwischen den Beiden und G. Salmon ist vielfach der Wissenschaft zu gut gekommen; wie sich dies besonders an den Büchern des Letzteren bewährt hat, die in ihrem Gehalte, besonders auch in den neuen von Cayley mitbesorgten Auflagen, sich vorzugsweise an die beiden Forscher anlehnen, und die, vor Allem in der deutschen Bearbeitung, auf die geometrisch-algebraische Schule die stärkste Einwirkung ausgeübt haben. Endlich fällt in die Londoner Zeit die Thätigkeit Cayley's als Herausgeber der Publicationen der dortigen R. Astron. Society, eine Periode, die nachdem er schon 1852 Mitglied der Londoner R. Society geworden war, 1863 durch seine Wahl zum corresp. Mitgliede der astronomischen Section der Pariser Akademie abgeschlossen wurde.

Dieses Jahr brachte einen Wendepunkt in Cayley's Leben: er übernahm, nachdem er sich (8. Sept.) vermählt hatte, die neugegründete „Sadlerian"-Professur an der Universität zu Cambridge. Von da an lebte er ganz seiner Wissenschaft, in dem ruhigen Behagen einer glücklichen Ehe, aus der ein Sohn und eine Tochter hervorgegangen sind, eines freundlichen stillen, aber gastlichen Hauses, eines gläubigen Gemüths, einer Lehrthätigkeit, in der er nach freier Wahl über ihn eben beschäftigende Disciplinen vortrug, einer erstaunlichen, nicht nachlassenden mathematischen Productionsfähigkeit, endlich einer an seiner Universität hochgeschätzten geschäftlichen Thätigkeit. Die zahllosen ihm zu Theil gewordenen Ehren mögen hier übergangen sein; erwähnt sei nur, dass Cayley von Januar bis Mai 1882 an der John Hopkins Universität in Baltimore auf deren Einladung hin einen gefeierten Vorlesungscurs hielt. Am 26. Januar d. J., nach längeren Leiden, beschloss Cayley sein bis zuletzt in hingebender Arbeit und in selbstloser Pflichterfüllung verbrachtes Leben.

Dem Bande 6 der Math. Papers ist ein Bildniss des Mannes beigegeben, nach einem Oelbild von 1874, das in Bd. 7 durch eine Kopfskizze von 1893, von derselben Hand und in derselben Auffassung, ergänzt wird: bei kleiner Statur ein besonders in der oberen Hälfte mächtig entwickelter Kopf, leuchtender, in sich gekehrter Blick, eine kräftige Nase, aber als vorherrschender Zug Freundlichkeit und Milde; es charakterisirt vollständig den bescheidenen und anspruchslosen Gelehrten. —

Von der immensen Fruchtbarkeit und Vielseitigkeit der Production Cayley's geben fast alle mathematischen Journale und viele Akademieschriften Zeugniss; einen vollen Einblick gewährt aber erst die Sammlung der gegen 900 Aufsätze, welche die Cambridge University Press in einer auf etwa 12 Bände zu berechnenden Quartausgabe seit 1889 veranstaltet und von welcher, unter Aufsicht des Verfassers selbst und

mit seinen Noten versehen, bis jetzt 7 Bände erschienen sind. Eine chronologische Anordnung der Publication ist im grossen Ganzen eingehalten, wird aber durch Zusammenfassen der Arbeiten nach Bänden der Zeitschriften im Einzelnen überall durchbrochen. Trotzdem bietet sie eine genügende Unterlage zur Uebersicht und Würdigung der wissenschaftlichen Thätigkeit.*)

Schon die ersten 12 Arbeiten (1841—1843, meist in dem neu gegründeten Cambr. Math. J.) bewegen sich, wie alle späteren, auf *algebraischem*, *geometrischem*, *analytischem*, *mechanischem* Gebiete und zeigen die Basis, auf welcher Cayley steht: vor Allen Lagrange und Euler, auf welche die leichte Beherrschung aller Hülfsmittel zurückzuführen ist, dann die übrigen Classiker in jeder Richtung: Laplace und Poisson, Carnot bis Chasles, Abel und Jacobi, Cauchy und Gauss, Plücker bis Hesse. Er bemächtigt sich zuvörderst, gleichzeitig mit Jacobi 1841, des Instruments der *Determinanten*, findet (Nr. 1) selbständig den Multiplicationssatz wieder und leitet daraus Relationen — die freilich sachlich bekannt waren — für die Distanzen zwischen 5 Punkten im Raume und ähnliche in Formeln ab, bei denen zum ersten Male die geränderten Determinanten auftreten; er bemächtigt sich ferner der *symbolischen* Rechnungsprocesse, welche von Cauchy, Boole u. A. für Differentiationsoperationen angewendet worden waren. Geschieht dies auch zunächst nur in den Problemen der Attraction eines Ellipsoides und für die Lagrange'sche Reihe, so ist dieser Gebrauch doch als Vorstufe für die sich nun entwickelnde allgemeinere algebraische Ideenbildung wichtig. Ausgehend von der Auffassung einer Determinante als derivirt aus einer bilinearen Form, erweitert Cayley (Nr. 12) solche Bildungen zu höheren nach Analogie der schon vorher (Nr. 11) betrachteten Reciprokaltheorie der Flächen 2^{ten} Grades, und ausserdem zu Bildungen, die aus Permutation von mehr als 2 Indices entstehen, den späteren „Permutanten". In diesen Gedankenkreis schlagen nun von drei Seiten Arbeiten ein, in denen ein und dieselbe Eigenschaft gewisser abgeleiteter Functionen zum Ausdruck kommt: Boole's Bemerkung (Cambr. Math. J. Bd. 2, 1842, Bd. 3, 1843), dass die Discriminante einer Form bei linearer Transformation sich bis auf einen Factor reproducirt; Hesse's Nachweis (Crelle's J. 28, 1844) des analogen Verhaltens seiner „Determinante", sowie eine Eisenstein'sche Formel über binäre Formen (Cr. J. 27, 1844); und dieser Stoss löst plötzlich die Ideenfülle aus, die zur „neueren Algebra" führen sollte. Indem C. auf die verschiedenen Variabelnreihen seiner mehrfach linearen Formen unabhängige lineare Substitutionen anwendet (Nr. 13, 1845),

*) Die Nummern der folgenden Citate sind die der Abhandlungen in den genannten „Collected Mathem. Papers".

erhält er durch die einfache Benutzung des Multiplicationssatzes der Determinanten den Beweis der Boole'schen Sätze und zugleich in den rationalen Functionen der früheren Bildungen, den „Hyperdeterminanten“, eine bedeutende Erweiterung der invarianten Functionen; überdies schon eine Definition dieser Functionen durch ein System partieller Differentialgleichungen, welches freilich für das Zusammenfallen der Variabelnreihen, also für Formen höherer Ordnung, nicht mehr unmittelbar gilt. Mit der Erkenntniss aber, die sich ihm durch Boole's Mittheilung der Invariante dritten Grades der binären biquadratischen Form erschliesst, dass seine Permutationsmethode doch nicht genügend umfassend sei, tritt sogleich (Nr. 14, 1845; Nr. 13 und 14 zusammengefasst im „Mém. sur les Hyperdéterminants“, Cr. J. 30) die allgemeine Fragestellung auf: „für irgend eine gegebene Reihe von Grundformen das Gesammtsystem der abgeleiteten Formen zu bilden, welche für lineare Transformation der Variabeln ihrer Gestalt nach (d. h. bis auf einen Factor) unverändert bleiben“. Und von dem Begriff schreitet C. sofort zur That, indem er, durch *symbolische* Auffassung der früheren Operationen, eine wenigstens die binären Formen erledigende Methode zur Bildung des abgeleiteten Systems schafft; wobei er auch die Bedeutung der Aufgabe, die im System unabhängigen Formen zu bestimmen und die übrigen auf sie zurückzuführen, schon voll erkennt.

In dieser Auffassung ist der Grund gelegt zu der neuen Wissenschaft der *Invariantentheorie* der Formen (Quantics), deren Grundgedanke: die Transformationsfunctionen („transforming functions“) aufzusuchen, welche bei einer gegebenen Schaar von Transformationen invariant sind, mit der Zeit auf immer umfassendere Gebiete ausgedehnt und zu einem die moderne Algebra und Analysis beherrschenden geworden ist. Es lassen sich zwar, wie bei jedem grossen Gedanken, einzelne Wurzeln zurückverfolgen, auch über die schon genannten algebraischen Arbeiten hinaus in das Gebiet der Zahlentheorie und insbesondere in das der Geometrie, aus welcher das systematische Begriffsmaterial der projectiven Eigenschaften von Cayley aufgenommen war; aber in voller Klarheit, und zwar in fast plötzlicher Allgemeinheit, kommt die Idee erst bei Cayley zum Ausdruck. Sie ist daher als sein unvergängliches Eigenthum anzusehen, der Wissenszweig als seine Schöpfung.

Der grosse Antheil, welchen Cayley selbst an der *Ausgestaltung* der von ihm zuerst aufgestellten Idee hat, soll hier nur in seinen Hauptmomenten kurz charakterisirt werden; sie beziehen sich auf seine symbolische Methode, auf seine Abzählungen, auf die geometrischen Anwendungen.

In ersterer Hinsicht bildet C. Determinanten aus Differential-

operationen, deren Producte *symbolisch* als höhere Differentiale aufzufassen sind: es ist der „Ω-Process", von dem ein specieller Fall auf den von den deutschen Mathematikern an den symbolisch geschriebenen Formen ausgeführten „Ueberschiebungs-", oder genauer auf den „Faltungs"-Process führt. Wenn die deutsche Entwickelung der Theorie wesentlich darauf beruht, dass die umfassende Bedeutung dieses Falles erkannt worden ist, so hat die englische Symbolik den Vorzug, für specielle Grundformen und nicht-homogene Variable direct anwendbar zu bleiben. Auf die symbolischen Methoden überhaupt führen alle späteren Fortschritte in der Erzeugungsweise der Formen des Systems zurück.

Die *abzählende Richtung*, schon 1845 angebahnt, wird hauptsächlich in dem zweiten (1856) der zehn „Memoirs on Quantics" eingeschlagen, jener in den Philos. Transactions der R. Society 1854—1878 erschienenen Serie von Abhandlungen, in welchen C. seine Entdeckungen in der Formentheorie vorzugsweise zusammengefasst hat, die ersten sieben noch in der Londoner Zeit. Hier wird die Definition der Invarianten und Covarianten mittels partieller Differentialgleichungen auf Grundformen höherer Ordnung ausgedehnt, wobei C. sich mit Sylvester und Aronhold begegnet; und es wird der Versuch gemacht, die Frage der unabhängigen Formen auf Abzählungen mittelst „Theilung" der Zahlen, also — nach Euler — auf Entwickelung einer „erzeugenden Function" zurückzuführen. So sehr die letztere Methode auf inductivem Boden steht, hat sie doch auch die Theorie in zweifacher Weise gefördert: indirect, indem sie durch einen übereilten Schluss den Anstoss zu dem Gordan'schen Fundamentalsatz von der Endlichkeit der (rational-ganz) unabhängigen Formen des Systems — „dessen Wichtigkeit bez. der ganzen Formentheorie zu überschätzen unmöglich ist", wie C. freudig anerkannte (9[tes] Mem., Nr. 462) — und damit erst zu einer Möglichkeit des Einblicks in die Structur des ganzen Formenkreises gab (1868); direct, indem sie in viel späterer Zeit eine Reihe von Arbeiten Sylvester's, Cayley's und ihrer Schüler hervorrief, welche für die Abzählung der Formen von gegebenem Grad und Ordnung von Erfolg waren und auch für jenes volle System leitende Gesichtspunkte boten. Auf jener Definition durch Differentialgleichungen beruht aber auch (ib., oder Nr. 131 in Cr. J. 47, 1854) Cayley's Erzeugung einer Covariante aus ihrem Leitgliede, die sich für die Algebra und die Theorie der Differentialgleichungen als folgenreich erwiesen hat, und von welcher die Faà di Bruno'sche (Cr. J. 90) nur eine andere Ausdrucksweise vorstellt; und hieran schliesst sich, nachdem Mac Mahon (American J. Bd. 7, 1884) den Zusammenhang dieser „Seminvarianten" der binären Formen mit den symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung gezeigt hatte, eine neuerliche Arbeitsperiode C.'s auf dem formen- und glei-

chungstheoretischen Gebiete, die sich wiederum durch Abzählungen und vielfache tabellarische Anordnungen kennzeichnet.

Was die *Anwendungen der Formentheorie auf Geometrie* betrifft, so haben erst bei Cayley die projectiven Gedanken ihre vollständige algebraische Gestaltung erfahren. Haben insbesondere projective Verallgemeinerungen von metrischen Beziehungen schon vor Cayley für den geometrisch-algebraischen Standpunkt „einen nicht hoch genug anzuschlagenden Fortschritt" (s. A. Clebsch über J. Plücker) bedeutet, so ist doch erst durch eine von Cayley's höchsten Leistungen, durch seine *projective Massbestimmung* (6tes Mem., Nr. 158, 1859), das eigentliche Messen selbst dem allgemeinen projectiven Begriffe des Doppelverhältnisses eingefügt worden und zugleich durch die Theorie der quadratischen Formen „zum vollendeten analytischen Ausdruck" (Clebsch ib.) gelangt. Auf die weitere Bedeutung dieses Schrittes werden wir noch unten zurückkommen. — Auf der anderen Seite haben die von der Geometrie gestellten Probleme die algebraischen Methoden, insbesondere die der *Elimination*, in hohem Grade angeregt. Die früheste hierhergehörige Leistung ist in der Abhandlung „Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes" (Nr. 53 in Cr. J. 34, 1847) enthalten; dort wird, im Anschluss an Joachimsthal, zuerst ein ternäres Curvenproblem auf ein binäres zurückgebracht, und die von Hesse schon für die Wendepunkte gelöste Aufgabe, bei der Elimination auftretende überschüssige Factoren wegzuschaffen, für die Reciprokalgleichung der Curve 3ter Ordnung, hauptsächlich aber für das Doppeltangentenproblem verfolgt, mit einem Ansatz, der Hesse für die Curve 4ter Ordnung zum Ziel geführt hat. Ueberdies nimmt dieser Aufsatz, eine wirkliche Pionierarbeit, eine Reihe später wiedergefundener Resultate voraus, so das Rechnen mit Identitäten, das Verhalten der Hesse'schen Determinante in Doppel- und Rückkehrpunkten. Nach der Wendung, welche Salmon 1858 dem Doppeltangentenproblem gegeben hatte, baut C. 1859 (Nr. 260) dessen Methode für die allgemeine Curve $n$ter Ordnung auf Invariantenidentitäten auf; und diese algebraische Kunst zeigt sich in noch höherem Grade in dem gleichzeitig (Nr. 261, bes. aber in Nr. 341, 1864) auf Grund eines Hesse'schen Ansatzes behandelten Problem der Berührungspunkte 5ter Ordnung einer Curve mit einem Kegelschnitt. In diesen Arbeiten liegen die Wurzeln der späteren algebraisch-geometrischen Forschungen von Clebsch. Auch die kurzen, für Gradabzählungen wichtig gewordenen Noten in Cr. J. 63 und 64 (Nr. 338, 352), welche an Stelle einer gegebenen Curve lineare Curvenschaaren setzen und, im Falle dass eine Resultante verschwindet, specielle (reducirte) Resultanten einführen, sind hier zu erwähnen. — Endlich muss, bei dem Zusammenhange der Geometrie mit der Invariantentheorie, noch an die drei zusammengehörigen durch

die Polarentheorie einer ebenen Curve zugeordneten Curven, von denen eine den Namen der *Cayley'schen Curve* trägt, erinnert werden: C. hat sie zuerst (1844, Nr. 26) geometrisch an der Curve 3ter Ordnung erschlossen und später (1856, Nr. 146) als „Pippian" (wegen ihrer Gleichung $P(u)$ so genannt) formentheoretisch erörtert, wie er solches an der Curve 3ter Ordnung überhaupt vielfach gethan hat.

Statt alle einzelnen Entdeckungen Cayley's auf dem Gebiete der Invariantentheorie zu verfolgen, darf hier auf den „Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie" von F. Meyer (1892) verwiesen werden; insbesondere auch für die Beziehungen zu J. Sylvester und Ch. Hermite. Cayley, bei dem sich jede gewonnene Anregung in Selbstschaffen umsetzte, giebt nicht nur deren Resultate in seinen „Memoirs" in eigener Weise wieder; er verallgemeinert auch die Formerzeugungsprocesse und neuen Begriffe, wie die „kanonischen" Darstellungen des Ersteren, die „typischen" des Letzteren. Nur die neue Form der Auflösung der Gleichung 4ten Grades (Nr. 135 in Cr. J. 50, Nr. 232 in Cr. J. 54, etc.) sei desshalb besonders genannt, weil Cayley in seinem ersten Beitrag zu diesen Annalen auf das Thema zurückkommt. Die ganze Richtung, noch wesentlich ergänzt durch die Untersuchungen über die Abhängigkeit der Formen des Systems von den Wurzeln der durch die Grundform dargestellten Gleichung, ist nach 1854 von F. Brioschi zusammenfassend weiter verfolgt worden. —

Cayley's Arbeiten auf *algebraischem* Gebiet sind nicht nur invariantentheoretischer Art; sie erstrecken sich über alle angrenzenden Disciplinen. Zunächst über *Determinanten* und *Matrices*. Von dem von ihm sogenannten „déterminants gauches" giebt er (Nr. 69 in Cr. J. 38, 1848 und Nr. 137 in Cr. J. 50, 1855) die Eigenschaften und die Berechnung, vor Allem aber verwendet er sie (Nr. 52 in Cr. J. 32, 1846) dazu, um die n^2 Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Elementen auszudrücken, in directer Verallgemeinerung dessen, was Euler für $n=3$ und 4 „nulla certa methodo, sed potius quasi divinando" geleistet hatte — und so hat man auf Cayley das von Euler hinzugefügte Wort*) anzuwenden: „si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus." Mit dem Fall $n=3$ hatte sich übrigens C. schon früher bei Gelegenheit des Rotationsproblems (Nr. 6, 37) beschäftigt, seine allgemeine Lösung hatte 1854 Hermite's Arbeit über die Transformation der quadratischen ternären Formen in sich (Cambr. a. Dubl. Math. J. Bd. 9)

*) Citirt in Baltzer's Determinanten, § 14.

veranlasst, und diese wieder Verallgemeinerungen von Cayley auf quaternäre (Cr. J. 50) und auf bilineare Formen (Nr. 153, in Philos. Transact. 1858). Diese Verallgemeinerungen sind besonders der Rechnung mit Matrices — quadratisch oder rectangulär geordneten Elementen — zu danken, welche Cayley (Nr. 11, 152) schon in dem Sinne eingeleitet hat, in dem sie später (1867) durch Laguerre weitergebildet worden ist. Bei Gelegenheit der Matrices wollen wir gleich eine durch sie bei Cayley angeregte Untersuchungsrichtung abzählender Art erwähnen: es handelt sich für ein System überschüssiger Bedingungsgleichungen nicht nur um die Anzahl der unabhängigen Bedingungen, sondern um die *Ordnung* des Systems, d. h. die Anzahl der Lösungssysteme (Nr. 77, 1849), eine Frage, die von ihm gleichzeitig mit Salmon in Angriff genommen, von Letzterem aber zu allgemeinen Formeln hin weitergeführt worden ist; auch die Frage nach der *Basis* eines solchen Systems von Bedingungen ist von Cayley zuerst angeregt worden (Nr. 413 in Phil. Transact. Bd. 160, 1869).

Die Theorie der *Elimination* der Variabeln aus zwei binären Formen verdankt Cayley den für die formentheoretische Behandlung wichtig gewordenen Fortschritt, dass er die Bézout'sche Methode in die bilineare Form — „Bézoutic emanant" — zusammenfasste, deren Determinante die Resultante ist (Nr. 230 in Cr. J. 53, 1855, und Nr. 155 im 4ten der Memoirs, 1858); für ternäre Formen stellt er die Resultante wenigstens als Quotienten dar (Nr. 40, 59), indem er die Elimination aus überschüssigen linearen Gleichungen erledigt. Ferner giebt er für jene erstere Resultante zahlreiche Tafeln, sei es für ihre Determinantenformen, sei es für ihre Ausdrücke in symmetrischen Functionen der Wurzeln, welch' letztere Theorie er schon seit 1857 (Nr. 147) nach der Seite ihrer Berechnung hin eifrig gefördert hatte. Seine Geschicklichkeit in algebraischen Umformungen, die ihn in der Durchführung verwickelter Rechnungen, und seine Lust zu tabuliren, die ihn im Ausdenken immer neuer Anordnungen unerschöpflich machen, zeigen sich noch in vielen analogen Aufgaben: so wenn er die Sturm'schen Functionen durch die Coefficienten ausdrückt (Nr. 48, 65), oder wenn er die Bedingungen für Gleichheiten unter den Wurzeln aufstellt, ebenso in Resolventenbildungen aller Art (Nr. 262, ff.), wie für die Gleichung fünften Grades (Nr. 268 u. ff.). Auch die Arbeiten auf dem Gebiete der Zahlentheorie sind wesentlich tabellarischer Art.

Aber auch die *Substitutionstheorie* ist in seinen späteren Arbeiten vertreten: durch Tabellen und durch graphische Versinnlichungen von Gruppen, durch geometrische Untersuchungen von Configurationen. Cayley nimmt sogar den Galois'schen *Gruppenbegriff* von den Vertauschungen explicit auf die *Operationen* überhaupt herüber (Nr. 125, 126 in Philos. Mag. Bd. 7, 1854) und definirt die Gruppe durch eine

Reihe von Relationen zwischen einigen erzeugenden Operationen. Er ist sich hierbei der Bedeutung des Begriffs, wenn auch nur für discontinuirliche Gruppen, vollkommen bewusst (vgl. Nr. 299, 1860: „the most outlying term“); und so kann auch diese die jetzige mathematische Forschung durchdringende Idee den Namen Cayley's in ihre Geschichte aufnehmen. —

Das zweite Hauptgebiet von Cayley's Thätigkeit ist die *Geometrie*, und zwar in ihren sämmtlichen Zweigen. Diese Thätigkeit erstreckt sich über die ganze Schaffenszeit, sie erreicht aber ihre grösste Intensität zwischen 1860 und 1870. Um an die oben schon erwähnten algebraisch-geometrischen Arbeiten anzuschliessen, sei hier zunächst die grosse Reihe der auf die *Reciprokaltheorie* der Curven und Flächen bezüglichen Abhandlungen angeführt. Das früheste wichtige Ergebniss in dieser Richtung ist die Ausdehnung der Plücker'schen Formeln von ebenen Curven auf Raumcurven, für welche Salmon schon den Begriff der „scheinbaren Doppelpunkte“ eingeführt hatte, und auf developpable Flächen (Nr. 30 in Liouv. J. Bd. 10, 1845; s. auch Nr. 83). Von da an tritt die Reciprokaltheorie der *Flächen* in den Vordergrund, und zwar in engster Verbindung mit Salmon's Arbeiten von 1847, 1848 und 1857: eine Reihe von Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung (Nr. 47, 1847; Nr. 76, 1849, wobei übrigens die Bezeichnungsweise für die Configuration der Geraden noch ungenügend ist) und eine systematische geometrische Auffassung der von besonderen berührenden Ebenen auf einer Fläche erzeugten Curven (Nr. 106, 1852) mussten vorausgehen, bis 1862 (Nr. 227) die Salmon'schen Flächenformeln auf ihren Zusammenhang hin geprüft werden konnten; ja erst, nachdem er 1869 (Nr. 412) in Anknüpfung an und Ergänzung von Schläfli's Arbeit die Flächen dritter Ordnung nach ihren Singularitäten eingetheilt und einzeln durch Rechnung auf ihre Reciprokaleigenschaften erforscht hatte, konnte er jene Formeln inductiv erweitern oder verificiren (1869, Nr. 411 etc.). Obwohl C. hierbei tief in die Eigenschaften der Singularitäten vielfacher Curven auf Flächen eindringt, ist doch nur der sogenannte „allgemeine“ Fall behandelt, während sich C., wie er dies auch sonst oft that, die Behandlung specieller Vorkommnisse einer supplementären Untersuchung vorbehalten denkt; so kam es, dass in der Gestalt, in welcher die Formeln in Salmon's Raumgeometrie übergegangen sind, manches der späteren Behandlung (Zeuthen) überlassen blieb. — Die Flächenformeln werden dann wieder (Nr. 373, 1865), zum Theil in Verbindung mit Cremona, zur Vervollständigung der vorher gefundenen Formeln für Raumcurven und abwickelbare Flächen benutzt (s. Quart. J. Bd. 11, 1869).

Von der geometrischen Auffassung der Tangentenebene ausgehend,

gab C. weiter das Verhalten der Doppelcurve einer *windschiefen Fläche* zu deren Erzeugenden (Nr. 107, 1852) an; wie er denn diese Flächenart überhaupt systematisch verfolgte, sei es — wieder im Anschluss an Salmon — in Bezug auf ihre Erzeugung durch 3 Leitcurven (Nr. 339, 1863; ff.), sei es durch Discussion der Regelflächen von niedrigeren Ordnungen. In den Arbeiten der ersteren Art finden sich auch Abzählungen der Ordnung mittelst Functionalformeln, die überhaupt für die spätere abzählende Richtung der Geometrie von Bedeutung geworden sind; und andere bemerkenswerthe Resultate (4-punktige Sehnen der Raumcurven, algebr. Discussion von rationalen Raumcurven).

Von den übrigen geometrischen Leistungen seien die hauptsächlichsten nach ihrer Zeitfolge besprochen.

Schon 1843 (Nr. 5) stellt Cayley — nur auf Chasles gestützt und ohne zunächst Plücker zu nennen*) — einen sehr allgemeinen Satz für ebene Curven auf, der seitdem, als *„Cayley'scher Schnittpunktsatz"*, eine der Grundlagen der abzählenden ebenen Geometrie geworden, freilich erst weiterhin genügend sichergestellt und begrenzt worden ist. Zu bemerken ist hierzu, dass C. selbst in der ursprünglichen Note seine Ableitung als nicht so concludent hinstellt, wie später.

Und wiederum begegnet sich Cayley mit Plücker in der Schöpfung der *„Coordinaten einer Geraden im Raume"***). Indem er 1860 (Nr. 284, s. auch Nr. 294, 1862) eine Raumcurve durch alle sie schneidenden, zu Kegeln geordneten, Geraden darstellt, gelangt er zu den 6 Coordinaten der Geraden. Sie dienen C. zur Lösung einfacher Aufgaben, wie zur Aufstellung der Involutionsbedingung für 6 Gerade (linearen Relationen zwischen den Coordinaten) und zu mechanischen Anwendungen (Nr. 300, 1861; 388; 435), die Entwickelung einer Geometrie des Raumes, unter Auffassung der Geraden als Element, blieb Plücker vorbehalten. C. ist selbst (s. die Noten zum IV. Band der Papers) ängstlich bemüht, Plücker das Verdienst dieser Idee voll zu lassen, der eine von ihm schon 1846 angedeutete, aber in Vergessenheit gerathene Idee erst 1865, unter Hinweis auf Cayley, wieder aufgenommen hatte: ein sprechender Beweis für die Selbstlosigkeit des Mannes. Uebrigens kommt C. auf diese Geometrie selten zurück, zuletzt in Proc. of the London Math. Soc. Bd. 8, 1877 bei den Normalencongruenzen.

Eine verwandte Leistung, welche die Grundlage für eine Reihe von geometrisch-algebraischen Arbeiten Anderer werden sollte, bildet die *Darstellung einer Raumcurve* durch Kegel und Monoid (eine Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkt) (Nr. 302, 305 in C. R. 1862, 1864). C. behandelte mit diesem Hülfsmittel selbst nur die niedrigeren

*) Vgl. die o. c. Note von Scott.

**) Vgl. hierzu Clebsch über „J. Plücker".

Fälle (vorher schon die auf der Fläche 2^{ter} Ordnung gelegenen Raumcurven, indem er sich hierzu (Nr. 314, 1861), wie bald darauf Chasles, der Plücker'schen Parameterdarstellung bedient); aber er verfolgte mit Aufmerksamkeit die Entwickelungen Anderer, bes. diejenigen von Halphen (vgl. Note zu Papers, V).

In die Polarentheorie gehört wieder eine der bekanntesten Leistungen Cayley's, die Untersuchung der *singulären Punkte* der algebraischen ebenen Curven (Nr. 354 und 374, 1865; vorher Nr. 343), deren bei Gelegenheit des Berichtes über die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen (Math. Vereinigung 1893) eingehend gedacht wurde. Hier sei nur erwähnt, dass sie hauptsächlich in der, durch Clebsch's Verwendung der Geschlechtszahl p (1864) angeregten Einführung von vier ganzzahligen Aequivalenzzahlen besteht. Von dieser Note datirt, wiewohl die Aequivalenzbeweise nicht erschöpfend waren, die Aufnahme der höheren Singularitäten in die Curvengeometrie.

In demselben Jahrzehnt wurde die Geometrie noch durch eine weitere folgenschwere Entdeckung bereichert: nach Ausdehnung des Chasles'schen *Correspondenzprincips* auf rationale Curven wird Cayley durch eine rasche Verallgemeinerung auf das für Curven von beliebigem Geschlecht p geführt. Auch die Geschichte dieses Princips und seiner Anwendungen findet sich in dem soeben citirten Bericht; hier sei nur hervorgehoben, dass sich kaum in irgend einem anderen Gebiet die inductiv-verallgemeinernde Kraft Cayley's so deutlich zeigt, wie in dem vorliegenden. Auch war er sich der Begrenzung seines versuchten Beweises wohl bewusst, und er schloss sich brieflich gern den späteren, von ihm unabhängig gefundenen Resultaten in dieser Richtung an. Ihm bleibt dabei das Verdienst, den Satz zuerst formulirt, seine Bedeutung für die projective Geometrie erkannt und durch zahlreiche Beispiele, wie die Bestimmung der Zahl der Kegelschnitte für gegebene Bedingungen (Nr. 407, 1867), zu einem reichen Wissenszweige angeregt zu haben. — Unabhängig von diesen Anwendungen ist auch die sich hierbei entwickelnde Anschauung bemerkenswerth: die Coefficienten der Kegelschnitte als Variable in einem höheren Raume zu deuten, wobei alles auf Aufsuchen der singulären Stellen von Gebilden dieses Raumes zurückkommt. Nur dass Cayley auch von dieser Auffassung bloss eine Skizze giebt, wie er es bei allgemeinen Anschauungen überhaupt liebte, während sich seine Untersuchungen auf alles Detail der einzelnen Fälle erstreckten.

Auch in die Probleme der *rationalen Transformation*, die im Mittelpunkt der neueren Geometrie stehen, hat Cayley eingegriffen. So giebt er, von Clebsch angeregt, die Reduction der Curven vom Geschlecht p auf Normalcurven $(p+2)^{\text{ter}}$ Ordnung (Nr. 384, 1865); ferner den geometrischen Beweis für die Erhaltung des Moduls bei

$p = 1$, während ihm die Ausdehnung auf die Moduln für höhere p hierbei, und auch späterhin, nicht glückte. Aus dem Jahre 1869 stammt die, erst Ende 1870 erschienene, Abhandlung über die eindeutigen Ebenen- und Raumtransformationen (Nr. 447, 450); die letzteren werden auf dem Wege der Verallgemeinerung gewonnen, wie gleich darauf von zwei anderen Seiten auf dem Wege der Flächenabbildungen, für die Ebene wird ohne Beweis der Satz von der Zusammensetzung der Transformationen aus quadratischen mitgetheilt, welchen Clifford, Cayley's nächster Schüler, aus Beispielen abstrahirt hatte. Die Abhandlung enthält auch Abzählungen für das Auftreten vielfacher Elemente von Flächen: Zahlen, welche, nach brieflichem Verkehr verbessert, Cayley zur Aufstellung einer *negativen* Geschlechtszahl für die Flächenclasse, welcher die Regelflächen zugehören, Veranlassung gegeben haben.

Man könnte nun noch weiter auf ganze Serien von geometrischen Arbeiten hinweisen, wie über die Flächen vierter Ordnung mit Knotenpunkten, insbesondere die Kummer'sche Fläche (1870ff.), oder über die Theorie der zweien Kegelschnitten ein-, bezw. umgeschriebenen Polygone (1863 ff.), u. s. w.; es mag aber genügen zu sagen, dass, wie vielseitig und beziehungsreich auch ihre Methoden sind und wie sehr auch gerade in diesem Umstande ihr weitreichender Einfluss begründet ist, Cayley doch überall vorzugsweise als der *Algebraiker* zu erkennen ist, welcher jede Construction und jeden Satz auf algebraische Identitäten zurückzuführen und in diesen Formeln das Gerüste ihres Aufbaus blosszulegen sucht. Indessen ist auch die *intuitive* Seite stark ausgeprägt. Sie zeigt sich schon, als C. (Nr. 36, 1846) jede Bewegung eines festen Körpers durch ein Drehen und Gleiten zweier windschiefer Flächen auf einander ersetzte; ferner in der Art des Erfassens der Singularitäten von Flächen und Curven; vor Allem in vielfachen *gestaltlichen* Untersuchungen. Die letzteren betreffen Kegelschnittsysteme (Nr. 280, 285, 342, 390), Kegel und Curven 3ter Ordnung (Nr. 249, 345, 350, 351, 399) — wo Gestaltliches und Analytisches ganz im Plücker'schen Sinne behandelt wird —, Curven 4ter Ordnung (Nr. 361 ff.), Brenncurven u. s. w., die Erzeugung und Symmetrieeigenschaften der Polyeder (Nr. 308, 375). Diese Seite zeigt sich auch in zahlreichen Zeichnungen, welche sich gelegentlich bis zur Herstellung von Modellen erheben, in dem Interesse für topographische Probleme (Nr. 246) und für mechanische Erzeugungen von Curven mittelst eigener Constructionen (Nr. 446ff.), in graphischen Constructionen astronomischer Vorgänge (s. unten) oder von Substitutionsgruppen (American J. I, XI), in Discussion von Figuren, die zugleich die symbolischen Formeln der Invariantentheorie und die Substitutionsformeln der organischen Chemie illustriren (American J. V); auch viele einzelne

Beweisführungen bezeugen die Thätigkeit der Anschauungskraft des Urhebers. —

Auf dem Gebiete der *Analysis* liegen zahlreiche Leistungen Cayley's vor, welche, wenn sie auch hinter den algebraischen und geometrischen zurückstehen, doch vortretend genug sind, um hier charakterisirt zu werden. Durch Abel und Jacobi angeregt, hat Cayley der Theorie der *elliptischen Functionen* sehr früh Interesse entgegengebracht, und ist dann dieser Richtung immer ergeben geblieben. Von den Abel'schen doppelt unendlichen Producten ausgehend sucht er (Nr. 19, 23, 24, 25, 130; 1844 und 1845), die Eigenschaften der Thetafunctionen und die Transformationstheorie zu begründen, und erhält, ein Jahr vor Eisenstein, wichtige Resultate des Letzteren. Auch der Aufsatz Nr. 45 (1847), wo von der Differentialgleichung für sin am u und der Definition der Thetafunction durch das Integral 2[ter] Gattung aus auf einfachem Wege zur Quotientendarstellung jener elliptischen Function, und weiter, aber nur implicit (s. Nr. 307), zur Potenzentwickelung für den Zähler vorgeschritten wird, kann als Vorläufer der Veröffentlichungen von Weierstrass bezeichnet werden. Die Ergebnisse der ausgedehnten rechnerischen Thätigkeit C.'s im Sinne der „Fundamenta" sind im Wesentlichen im dem Werke „An elementary treatise on elliptic functions", 1876 (1880 mit Zusätzen über Transformation von F. Brioschi italienisch herausgegeben), dem einzigen selbständigen Buche, das Cayley veröffentlicht hat, gesammelt, wo nur seine Determinantenformeln für die Addition (Nr. 94 in Cr. J. 41) und seine geometrischen Deutungen der Modulargleichungen (Philos. Tr. 1874) fehlen; auch hat er für die Transformation 7[ten] Grades (ib. 1878) und 11[ten] Grades (C. R. 1890) in demselben Sinne weitergearbeitet. — Aber auch der mehr formentheoretischen Richtung, welche Cayley schon 1846 (Nr. 33) die Reduction des allgemeinen binären elliptischen Differentials auf die Jacobi'sche Normalform mittelst Homogenmachen und linearer Transformation verdankt, hat er, als sie durch F. Klein auch in die Theorie der Modulargleichungen hineingetragen worden war, noch frische Aufnahmefähigkeit entgegengebracht und durch ausführliche Bearbeitung der Zusammenhänge zwischen Multiplicator- und Modulargleichungen für die niedrigen Grade Rechnung getragen (American J. IX, X; s. auch diese Annalen Bd. 30 etc.).

Das Interesse für algebraisch-geometrische Fragen hat Cayley weiterhin auch zu den *Thetafunctionen* von zwei Argumenten geführt. Er fand, dass die Relationen zwischen den Ausdrücken für die singulären Elemente der Kummer'schen Fläche denen zwischen jenen Functionen, für die Nullargumente, analog sind (Cr. J. 83, 1877), und wurde dann durch Borchardt auf den Ausdruck der Coordinaten der

Fläche in jenen Functionen hingewiesen. Seine ausführlichen Untersuchungen der Additionstheoreme und der Relationen zwischen den Wurzelfunctionen, auch für den hyperelliptischen Fall mit $p = 3$ (vgl. den citirten Bericht über algebr. Functionen, Abschn. IX) gipfeln wieder in vergleichenden Tabellen, welche freilich durch eine systematische Charakteristikentheorie ersetzt werden könnten. — Die Vorlesungen, die er in Baltimore 1862 hielt (Amer. J. Bd. 5, 7), beziehen sich wesentlich auf die Grundlagen der Clebsch-Gordan'schen Theorie der *Abel'schen Functionen*, aber mit reichen Einzelausführungen und in glücklicher Formulirung. Besonders hinzuweisen ist dabei auf einen Gedanken, der zwar von Weierstrass längst für hyperelliptische Ausdrücke fruchtbar gemacht und für allgemeine in seinen Vorlesungen mitgetheilt war, der aber hier von Cayley selbständig gefasst wird: die Integranden 2ter Gattung *algebraisch* so zu normiren, dass sie die Vertauschbarkeit von Argument und Parameter zulassen; ausgeführt wird dieser Gedanke für die allgemeine Curve 3ter Ordnung, theilweise auch für die Curve 4ter Ordnung, ein Weg, der zur Lösung von anderer Seite angeregt hat.

Eine grosse Reihe von Einzelarbeiten aus allen Perioden bezieht sich ferner auf die Theorie der *bestimmten Integrale* und die der *Differentialgleichungen*. Für die singulären Lösungen der letzteren führt Cayley zum ersten Male geometrisch-algebraische Begriffe ein, welche sie der Art nach zu unterscheiden geeignet sind (Nr. 330, 1863); die Orthogonalflächen, die Minimalflächen verfolgt er geometrisch (C. R. 75, Phil. Transact. Bd. 163 (1872), C. R. 106 (1888)), auch die Polyederfunctionen, welche aus der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe hervorgehen, behandelt er eingehend (Cambr. Transact. XIII, 1880). Bei den linearen Differentialgleichungen interessiren ihn ferner die Differentialinvarianten (Quart. J. 21, 1886), und die Reihenentwickelungen der Lösungen in der Nähe eines singulären Punktes (ibid., u. Cr. J. 100, 101), diese aber in formalem Sinne. Denn die Functionentheorie, in dem strengen Sinne dieser Wissenschaft, welcher in allen Problemen die Gültigkeitsgrenzen festzustellen verlangt, lag ausserhalb Cayley's Sphäre; am weitesten von ihm ab lag diejenige Richtung, welche die Functionen gar nicht durch analytische Ausdrücke, sondern durch Bedingungen definirt, ihre Existenz beweist und sie dann erst aus ihren Eigenschaften aufbaut: die Riemann'sche Richtung. —

Auch der *angewandten Mathematik* hat Cayley eine intensive und fruchtbringende Thätigkeit zugewandt, getragen von der Anschauung, die er in seiner Präsidentenrede beim Meeting der British Association zu Southport 1883 darlegte. Wiewohl er die anregenden Einwirkungen der von dem Leben und von der empirischen Forschung gestellten

Aufgaben auf die Entwickelung der Mathematik voll anerkennt, erscheint es ihm doch als selbstverständlich, dass die *Bewerthung* der rein mathematischen Forschung davon unabhängig und nur aus ihr selbst zu schöpfen sei. Er zögert daher nicht, eine ganze Reihe von fremden Arbeiten aus der Mechanik, insbesondere der Astronomie, berichtlich wiederzugeben, wenn sie wegen eines methodischen Interesses ihn ansprechen und seine Selbstthätigkeit wachrufen; und in anderen, die eigene Untersuchungen enthalten, scheut er auch nicht davor zurück, sie bis in die letzten numerischen Entwickelungen fortzusetzen, welche der rechnenden Astronomie unmittelbar zugut kommen können. Sie betreffen fast durchaus die Probleme der Rotation und der Gravitation, hier wieder die Potentialtheorie und das Problem der drei Körper, eine Gruppe von Arbeiten, welche hauptsächlich in die Londoner Zeit fällt. Eine zweite kleinere Gruppe von Arbeiten mehr graphischen Inhalts datirt aus späterer Zeit; wir wenden uns zunächst zur ersteren.

Die frühesten Arbeiten Cayley's über *Rotation* haben zum Zweck, die drei Parameter der orthogonalen Substitution einzuführen und bei hinzutretenden Kräften die Methode der *Variation der Constanten* anzuwenden (Nr. 6, 37); und diesem letzteren Problem widmet er nun auch in der *Störungstheorie* seine volle Aufmerksamkeit. Er verfolgt die Hansen'sche Mondtheorie von 1838, indem er ihre Differentialgleichungen mit Jacobi's Elementen in kanonische Form setzt (Nr. 163, 176, 180, 212; von 1857 an), und (Nr. 181) Hamilton's so berühmt gewordene Theorie von 1834, welche die Bewegung auf nur *eine* charakteristische Function zurückführt. Eine Uebersicht über alle diese Fortschritte der theoretischen Dynamik, besonders bez. der Variation der Constanten, giebt er (Nr. 195) in einem ausgedehnten Bericht an die British Assoc. von 1857, welcher in objectiver Weise und in wesentlich historischer Aneinanderreihung die Hauptresultate der Forscher, von Lagrange und Poisson bis Jacobi (und seinen Erklärern Donkin u. s. w.) mittheilt, freilich ohne auf die Genesis der Begriffsbildungen näher einzugehen. Der klare Bericht würde auch erschöpfend geworden sein, wenn die Entwickelungen Jacobi's damals schon vollständiger publicirt gewesen wären.

Der Vorgang des Reproducirens und Producirens wiederholt sich nun an den *numerischen* Entwickelungen der Störungstheorie und gipfelt wieder in einem Berichte über Dynamik (Nr. 298, 1862), welcher auch eine Reihe weiterer dynamischer Probleme in Betracht zieht, mit Newton beginnend im Wesentlichen alle classischen Arbeiten berücksichtigt und auch heute noch lesenswerth ist. Diese Referate bilden einen charakteristischen Zug in Cayley's Thätigkeit, die darauf gerichtet ist, die vorhandenen Methoden und Resultate zu beherrschen und zugänglich zu machen: auch von der Redaction dieser Annalen

wünschte er bei Gründung der neuen Zeitschrift die Aufnahme von Berichten über die algebraisch-geometrischen Fortschritte, ein Wunsch, der in Deutschland später auf andere Weise realisirt werden sollte. — Die Thätigkeit dieser Periode bezieht sich vornehmlich auf die Mondtheorie: auf die Messung der Längen in der beweglichen Bahnebene (Nr. 212), auf die numerische Entwickelung der Störungsfunction nach Potenzen des Entfernungsverhältnisses (Nr. 213) und der reciproken Entfernung nach wahren oder nach mittleren Anomalien. Cayley wird nicht müde, neue Durchrechnungen vorzunehmen, wenn etwa das Einführen einer neuen Variabeln eine Vereinfachung oder Klärung der Methode verspricht, und seine Tafeln mit denen der übrigen Autoren zu vergleichen. Als eine Frucht dieser Bemühungen erscheint (Nr. 221, 1862) die unabhängige Bestätigung der von Adams erhaltenen periodischen und säcularen Glieder in der Länge des Mondes, welche von der Veränderlichkeit der Excentricität der Sonnenbahn abhängen; insbesondere hat er das wichtige säculare Glied gegenüber dem in der Plana'schen Theorie bestätigt, in welcher Cayley später in der That mehrere Auslassungen entdeckt (Nr. 464, 468). Die Störungsrechnungen hat C. 1872 (Nr. 479 ff.) noch einmal aufgenommen.

Mit *graphischen* Hülfsmitteln ist Cayley an zweierlei astronomische Aufgaben herangetreten. Die eine ist die Bestimmung einer Planetenbahn aus drei Beobachtungen (Nr. 471, 472, 476; 1869). Es handelt sich darum, wenn der Brennpunkt der Bahn und drei Linien im Raume gegeben sind, die Bahnebene durch zwei Zeitbedingungen zu bestimmen; Cayley lässt je eine dieser Bedingungen aus und construirt auf der Sphäre die geometrischen Oerter des Poles der Bahnebene, sowie die Oerter bei constanter Excentricität; wobei er jeweils die kritischen Lagen für die Bahnebene aufsucht. Er greift das Problem nur für specielle Lagen der drei zu treffenden Geraden an, discutirt die Curven numerisch und stellt Zeichnungen her. — Die zweite Aufgabe betrifft die Schatten- oder Halbschattencurve, die auf der Erdoberfläche bei einer Sonnenfinsterniss entsteht; er stellt sie in stereographischer Projection als Kreisenveloppe dar (Nr. 473—477; 1870, und Quart. J. 15, 1878), eine übrigens schon von Moutard 1862 angegebene Construction. In Nr. 477 (Mem. R. Astr. Soc.) ist diese Projection numerisch und zeichnerisch ausgeführt und giebt ein scharfes Bild der Erscheinung; C. hält die Methode sogar für practisch verwerthbar. — Offenbar sind diese Veranschaulichungen für die geometrische Einsicht in Gebiete, die sonst nur rechnerisch behandelt zu werden pflegen, sehr geeignet. —

Die Werke Cayley's bieten nicht nur der Forschung unvergängliche Resultate und fortwirkende Anregungen; sie liefern auch ein überreiches

didaktisches Material in den fast alle Gegenstände der elementaren und höheren Betrachtungen umfassenden zahllosen kleinen Noten, Zusammenstellungen und Aufgaben, die hauptsächlich im „Messenger of Math." veröffentlicht, der Prüfungsthätigkeit ihres Verfassers das Entstehen verdanken. Auch die kleinste der Arbeiten ist lehrreich durch irgend eine neue Methode die Formeln anzupacken, durch irgend eine Begriffsmodification, oder noch mehr durch die Art, aus ganz *speciellen* Fällen zu *allgemeineren Schlüssen*, oft bis zu den allgemeinsten, aufzusteigen. Was man von den Engländern überhaupt gesagt hat: „dass sie geduldige Geister sind, deren Wesen auf Aneinanderreihen und Umspannen einer Menge kleiner Thatsachen aufgeht, um daraus ein Gesetz zu finden — die besten unter ihnen sind aristotelische Köpfe . . ."*), trifft völlig auf Cayley zu: es liegt nicht in seiner Art, die Begriffe bis in ihre letzten Elemente zu analysiren, aus wenigen Voraussetzungen ein System aufzubauen oder seinen Entwickelungen eine allgemeingültige, alle Details von selbst einschliessende Form zu geben. Meister aber ist er in der *empirischen* Verwendung des Materials: wie er es in einem abstracten Gedanken vereinigt, diesen generalisirt und dem rechnenden Versuch unterwirft, wie dann aus den neugewonnenen Daten mit einem Schlage die allgemeine umfassende Idee erscheint, an deren nachträglicher Bewährung durch die verificirende Rechnung Jahre der Arbeit gesetzt werden. So ist Cayley der *Naturforscher* unter den Mathematikern. Auf seinem Wege ist er nicht nur der Schöpfer der Invariantentheorie geworden; er hat durch seine projective Massbestimmung sogar der *Philosophie* einen Dienst geleistet: denn da die Zuordnung der Staudt'schen Würfe zu Doppelverhältnissen, wie F. Klein betonte, von unserer Metrik unabhängig ist, so ergiebt sich die endgültige Unterordnung des Metrischen unter das Projective, die Identität jener Massbestimmung mit der der allgemeinen hypereuklidischen Geometrie im Raume constanter Krümmung (was schon bei Beltrami, aber nur implicit, enthalten ist), und somit eine neue anschauliche Versinnlichung der vom Parallelenaxiom unabhängigen Raumbegriffe.

Stil und *Darstellungsweise* Cayley's entsprechen völlig dieser Schaffensart; ersterer ist schlicht und sachlich, giebt ohne viel Reflexionen die Resultate und die Rechnungen wieder und ist in den Bezeichnungen oft plastisch; letztere bringt gewöhnlich zunächst einen rechnerisch ausgeführten speciellen Fall, dann ein allgemein ausgesprochenes Resultat, zuletzt dessen Verification. Für das letztere Stück gilt dann wohl die der ganzen Darstellungsweise von Salmon zugelegte Bezeichnung „synthetisch", im Gegensatz zu einer organisch

*) G. Brandes in „Menschen und Werke", Essay über F. Nietzsche, p. 199.

verallgemeinernden Darlegung. Jedenfalls sind die Arbeiten so niedergeschrieben, wie sie entstanden sind, mit weniger Rücksicht auf das Wie, als auf das Was; jede Anregung wird ihm, bei seiner abstrahirenden Kraft und den ihm immer flüssigen Hülfsmitteln der Analysis, sogleich zur That, entweder in besonderer Publication, oder doch in vertrauensvoller brieflicher Mittheilung an den Urheber der Anregung; und auch die Mittheilungen eines ausgedehnten vielseitigen wissenschaftlichen Verkehrs sind wohl im wichtigeren Theil in spätere eigene Arbeiten oder in die Veröffentlichungen Anderer übergegangen. Wir verdanken der Harmonie zwischen Denken und Thun, auf welcher die ganze Persönlichkeit Cayley's ruht, auch den glücklichen Umstand, dass die volle mathematische Gedankenarbeit dieses universalen Geistes uns aufgeschlossen vorliegt.

Erlangen, Juni 1895.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo."

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil' oder ‚Theilmenge' einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit' zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl' nennen.

‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

(3) $$\overline{\overline{M}}.$$

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins' wird, so ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.

Zwei Mengen M und N nennen wir ‚äquivalent' und bezeichnen dies mit

(4) $$M \sim N \quad \textit{oder} \quad N \sim M,$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

Jedem Theil M_1 von M entspricht alsdann ein bestimmter äquivalenter Theil N_1 von N und umgekehrt.

Hat man ein solches Zuordnungsgesetz zweier äquivalenten Mengen, so lässt sich dasselbe (abgesehen von dem Falle, dass jede von ihnen aus nur einem Elemente besteht) mannigfach modificiren. Namentlich kann stets die Vorsorge getroffen werden, dass einem besonderen Elemente m_0 von M irgend ein besonderes Element n_0 von N entspricht. Denn entsprechen bei dem anfänglichen Gesetze die Elemente m_0 und n_0 noch nicht einander, vielmehr dem Elemente m_0 von M das Element n_1 von N, dem Elemente n_0 von N das Element m_1 von M, so nehme man das modificirte Gesetz, wonach m_0 und n_0 und ebenso m_1 und n_1 entsprechende Elemente beider Mengen werden, an den übrigen Elementen jedoch das erste Gesetz erhalten bleibt. Hierdurch ist jener Zweck erreicht.

Jede Menge ist sich selbst äquivalent:

(5) $$M \sim M.$$

Sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch unter einander äquivalent:

(6) $$\textit{aus} \quad M \sim P \quad \textit{und} \quad N \sim P \quad \textit{folgt} \quad M \sim N.$$

Von fundamentaler Bedeutung ist es, *dass zwei Mengen M und N dann und nur dann dieselbe Cardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind:*

(7) $$\textit{aus} \quad M \sim N \quad \textit{folgt} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}},$$

und

(8) $$\textit{aus} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \quad \textit{folgt} \quad M \sim N.$$

Die Aequivalenz von Mengen bildet also das nothwendige und untrügliche Criterium für die Gleichheit ihrer Cardinalzahlen.

In der That bleibt nach der obigen Definition der Mächtigkeit die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ungeändert, wenn an Stelle eines Elementes oder auch an Stelle mehrerer, selbst aller Elemente m von M je ein anderes Ding substituirt wird.

Ist nun $M \sim N$, so liegt ein Zuordnungsgesetz zu Grunde, durch welches M und N gegenseitig eindeutig auf einander bezogen sind; dabei entspreche dem Elemente m von M das Element n von N. Wir können uns alsdann an Stelle jedes Elementes m von M das entsprechende Element n von N substituirt denken, und es verwandelt sich dabei M in N ohne Aenderung der Cardinalzahl; es ist folglich

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Die Umkehrung des Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass zwischen den Elementen von M und den verschiedenen Einsen ihrer Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss besteht. Denn es wächst gewissermassen, wie wir sahen, $\overline{\overline{M}}$ so aus M heraus, dass dabei aus jedem Elemente m von M eine besondere Eins von $\overline{\overline{M}}$ wird. Wir können daher sagen, dass

$$M \sim \overline{\overline{M}}. \tag{9}$$

Ebenso ist $N \sim \overline{\overline{N}}$. Ist also $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, so folgt nach (6) $M \sim N$.

Wir heben noch den aus dem Begriff der Aequivalenz unmittelbar folgenden Satz hervor:

Sind $M, N, P, \ldots$ *Mengen, die keine gemeinsamen Elemente haben,* $M', N', P', \ldots$ *ebensolche jenen entsprechende Mengen, und ist*

$$M \sim M', \; N \sim N', \; P \sim P', \ldots,$$

so ist auch immer

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.

Das ‚Grösser' und ‚Kleiner' bei Mächtigkeiten.

Sind bei zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ und $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ die *zwei* Bedingungen erfüllt:

1) *es giebt keinen Theil von* M, *der mit* N *äquivalent ist,*

2) *es giebt einen Theil* N_1 *von* N, *so dass* $N_1 \sim M$,

so ist zunächst ersichtlich, dass dieselben erfüllt bleiben, wenn in ihnen M und N durch zwei denselben äquivalente Mengen M' und N' ersetzt werden; *sie drücken daher eine bestimmte Beziehung der Cardinalzahlen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zu einander aus.*

Ferner *ist die Aequivalenz von M und N, also die Gleichheit von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ausgeschlossen;* denn wäre $M \sim N$, so hätte man, weil $N_1 \sim M$, auch $N_1 \sim N$ und es müsste wegen $M \sim N$ auch ein Theil M_1 von M existiren, so dass $M_1 \sim M$, also auch $M_1 \sim N$ wäre, was der Bedingung 1) widerspricht.

Drittens *ist die Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *eine solche, dass sie dieselbe Beziehung von* $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *unmöglich macht;* denn wenn in 1) und 2) die Rollen von M und N vertauscht werden, so entstehen daraus zwei Bedingungen, die jenen contradictorisch entgegengesetzt sind.

Wir drücken die durch 1) *und* 2) *charakterisirte Beziehung von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *so aus, dass wir sagen:* $\mathfrak{a}$ *ist kleiner als* $\mathfrak{b}$ *oder auch* $\mathfrak{b}$ *ist grösser als* $\mathfrak{a}$, in Zeichen:

$$(1) \qquad \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}.$$

Man beweist leicht, dass

$$(2) \qquad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \text{dann immer} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

Ebenso folgt ohne Weiteres aus jener Definition, dass, *wenn* P_1 *Theil einer Menge* P *ist, aus* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}_1$ *immer auch* $\mathfrak{a} < \overline{\overline{P}}$ *und aus* $\overline{\overline{P}} < \mathfrak{b}$ *immer auch* $\overline{\overline{P}}_1 < \mathfrak{b}$ *sich ergiebt.*

Wir haben gesehen, dass von den drei Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

jede einzelne die beiden anderen ausschliesst.

Dagegen versteht es sich keineswegs von selbst und dürfte an dieser Stelle unseres Gedankenganges kaum zu beweisen sein, dass bei irgend zwei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *eine von jenen drei Beziehungen nothwendig realisirt sein müsse.*

Erst später, wenn wir einen Ueberblick über die aufsteigende Folge der transfiniten Cardinalzahlen und eine Einsicht in ihren Zusammenhang gewonnen haben werden, wird sich die Wahrheit des Satzes ergeben:

A. „*Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige Cardinalzahlen, so ist entweder* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$."

Auf's Einfachste lassen sich aus diesem Satze die folgenden ableiten, von denen wir aber vorläufig keinerlei Gebrauch machen dürfen:

B. „*Sind zwei Mengen M und N so beschaffen, dass M mit einem Theil N_1 von N und N mit einem Theil M_1 von M äquivalent ist, so sind auch M und N äquivalent.*"

C. „*Ist M_1 ein Theil einer Menge M, M_2 ein Theil der Menge M_1, und sind die Mengen M und M_2 äquivalent, so ist auch M_1 den Mengen M und M_2 äquivalent.*"

D. „*Ist bei zwei Mengen M und N die Bedingung erfüllt, dass N weder mit M selbst, noch mit einem Theile von M äquivalent ist, so giebt es einen Theil N_1 von N, der mit M äquivalent ist.*"

E. „*Sind zwei Mengen M und N nicht äquivalent, und giebt es einen Theil N_1 von N, der mit M äquivalent ist, so ist kein Theil von M mit N äquivalent.*"

§ 3.

Die Addition und Multiplication von Mächtigkeiten.

Die Vereinigung zweier Mengen M und N, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, wurde in § 1, (2) mit (M, N) bezeichnet. Wir nennen sie die *„Vereinigungsmenge von M und N“*.

Sind M', N' zwei andere Mengen ohne gemeinschaftliche Elemente, und ist $M \sim M'$, $N \sim N'$, so sahen wir, dass auch

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Daraus folgt, dass die Cardinalzahl von (M, N) nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt.

Dies führt zur Definition der Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, indem wir setzen:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M, N)}}. \tag{1}$$

Da im Mächtigkeitsbegriff von der Ordnung der Elemente abstrahirt ist, so folgt ohne Weiteres

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{2}$$

und für je drei Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}. \tag{3}$$

Wir kommen zur Multiplication.

Jedes Element m einer Menge M lässt sich mit jedem Elemente n einer andern Menge N zu einem neuen Elemente (m, n) verbinden; für die Menge aller dieser Verbindungen (m, n) setzen wir die Bezeichnung $(M . N)$ fest. Wir nennen sie die *„Verbindungsmenge von M und N“*. Es ist also

$$(M . N) = \{(m, n)\}. \tag{4}$$

Man überzeugt sich, dass auch die Mächtigkeit von $(M . N)$ nur von den Mächtigkeiten $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ abhängt; denn ersetzt man die Mengen M und N durch die ihnen äquivalenten Mengen

$$M' = \{m'\} \quad \text{und} \quad N' = \{n'\}$$

und betrachtet man m, m' sowie n, n' als zugeordnete Elemente, so wird die Menge

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

dadurch in ein gegenseitig eindeutiges Zuordnungsverhältniss zu $(M . N)$ gebracht, dass man (m, n) und (m', n') als einander entsprechende Elemente ansieht; es ist also

$$(M' . N') \sim (M . N). \tag{5}$$

Wir definiren nun das Product $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \overline{\overline{(M . N)}}. \tag{6}$$

Eine Menge mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ lässt sich aus zwei Mengen M und N mit den Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch nach folgender Regel herstellen: man gehe von der Menge N aus und ersetze in ihr jedes Element n durch eine Menge $M_n \sim M$; fasst man die Elemente aller dieser Mengen M_n zu einem Ganzen S zusammen, so sieht man leicht, dass

$$S \sim (M . N), \tag{7}$$

folglich

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{a} . \mathfrak{b} .$$

Denn wird bei irgend einem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze der beiden äquivalenten Mengen M und M_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n mit m_n bezeichnet, so hat man:

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

und es lassen sich daher die Mengen S und $(M . N)$ dadurch gegenseitig eindeutig auf einander beziehen, dass m_n und (m, n) als entsprechende Elemente angesehen werden.

Aus unseren Definitionen folgen leicht die Sätze:

$$\mathfrak{a} . \mathfrak{b} = \mathfrak{b} . \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} . (\mathfrak{b} . \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b}) . \mathfrak{c}, \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

weil

$$(M . N) \sim (N . M),$$

$$\big(M . (N . P)\big) \sim \big((M . N) . P\big),$$

$$\big(M . (N, P)\big) \sim \big((M . N), (M . P)\big).$$

Addition und Multiplication von Mächtigkeiten unterliegen also allgemein dem commutativen, associativen und distributiven Gesetze.

§ 4.

Die Potenzirung von Mächtigkeiten.

Unter einer ‚*Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M*' oder einfacher ausgedrückt, unter einer ‚*Belegung von N mit M*' verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermassen eine eindeutige Function von n und kann etwa mit $f(n)$ bezeichnet werden; sie heisse ‚*Belegungsfunction* von n'; die entsprechende Belegung von N werde $f(N)$ genannt.

Zwei Belegungen $f_1(N)$ und $f_2(N)$ heissen dann und nur dann gleich, wenn *für alle Elemente* n *von* N die Gleichung erfüllt ist:

$$(1) \qquad f_1(n) = f_2(n),$$

so dass, wenn auch nur für ein einziges besonderes Element $n = n_0$ diese Gleichung nicht besteht, $f_1(N)$ und $f_2(N)$ als verschiedene Belegungen von N charakterisirt sind.

Beispielsweise kann, wenn m_0 ein besonderes Element von M ist, festgesetzt sein, dass für alle n

$$f(n) = m_0$$

sei; dieses Gesetz constituirt eine besondere Belegung von N mit M.

Eine andere Art von Belegungen ergiebt sich, wenn m_0 und m_1 zwei verschiedene besondere Elemente von M sind, n_0 ein besonderes Element von N ist, durch die Festsetzung:

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

für alle n, die von n_0 verschieden sind.

Die Gesammtheit aller verschiedenen Belegungen von N mit M bildet eine bestimmte Menge mit den Elementen $f(N)$; wir nennen sie die ‚*Belegungsmenge von* N *mit* M' und bezeichnen sie durch $(N \mid M)$. Es ist also:

$$(2) \qquad (N \mid M) = \{f(N)\}.$$

Ist $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so findet man leicht, dass auch

$$(3) \qquad (N \mid M) \sim (N' \mid M').$$

Die Cardinalzahl von $(N \mid M)$ hängt also nur von den Cardinalzahlen $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ und $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$ ab; sie dient uns zur Definition der Potenz $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$(4) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}.$$

Für drei beliebige Mengen M, N und P beweist man leicht die Sätze:

$$(5) \qquad \big((N \mid M) . (P \mid M)\big) \sim \big((N, P) \mid M\big),$$

$$(6) \qquad \big((P \mid M) . (P \mid N)\big) \sim \big(P \mid (M . N)\big),$$

$$(7) \qquad \big(P \mid (N \mid M)\big) \sim \big((P . N) \mid M\big),$$

aus denen, wenn $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$ gesetzt wird, auf Grund von (4) und im Hinblick auf § 3, die für drei beliebige Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gültigen Sätze sich ergeben:

$$(8) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} . \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}},$$

$$(9) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} . \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} . \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}},$$

$$(10) \qquad (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} . \mathfrak{c}}.$$

Wie inhaltreich und weittragend diese einfachen auf die Mächtigkeiten ausgedehnten Formeln sind, erkennt man an folgendem Beispiel:

Bezeichnen wir die Mächtigkeit des Linearcontinuums X (d. h. des Inbegriffs X aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind) mit $\mathfrak{o}$, so überzeugt man sich leicht, dass sie sich unter anderm durch die Formel

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \tag{11}$$

darstellen lässt, wo über die Bedeutung von $\aleph_0$ der § 6 Aufschluss giebt.

In der That ist $2^{\aleph_0}$ nach (4) nichts anderes als die Mächtigkeit aller Darstellungen

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \qquad \big(\text{wo } f(\nu) = 0 \text{ oder } 1\big) \tag{12}$$

der Zahlen x im Zweiersystem. Beachten wir hierbei, dass jede Zahl x nur einmal zur Darstellung kommt, mit Ausnahme der Zahlen $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, die zweimal dargestellt werden, so haben wir, wenn wir die „abzählbare" Gesammtheit der letzteren mit $\{s_\nu\}$ bezeichnen, zunächst

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{s_\nu\}, X)}}.$$

Hebt man aus X irgend eine „abzählbare" Menge $\{t_\nu\}$ heraus und bezeichnet den Rest mit X_1, so ist

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \quad \{t_\nu\}, \quad X_1),$$
$$\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \quad X_1 \sim X_1,$$

mithin

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

also (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}.$$

Aus (11) folgt durch Quadriren (nach § 6, (6))

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

und hieraus durch fortgesetzte Multiplication mit $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

wo ν irgend eine endliche Cardinalzahl ist.

Erhebt man beide Seiten von (11) zur Potenz $\aleph_0$, so erhält man

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Da aber nach § 6, (8) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, so ist

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Die Formeln (13) und (14) haben aber keine andere Bedeutung als diese: „Das ν-dimensionale sowohl, wie das $\aleph_0$-dimensionale Continuum haben die Mächtigkeit des eindimensionalen Continuums." Es wird also *der ganze Inhalt* der Arbeit im 84[ten] Bande des Crelle'schen Journals, pag. 242 *mit diesen wenigen Strichen* aus den *Grundformeln des Rechnens mit Mächtigkeiten* rein algebraisch abgeleitet.

§ 5.

Die endlichen Cardinalzahlen.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie die dargelegten Principien, auf welchen später die Lehre von den actual unendlichen oder transfiniten Cardinalzahlen aufgebaut werden soll, auch die natürlichste, kürzeste und strengste Begründung der endlichen Zahlenlehre liefern.

Einem einzelnen Ding e_0, wenn wir es unter den Begriff einer Menge $E_0 = (e_0)$ subsumiren, entspricht als Cardinalzahl das, was wir ‚Eins' nennen und mit 1 bezeichnen; wir haben:

$$(1) \qquad 1 = \overline{\overline{E}}_0 .$$

Man vereinige nun mit E_0 ein anderes Ding e_1, die Vereinigungsmenge heisse E_1, so dass

$$(2) \qquad E_1 = (E_0 , e_1) = (e_0 , e_1) .$$

Die Cardinalzahl von E_1 heisst ‚Zwei' und wird mit 2 bezeichnet

$$(3) \qquad 2 = \overline{\overline{E}}_1 .$$

Durch Hinzufügung neuer Elemente erhalten wir die Reihe der Mengen

$$E_2 = (E_1 , e_2), \quad E_3 = (E_2 , e_3), \ldots,$$

welche in unbegrenzter Folge uns successive die übrigen, mit 3, 4, 5, . . . bezeichneten, sogenannten *endlichen Cardinalzahlen* liefern. Die hierbei vorkommende hülfsweise Verwendung derselben Zahlen als Indices rechtfertigt sich daraus, dass eine Zahl erst dann in dieser Bedeutung gebraucht wird, nachdem sie als Cardinalzahl definirt worden ist. Wir haben, wenn unter $\nu - 1$ die der Zahl ν in jener Reihe nächstvorangehende verstanden wird,

$$(4) \qquad \nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} ,$$

$$(5) \qquad E_\nu = (E_{\nu-1} , e_\nu) = (e_0 , e_1 , \ldots e_\nu) .$$

Aus der Summendefinition in § 3 folgt:

$$(6) \qquad \overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1 ,$$

d. h. jede endliche Cardinalzahl (ausser 1) ist die Summe aus der nächst vorhergehenden und 1.

Bei unserm Gedankengange treten nun folgende drei Sätze in den Vordergrund:

A. „*Die Glieder der unbegrenzten Reihe endlicher Cardinalzahlen*

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

sind alle unter einander verschieden (d. h. die in § 1 aufgestellte Aequivalenzbedingung ist an den entsprechenden Mengen nicht erfüllt)".

B. „*Jede dieser Zahlen ν ist grösser, als die ihr vorangehenden und kleiner, als die auf sie folgenden* (§ 2)."

C. „*Es giebt keine Cardinalzahlen, welche ihrer Grösse nach zwischen zwei benachbarten ν und $\nu + 1$ lägen* (§ 2)."

Die Beweise dieser Sätze stützen wir auf die zwei folgenden D und E, welche daher zunächst zu erhärten sind.

D. „*Ist M eine Menge von solcher Beschaffenheit, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit hat, so hat auch die Menge (M, e), welche aus M durch Hinzufügung eines einzigen neuen Elementes e hervorgeht, dieselbe Beschaffenheit, mit keiner von ihren Theilmengen gleiche Mächtigkeit zu haben.*"

E. „*Ist N eine Menge mit der endlichen Cardinalzahl ν, N_1 irgend eine Theilmenge von N, so ist die Cardinalzahl von N_1 gleich einer der vorangehenden Zahlen* $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$."

Beweis von D. Nehmen wir an, es hätte die Menge (M, e) mit einer ihrer Theilmengen, wir wollen sie N nennen, gleiche Mächtigkeit, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, die beide auf einen Widerspruch führen:

1) Die Menge N enthält e als Element; es sei $N = (M_1, e)$; dann ist M_1 ein Theil von M, weil N ein Theil von (M, e) ist. Wie wir in § 1 sahen, lässt sich das Zuordnungsgesetz der beiden äquivalenten Mengen (M, e) und (M_1, e) so modificiren, dass das Element e der einen demselben Element e der andern entspricht; alsdann sind von selbst auch M und M_1 gegenseitig eindeutig auf einander bezogen. Dies streitet aber gegen die Voraussetzung, dass M mit seinem Theile M_1 nicht gleiche Mächtigkeit hat.

2) Die Theilmenge N von (M, e) enthält e nicht als Element, so ist N entweder M oder ein Theil von M. Bei dem zu Grunde liegenden Zuordnungsgesetze zwischen (M, e) und N möge das Element e der ersteren dem Elemente f der letzteren entsprechen. Sei $N = (M_1, f)$; dann wird gleichzeitig die Menge M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu M_1 gesetzt sein; M_1 ist aber als Theil von N jedenfalls auch ein Theil von M. Es wäre auch hier M einem seiner Theile äquivalent, gegen die Voraussetzung.

Beweis von E. Es werde die Richtigkeit des Satzes bis zu einem gewissen ν vorausgesetzt und dann auf die Gültigkeit für das nächstfolgende $\nu + 1$ wie folgt geschlossen.

Als Menge mit der Cardinalzahl $\nu + 1$ werde $E_\nu = (e_0, e_1, \ldots e_\nu)$ zu Grunde gelegt; ist der Satz für diese richtig, so folgt ohne Weiteres (§ 1) auch seine Gültigkeit für jede andere Menge mit derselben Cardinalzahl $\nu + 1$. Sei E' irgend ein Theil von E_ν; wir unterscheiden folgende Fälle:

1) E' enthält e_ν nicht als Element, dann ist E entweder $E_{\nu-1}$

oder ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also zur Cardinalzahl entweder ν oder eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$, weil wir ja unsern Satz als richtig für die Menge $E_{\nu-1}$ mit der Cardinalzahl ν voraussetzen.

2) E' besteht aus dem einzigen Element e_ν, dann ist $\overline{\overline{E'}} = 1$.

3) E' besteht aus e_ν und einer Menge E'', so dass $E' = (E'', e_\nu)$ E'' ist ein Theil von $E_{\nu-1}$, hat also vorausgesetztermassen zur Cardinalzahl eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.

Nun ist aber $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E''}} + 1$, daher hat E' zur Cardinalzahl eine der Zahlen $2, 3, \ldots \nu$.

Beweis von A. Jede der von uns mit E_ν bezeichneten Mengen hat die Beschaffenheit, mit keiner ihrer Theilmengen äquivalent zu sein. Denn nimmt man an, dass dies für ein gewisses ν richtig sei, so folgt aus dem Satze D dasselbe für das nächstfolgende $\nu + 1$.

Für $\nu = 1$ erkennt man aber unmittelbar, dass die Menge $E_1 = (e_0, e_1)$ keiner ihrer Theilmengen, die hier (e_0) und (e_1) sind, äquivalent ist.

Betrachten wir nun irgend zwei Zahlen μ und ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und ist μ die frühere, ν die spätere, so ist $E_{\mu-1}$ eine Theilmenge von $E_{\nu-1}$; es sind daher $E_{\mu-1}$ und $E_{\nu-1}$ nicht äquivalent; die zugehörigen Cardinalzahlen $\mu = \overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ und $\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1}$ sind somit nicht gleich.

Beweis von B. Ist von den beiden endlichen Cardinalzahlen μ und ν die erste die frühere, die zweite die spätere, so ist $\mu < \nu$. Denn betrachten wir die beiden Mengen $M = E_{\mu-1}$ und $N = E_{\nu-1}$, so ist an ihnen jede der beiden Bedingungen in § 2 für $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ erfüllt. Die Bedingung 1) ist erfüllt, weil nach Satz E eine Theilmenge von $M = E_{\mu-1}$ nur eine von den Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \mu - 1$ haben, also der Menge $N = E_{\nu-1}$ nach Satz A nicht äquivalent sein kann. Die Bedingung 2) ist erfüllt, weil hier M selbst ein Theil von N ist.

Beweis von C. Sei $\mathfrak{a}$ eine Cardinalzahl, die kleiner ist als $\nu + 1$. Wegen der Bedingung 2) des § 2 giebt es eine Theilmenge von E_ν mit der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$. Nach Satz E kommt einer Theilmenge von E_ν nur eine der Cardinalzahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$ zu.

Es ist also $\mathfrak{a}$ gleich einer von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \nu$.

Nach Satz B ist keine von diesen grösser als ν.

Folglich giebt es keine Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, die kleiner als $\nu + 1$ und grösser als ν wäre. —

Von Bedeutung für das Spätere ist folgender Satz:

F. „*Ist K irgend eine Menge von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen, so giebt es unter ihnen eine* $\varkappa_1$, *die kleiner als die übrigen, also die kleinste von allen ist.*“

Beweis. Die Menge K enthält entweder die Zahl 1, dann ist diese die kleinste, $\varkappa_1 = 1$; oder nicht. Im letzteren Falle sei J der Inbegriff *aller* derjenigen Cardinalzahlen unsrer Reihe $1, 2, 3, \ldots$, welche kleiner sind, als die in K vorkommenden. Gehört eine Zahl ν zu J, so gehören auch alle Zahlen $< \nu$ zu J. Es muss aber J ein Element ν_1 haben, so dass $\nu_1 + 1$ und folglich auch alle grösseren Zahlen nicht zu J gehören, weil sonst J die Gesammtheit aller endlichen Zahlen umfassen würde, während doch die zu K gehörigen Zahlen nicht in J enthalten sind. J ist also nichts anderes als der Abschnitt $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. Die Zahl $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ ist nothwendig ein Element von K und kleiner als die übrigen.

Aus F schliesst man auf:

G. „*Jede Menge $K = \{\varkappa\}$ von verschiedenen endlichen Cardinalzahlen lässt sich in die Reihenform*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

bringen, so dass

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots \text{“}$$

§ 6.

Die kleinste transfinite Cardinalzahl Alef-null.

Die Mengen mit endlicher Cardinalzahl heissen ‚*endliche Mengen*‘, alle anderen wollen wir ‚*transfinite Mengen*‘ und die ihnen zukommenden Cardinalzahlen ‚*transfinite Cardinalzahlen*‘ nennen.

Die Gesammtheit *aller endlichen Cardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§ 1) ‚*Alef-null*‘, in Zeichen $\aleph_0$, definiren also

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}. \tag{1}$$

Dass $\aleph_0$ eine *transfinite* Zahl, d. h. *keiner endlichen* Zahl μ *gleich* ist, folgt aus der einfachen Thatsache, dass, wenn zu der Menge $\{\nu\}$ ein neues Element e_0 hinzugefügt wird, die Vereinigungsmenge $(\{\nu\}, e_0)$ der ursprünglichen $\{\nu\}$ äquivalent ist. Denn es lässt sich zwischen beiden die gegenseitig eindeutige Beziehung denken, wonach dem Elemente e_0 der ersten das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu + 1$ der andern entspricht. Nach § 3 haben wir daher:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2}$$

In § 5 wurde aber gezeigt, dass $\mu + 1$ stets von μ verschieden ist, daher ist $\aleph_0$ keiner endlichen Zahl μ gleich.

Die Zahl $\aleph_0$ ist grösser als jede endliche Zahl μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

2?

Dies folgt im Hinblick auf § 3 daraus, dass $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \ldots \mu)}}$, kein Theil der Menge $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ äquivalent der Menge $\{\nu\}$ und dass $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ selbst ein Theil von $\{\nu\}$ ist.

Andrerseits ist $\aleph_0$ *die kleinste transfinite Cardinalzahl.*

Ist $\mathfrak{a}$ irgend eine von $\aleph_0$ verschiedene transfinite Cardinalzahl, so ist immer

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Dies beruht auf folgenden Sätzen:

A. „*Jede transfinite Menge T hat Theilmengen mit der Cardinalzahl $\aleph_0$*".

Beweis. Hat man nach irgend einer Regel eine endliche Zahl von Elementen $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$ aus T entfernt, so bleibt stets die Möglichkeit, ein ferneres Element t_ν herauszunehmen. Die Menge $\{t_\nu\}$, worin ν eine beliebige endliche Cardinalzahl bedeutet, ist eine Theilmenge von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, weil $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. „*Ist S eine transfinite Menge mit der Cardinalzahl $\aleph_0$, S_1 irgend eine transfinite Theilmenge von S, so ist auch $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.*"

Beweis. Vorausgesetzt ist, dass $S \sim \{\nu\}$; bezeichnen wir, unter Zugrundelegung eines Zuordnungsgesetzes zwischen diesen beiden Mengen, mit s_ν dasjenige Element von S, welches dem Elemente ν von $\{\nu\}$ entspricht, so ist

$$S = \{s_\nu\}.$$

Die Theilmenge S_1 von S besteht aus gewissen Elementen $s_\varkappa$ von S und die Gesammtheit aller Zahlen $\varkappa$ bildet einen transfiniten Theil K der Menge $\{\nu\}$. Nach Satz G, § 5 lässt sich die Menge K in die Reihenform bringen

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

wo

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

folglich ist auch

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Daraus folgt, dass $S_1 \sim S$, mithin $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$. —

Aus A und B ergiebt sich die Formel (4) im Hinblick auf § 2.

Aus (2) schliesst man durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

und indem man diese Betrachtung wiederholt,

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Wir haben aber auch

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Denn nach (1) § 3 ist $\aleph_0 + \aleph_0$ die Cardinalzahl $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, weil

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Nun hat man offenbar

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

also

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

Die Gleichung (6) kann auch so geschrieben werden:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$$

und, indem man zu beiden Seiten wiederholt $\aleph_0$ addirt, findet man, dass

(7) $$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Wir haben aber auch

(8) $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Beweis. Nach (6) des § 3 ist $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ die der Verbindungsmenge

$$\{(\mu, \nu)\}$$

zukommende Cardinalzahl, wo μ und ν unabhängig von einander zwei beliebige endliche Cardinalzahlen sind. Ist auch λ Repräsentant einer beliebigen endlichen Cardinalzahl (so dass $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ und $\{\nu\}$ nur verschiedene Bezeichnungen für dieselbe Gesammtheit aller endlichen Cardinalzahlen sind), so haben wir zu zeigen, dass

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Bezeichnen wir $\mu + \nu$ mit ϱ, so nimmt ϱ die sämmtlichen Zahlenwerthe $2, 3, 4, \ldots$ an, und es giebt im Ganzen $\varrho - 1$ Elemente (μ, ν), für welche $\mu + \nu = \varrho$, nämlich diese:

$$(1, \varrho - 1), (2, \varrho - 2), \ldots (\varrho - 1, 1).$$

In dieser Reihenfolge denke man sich zuerst das eine Element (1, 1) gesetzt, für welches $\varrho = 2$, dann die beiden Elemente, für welche $\varrho = 3$, dann die drei Elemente, für welche $\varrho = 4$ u. s. w., so erhält man sämmtliche Elemente (μ, ν) in einfacher Reihenform:

$$(1, 1);\ (1, 2), (2, 1);\ (1, 3), (2, 2), (3, 1);\ (1, 4), (2, 3), \ldots,$$

und zwar kommt hier, wie man leicht sieht, das Element (μ, ν) an die λ^{te} Stelle, wo

(9) $$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}.$$

λ nimmt jeden Zahlwerth $1, 2, 3, \ldots$ einmal an; es besteht also vermöge (9) eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\lambda\}$ und $\{(\mu, \nu)\}$. —

Werden die beiden Seiten der Gleichung (8) mit $\aleph_0$ multiplicirt, so erhält man $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$ und durch wiederholte Multiplication mit $\aleph_0$ die für jede endliche Cardinalzahl ν gültige Gleichung:

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0. \tag{10}$$

Die Sätze E und A des § 5 führen zu dem Satze über *endliche* Mengen:

C. „*Jede endliche Menge E ist so beschaffen, dass sie mit keiner von ihren Theilmengen äquivalent ist.*“

Diesem Satz steht scharf der folgende für *transfinite* Mengen gegenüber:

D. „*Jede transfinite Menge T ist so beschaffen, dass sie Theilmengen T_1 hat, die ihr äquivalent sind.*“

Beweis. Nach Satz A dieses Paragraphen giebt es eine Theilmenge $S = \{t_\nu\}$ von T mit der Cardinalzahl $\aleph_0$. Sei $T = (S, U)$, so dass U aus denjenigen Elementen von T zusammengesetzt ist, welche von den Elementen t_ν verschieden sind. Setzen wir $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, so ist T_1 eine Theilmenge von T und zwar die durch Fortlassung des einzigen Elementes t_1 aus T hervorgehende. Da $S \sim S_1$ (Satz B dieses Paragraphen) und $U \sim U$, so ist auch (§ 1) $T \sim T_1$.

In diesen Sätzen C und D tritt die wesentliche Verschiedenheit von endlichen und transfiniten Mengen am Deutlichsten zu Tage, auf welche bereits im Jahre 1877 im 84sten Bande des Crelle'schen Journals pag. 242 hingewiesen wurde.

Nachdem wir die kleinste transfinite Cardinalzahl $\aleph_0$ eingeführt und ihre nächstliegenden Eigenschaften abgeleitet haben, entsteht die Frage nach den höheren Cardinalzahlen und ihrem Hervorgang aus $\aleph_0$.

Es soll gezeigt werden, dass die transfiniten Cardinalzahlen sich nach ihrer Grösse ordnen lassen und in dieser Ordnung, wie die endlichen, jedoch in einem erweiterten Sinne, eine ‚*wohlgeordnete Menge*‘ bilden.

Aus $\aleph_0$ geht nach einem bestimmten Gesetze die *nächstgrössere* Cardinalzahl $\aleph_1$, aus dieser nach demselben Gesetze die *nächstgrössere* $\aleph_2$ hervor und so geht es weiter.

Aber auch die unbegrenzte Folge der Cardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

erschöpft nicht den Begriff der transfiniten Cardinalzahl. Es wird die Existenz einer Cardinalzahl nachgewiesen werden, die wir mit $\aleph_\omega$ bezeichnen und welche sich als die zu *allen* $\aleph_\nu$ *nächstgrössere* ausweist; aus ihr geht in derselben Weise wie $\aleph_1$ aus $\aleph_0$ eine nächstgrössere $\aleph_{\omega+1}$ hervor und so geht es ohne Ende fort.

Zu *jeder transfiniten Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ giebt es eine nach einheitlichem Gesetz aus ihr hervorgehende *nächstgrössere;* aber auch zu jeder unbegrenzt aufsteigenden wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{a}\}$ von transfiniten Cardinalzahlen $\mathfrak{a}$ giebt es eine *nächstgrössere*, einheitlich daraus hervorgehende.

Zur strengen Begründung dieses im Jahre 1882 gefundenen und in dem Schriftchen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883", sowie im XXI. Bande der Math. Annalen ausgesprochenen Sachverhaltes bedienen wir uns der sogenannten ‚*Ordnungstypen*', deren Theorie wir zunächst in den folgenden Paragraphen auseinander zu setzen haben. —

§ 7.

Die Ordnungstypen einfach geordneter Mengen.

Eine Menge M nennen wir ‚*einfach geordnet*', wenn unter ihren Elementen m eine bestimmte ‚*Rangordnung*' herrscht, in welcher von je zwei beliebigen Elementen m_1 und m_2 das eine den ‚*niedrigeren*', das andere den ‚*höheren*' Rang einnimmt und zwar so, dass wenn von drei Elementen m_1, m_2 und m_3 etwa m_1 dem Range nach niedriger ist als m_2, dieses niedriger als m_3, alsdann auch immer m_1 niedrigeren Rang hat als m_3.

Die Beziehung zweier Elemente m_1 und m_2, bei welcher m_1 den niedrigeren, m_2 den höheren Rang in der gegebenen Rangordnung hat, soll durch die Formeln ausgedrückt werden

$$(1) \qquad m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1.$$

So ist beispielsweise jede in einer unendlichen Geraden definirte Punktmenge P eine einfach geordnete Menge, wenn von zwei zu ihr gehörigen Punkten p_1 und p_2 demjenigen der niedrigere Rang zugewiesen wird, dessen Coordinate (unter Zugrundelegung eines Nullpunktes und einer positiven Richtung) die kleinere ist. —

Es leuchtet ein, dass eine und dieselbe Menge nach den verschiedensten Gesetzen ‚einfach geordnet' werden kann. Nehmen wir zum Beispiel die Menge R aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (wo p und q theilerfremd seien), die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, so hat man einmal ihre ‚natürliche' Rangordnung der Grösse nach. Dann lassen sie sich aber auch etwa so ordnen (und in dieser Ordnung wollen wir die Menge mit R_0 bezeichnen), dass von zwei Zahlen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$, bei denen die Summen $p_1 + q_1$ und $p_2 + q_2$ verschiedene Werthe haben, diejenige Zahl den niedrigeren Rang erhält, für welche die betreffende Summe die kleinere ist, und dass wenn $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, alsdann die kleinere der beiden rationalen Zahlen die niedrigere sei.

In dieser Rangordnung hat unsere Menge, da zu einem und demselben Werth von $p+q$ immer nur eine endliche Anzahl von verschiedenen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ gehört, offenbar die Form

$$R_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_\nu, \cdots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \cdots\right),$$

wo

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}. \text{ —}$$

Stets also, wenn wir von einer *einfach geordneten* Menge M sprechen, denken wir uns eine *bestimmte Rangordnung* ihrer Elemente in dem erklärten Sinne zu Grunde gelegt. —

Es giebt zweifach, dreifach, ν-fach, α-fach geordnete Mengen, von diesen sehen wir aber vorläufig in unserer Untersuchung ab. Daher sei es uns auch erlaubt, im Folgenden den kürzeren Ausdruck ‚geordnete Menge' zu gebrauchen, während wir die ‚einfach geordnete Menge' im Sinne haben. —

Jeder geordneten Menge M kommt ein bestimmter ‚*Ordnungstypus*' oder kürzer ein bestimmter ‚*Typus*' zu, den wir mit

(2) $$\overline{M}$$

bezeichnen wollen; hierunter verstehen wir *den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergiebt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahiren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten.*

Darnach ist der Ordnungstypus $\overline{M}$ *selbst eine geordnete Menge,* deren Elemente *lauter Einsen* sind, die dieselbe Rangordnung unter einander haben, wie die entsprechenden Elemente von M, aus denen sie durch Abstraction hervorgegangen sind.

Zwei geordnete Mengen M und N nennen wir ‚*ähnlich*', wenn sie sich gegenseitig eindeutig einander so zuordnen lassen, dass wenn m_1 und m_2 irgend zwei Elemente von M, n_1 und n_2 die entsprechenden Elemente von N sind, alsdann immer die Rangbeziehung von m_1 *zu* m_2 innerhalb M dieselbe ist, wie die von n_1 zu n_2 innerhalb N. Eine solche Zuordnung ähnlicher Mengen nennen wir eine ‚Abbildung' derselben auf einander. Dabei entspricht jeder Theilmenge M_1 von M (die offenbar auch als geordnete Menge erscheint) eine ihr ähnliche Theilmenge N_1 von N.

Die Aehnlichkeit zweier geordneten Mengen M und N drücken wir durch die Formel aus:

(3) $$M \simeq N.$$

Jede geordnete Menge ist sich selbst ähnlich.

Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass *zwei geordnete Mengen dann und nur dann denselben Ordnungstypus haben, wenn sie ähnlich sind, so dass von den beiden Formeln*

(4) $$\overline{M} = \overline{N}, \quad M \simeq N$$

immer die eine eine Folge der andern ist.

Abstrahirt man an einem Ordnungstypus $\overline{M}$ auch noch von der Rangordnung der Elemente, so erhält man (§ 1) die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ der geordneten Menge M, welche zugleich Cardinalzahl des Ordnungstypus $\overline{M}$ ist.

Aus $\overline{M} = \overline{N}$ folgt immer $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, d. h. geordnete Mengen von gleichem Typus haben immer dieselbe Mächtigkeit oder Cardinalzahl; die Aehnlichkeit geordneter Mengen begründet stets ihre Aequivalenz. Hingegen können zwei geordnete Mengen äquivalent sein, ohne ähnlich zu sein.

Wir werden zur Bezeichnung der Ordnungstypen die kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets gebrauchen.

Ist α ein Ordnungstypus, so verstehen wir unter

(5) $$\overline{\alpha}$$

die zugehörige Cardinalzahl.

Die Ordnungstypen endlicher einfach geordneter Mengen bieten kein besonderes Interesse. Denn man überzeugt sich leicht, dass für eine und dieselbe endliche Cardinalzahl ν alle einfach geordneten Mengen einander ähnlich sind, also einen und denselben Typus haben. Die endlichen einfachen Ordnungstypen sind daher denselben Gesetzen unterworfen wie die endlichen Cardinalzahlen, und es wird erlaubt sein, für sie dieselben Zeichen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ zu gebrauchen, wenn sie auch begrifflich von den Cardinalzahlen verschieden sind.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungstypen;* denn zu einer und derselben transfiniten Cardinalzahl giebt es unzählig viele verschiedene Typen einfach geordneter Mengen, die in ihrer Gesammtheit eine besondere ‚*Typenclasse*' constituiren.

Jede dieser Typenclassen ist also bestimmt durch die transfinite Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche allen einzelnen zur Classe gehörigen Typen gemeinsam ist; wir nennen sie daher kurz Typenclasse $[\mathfrak{a}]$.

Diejenige von ihnen, welche sich uns naturgemäss zuerst darbietet, und deren vollständige Erforschung daher auch das nächste besondere Ziel der transfiniten Mengenlehre sein muss, ist die Typenclasse $[\aleph_0]$, welche alle Typen mit der kleinsten transfiniten Cardinalzahl $\aleph_0$ umfasst.

Wir haben zu unterscheiden von der Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche die Typenclasse $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt*, diejenige Cardinalzahl $\mathfrak{a}'$, welche *ihrerseits*

durch die Typenclasse $[\mathfrak{a}]$ *bestimmt ist;* es ist die Cardinalzahl, welche (§ 1) der Typenclasse $[\mathfrak{a}]$ zukommt, sofern sie eine *wohldefinirte Menge* darstellt, *deren Elemente die sämmtlichen Typen* α *mit der Cardinalzahl* $\mathfrak{a}$ *sind.* Wir werden sehen, dass $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ verschieden und zwar immer grösser als $\mathfrak{a}$ ist. —

Werden in einer geordneten Menge M alle Rangbeziehungen ihrer Elemente umgekehrt, so dass überall aus dem ‚niedriger' ein ‚höher' und aus dem ‚höher' ein ‚niedriger' wird, so erhält man wieder eine geordnete Menge, die wir mit

$$*M \tag{6}$$

bezeichnen und die *‚inverse'* von M nennen wollen.

Den Ordnungstypus von $*M$ bezeichnen wir, wenn $\alpha = \overline{M}$ ist, mit

$$*\alpha. \tag{7}$$

Es kann vorkommen, dass $*\alpha = \alpha$, wie z. B. bei den endlichen Typen oder bei dem Typus der Menge R aller rationalen Zahlen, die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, den wir unter der Bezeichnung η untersuchen werden.

Wir bemerken ferner, dass zwei ähnliche geordnete Mengen entweder auf eine einzige Weise oder auf mehrere Weisen auf einander abgebildet werden können; im ersten Falle ist der betreffende Typus sich selbst nur auf eine Weise ähnlich, im andern auf mehrere Weisen.

So sind nicht nur alle endlichen Typen, sondern die Typen der transfiniten ‚wohlgeordneten Mengen', welche uns später beschäftigen werden und die wir transfinite Ordnungszahlen nennen, von der Art, nur eine einzige Abbildung auf sich selbst zuzulassen. Dagegen ist jener Typus η sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Wir wollen diesen Unterschied an zwei einfachen Beispielen verdeutlichen.

Unter ω verstehen wir den Typus einer wohlgeordneten Menge

$$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots),$$

in welcher

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

und wo ν Repräsentant aller endlichen Cardinalzahlen ist.

Eine andere wohlgeordnete Menge

$$(f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)$$

mit der Bedingung

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

vom nämlichen Typus ω kann offenbar auf jene nur so ‚abgebildet' werden, dass e_ν und f_ν entsprechende Elemente sind. Denn das dem Range nach niedrigste Element e_1 der ersten muss bei der Abbildung dem niedrigsten Element f_1 der zweiten, das dem Range nach auf e_1 nächstfolgende e_2 dem auf f_1 nächstfolgenden f_2 u. s. w. zugeordnet werden.

Jede andere gegenseitig eindeutige Zuordnung der beiden äquivalenten Mengen $\{e_\nu\}$ und $\{f_\nu\}$ ist keine ‚Abbildung‘ in dem Sinne, wie wir ihn oben für die Typentheorie fixirt haben.

Nehmen wir dagegen eine geordnete Menge von der Form

$$\{e_{\nu'}\},$$

wo ν' Repräsentant aller positiven und negativen endlichen ganzen Zahlen mit Einschluss der 0 ist und wo ebenfalls

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Diese Menge hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element. Ihr Typus ist nach der Summendefinition, die im § 8 gegeben werden wird, dieser:

$$^*\omega + \omega.$$

Er ist sich selbst auf unzählig viele Weisen ähnlich.

Denn betrachten wir eine Menge von demselben Typus

$$\{f_{\nu'}\},$$

wo

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

so können die beiden geordneten Mengen so aufeinander abgebildet werden, dass, unter ν_0' eine bestimmte der Zahlen ν' verstanden, dem Elemente $e_{\nu'}$ der ersten das Element $f_{\nu_0'+\nu'}$ der zweiten entspricht. Bei der Willkürlichkeit von ν_0' haben wir also hier unendlich viele Abbildungen.

Der hier entwickelte Begriff des „Ordnungstypus“ umfasst, wenn er in gleicher Weise auf „mehrfach geordnete Mengen“ übertragen wird, neben dem in § 1 eingeführten Begriff der „Cardinalzahl oder Mächtigkeit“, alles „Anzahlmässige“, das überhaupt denkbar ist und lässt in diesem Sinne keine weitere Verallgemeinerung zu. Er enthält nichts Willkürliches, sondern ist die naturgemässe Erweiterung des Anzahlbegriffs. *Es verdient besonders betont zu werden, dass das Gleichheitskriterium* (4) *mit absoluter Nothwendigkeit aus dem Begriffe des Ordnungstypus folgt und daher keinerlei Abänderung zulässt.* In dem Verkennen dieses Sachverhaltes ist die Hauptursache der schweren Irrthümer zu erblicken, welche sich in dem Werke des Herrn G. Veronese „Grundzüge der Geometrie“ finden (Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894).

Auf pag. 30 wird dort die „Anzahl oder Zahl einer geordneten Gruppe“ ganz in Uebereinstimmung mit dem, was wir „Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge“ genannt haben, erklärt. (Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890, pag. 68–75, Abdruck aus der Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, vom Jahre 1887).

Dem Kriterium der Gleichheit vermeint aber Herr V. einen Zusatz geben zu müssen. Er sagt pag. 31: „Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen *und von denen die eine nicht ein Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist*, sind gleich."*)

Diese Definition der Gleichheit enthält einen *Cirkel* und wird daher zu einem *Nonsens.*

Was heisst denn in seinem Zusatz „*einem Theil der andern nicht gleich*"?

Um diese Frage zu beantworten, muss man vor allem wissen, wann zwei Zahlen gleich oder nicht gleich sind. *Es setzt also seine Definition der Gleichheit* (abgesehen von ihrer Willkürlichkeit) *eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt, bei welcher man von neuem wissen muss, was gleich und ungleich ist, u. s. w., u. s. w., in infinitum.*

Nachdem Herr V. auf solche Weise das unentbehrliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen so zu sagen *freiwillig preisgegeben* hat, darf man sich über die Regellosigkeit nicht wundern, in welcher er des Weiteren mit seinen pseudotransfiniten Zahlen operirt und den letzteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie, in der von ihm fingirten Form, selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Auch wird hiermit die auffallende Aehnlichkeit verständlich, welche seinen Zahlbildungen mit den höchst absurden „unendlichen Zahlen" Fontenelle's in dessen „Géometrie de L'Infini, Paris 1727" anhaftet.

Kürzlich hat auch Herr W. Killing in dem „Index lectionum" der Akademie in Münster (für 1895—96) seinen Bedenken gegen die Grundlage des Veronese'schen Buches dankenswerthen Ausdruck gegeben.

§ 8.

Addition und Multiplication von Ordnungstypen.

Die Vereinigungsmenge (M, N) zweier Mengen M und N lässt sich, wenn die letzteren geordnet sind, selbst als eine geordnete Menge auffassen, in welcher die Rangbeziehungen der Elemente von M unter einander, ebenso die Rangbeziehungen der Elemente von N unter einander dieselben wie in M resp. N geblieben sind, dagegen alle Elemente von M niedrigeren Rang als alle Elemente von N haben. Sind M' und N' zwei andere geordnete Mengen, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$,

*) In der italienischen Originalausgabe (pag. 27) lautet diese Stelle wörtlich: „Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell' altro, sono uguali."

so ist auch $(M, N) \overset{\bullet}{\simeq} (M', N')$; der Ordnungstypus von (M, N) hängt also nur von den Ordnungstypen $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$ ab; wir definiren also:

(1) $$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}.$$

In der Summe $\alpha + \beta$ heisst α der *„Augendus“*, β der *„Addendus“*.

Für drei beliebige Typen beweist man leicht das associative Gesetz

(2) $$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Dagegen ist das commutative Gesetz bei der Addition von Typen im Allgemeinen nicht gültig. Wir sehen dies bereits am folgenden einfachen Beispiel.

Ist ω der im § 7 bereits erwähnte Typus der wohlgeordneten Menge

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

so ist $1 + \omega$ nicht gleich $\omega + 1$.

Denn ist f ein neues Element, so hat man nach (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$

$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Die Menge

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots)$$

ist aber der Menge E ähnlich, folglich

$$1 + \omega = \omega.$$

Dagegen sind die Mengen E und (E, f) nicht ähnlich, weil erstere kein dem Range nach höchstes Glied, letztere aber das höchste Glied f hat. $\omega + 1$ ist also von $\omega = 1 + \omega$ verschieden.

Aus zwei geordneten Mengen M und N mit den Typen α und β lässt sich eine geordnete Menge S dadurch herstellen, dass in N an Stelle jedes Elementes n eine geordnete Menge M_n substituirt wird, welche denselben Typus α wie M hat, also

(3) $$\overline{M}_n = \alpha,$$

und dass über die Rangordnung in

(4) $$S = \{M_n\}$$

folgende Bestimmungen getroffen werden:

1) je zwei Elemente von S, welche einer und derselben Menge M_n angehören, behalten in S dieselbe Rangbeziehung wie in M_n,

2) je zwei Elemente von S, welche zwei verschiedenen Mengen M_{n_1} und M_{n_2} angehören, erhalten in S die Rangbeziehung, welche n_1 und n_2 in N haben.

Der Ordnungstypus von S hängt, wie leicht zu sehen, nur von den Typen α und β ab; wir definiren:

(5) $$\alpha \cdot \beta = \overline{S}.$$

In diesem Producte heisst α der *‚Multiplicandus'* und β der *‚Multiplicator'*.

Unter Zugrundelegung irgend einer *Abbildung* von M auf M_n sei m_n das dem Elemente m von M entsprechende Element von M_n.

Wir können dann auch schreiben

(6) $$S = \{m_n\}.$$

Nehmen wir eine dritte geordnete Menge $P = \{p\}$ mit dem Ordnungstypus $\overline{P} = \gamma$ hinzu, so ist nach (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}}, \quad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}},$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Die beiden geordneten Mengen $\{(m_n)_p\}$ und $\{m_{(n_p)}\}$ sind aber ähnlich und werden auf einander abgebildet, indem man ihre Elemente $(m_n)_p$ und $m_{(n_p)}$ als entsprechende ansieht.

Es besteht folglich für drei Typen α, β und γ das *associative Gesetz*

(7) $$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

Aus (1) und (5) folgt auch leicht das *distributive Gesetz*

(8) $$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

jedoch nur in dieser Form, wo *der zweigliedrige Factor die Rolle des Multiplicators* hat.

Dagegen hat bei Typen das *commutative Gesetz* ebensowenig bei der Multiplication wie bei der Addition allgemeine Geltung.

Beispielsweise sind $2 . \omega$ und $\omega . 2$ verschiedene Typen; denn nach (5) ist

$$2 . \omega = \overline{(e_1, f_1;\ e_2, f_2;\ \ldots;\ e_\nu, f_\nu;\ \ldots)} = \omega;$$

dagegen ist

$$\omega \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots;\ f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

offenbar von ω verschieden.

Vergleicht man die in § 3 gegebenen Definitionen der Elementaroperationen für Cardinalzahlen mit den hier aufgestellten für Ordnungstypen, so erkennt man leicht, dass die Cardinalzahl der Summe zweier Typen gleich ist der Summe der Cardinalzahlen der einzelnen Typen und dass die Cardinalzahl des Products zweier Typen gleich ist dem Product der Cardinalzahlen der einzelnen Typen.

Jede aus den beiden Elementaroperationen hervorgehende Gleichung zwischen Ordnungstypen bleibt also auch richtig, wenn man darin sämmtliche Typen durch ihre Cardinalzahlen ersetzt.

§ 9.

Der Ordnungstypus η der Menge R aller rationalen Zahlen, die grösser als 0 und kleiner als 1 sind, in ihrer natürlichen Rangordnung.

Unter R verstehen wir, wie in § 7, das System aller rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (p und q als theilerfremd gedacht) die > 0 und < 1, *in ihrer natürlichen Rangordnung*, wo die Grösse der Zahl ihren Rang bestimmt. Den Ordnungstypus von R bezeichnen wir mit η:

$$\eta = \overline{R}. \tag{1}$$

Wir haben aber dort dieselbe Menge auch in eine andere Rangordnung gesetzt, in welcher wir sie R_0 nennen, wobei in erster Linie die Grösse von $p+q$, in zweiter Linie, nämlich bei rationalen Zahlen, für welche $p+q$ denselben Werth hat, die Grösse von $\frac{p}{q}$ selbst den Rang bestimmt. R_0 hat die Form einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots), \quad \text{wo} \quad r_\nu \prec r_{\nu+1}, \tag{2}$$

$$\overline{R}_0 = \omega. \tag{3}$$

R und R_0 haben, weil sie sich nur in der Rangordnung der Elemente unterscheiden, dieselbe Cardinalzahl, und da offenbar $\overline{\overline{R}}_0 = \aleph_0$, so ist auch

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0. \tag{4}$$

Der Typus η gehört also in die Typenclasse $[\aleph_0]$.

Wir bemerken zweitens, dass in R weder ein dem Range nach niedrigstes, noch ein dem Range nach höchstes Element vorkommt.

Drittens hat R die Eigenschaft, dass *zwischen* je zweien seiner Elemente dem Range nach andere liegen; diese Beschaffenheit drücken wir mit den Worten aus: *R ist ‚überalldicht'*.

Es soll nun gezeigt werden, dass diese drei Merkmale den Typus η von R kennzeichnen, so dass folgender Satz besteht:

„Hat man eine einfach geordnete Menge M, welche die drei Bedingungen erfüllt:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$.

2) M hat kein dem Range nach niedrigstes und kein höchstes Element.

3) M ist überalldicht,

so ist der Ordnungstypus von M gleich η:

$$\overline{M} = \eta.\text{“}$$

Beweis. Wegen der Bedingung 1) lässt sich M in die Form

einer wohlgeordneten Menge vom Typus ω bringen; in einer solchen Form zu Grunde gelegt, bezeichnen wir M mit M_0 und setzen

(5) $$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots).$$

Wir haben nun zu zeigen, dass

(6) $$M \simeq R.$$

D. h. es muss bewiesen werden, dass sich M auf R *abbilden* lässt, so dass das Rangverhältniss je zweier Elemente in M dasselbe ist, wie das Rangverhältniss der beiden entsprechenden Elemente in R.

Das Element r_1 in R möge dem Elemente m_1 in M zugeordnet werden.

r_2 hat eine bestimmte Rangbeziehung zu r_1 in R; wegen der Bedingung 2) giebt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche zu m_1 dieselbe Rangbeziehung in M haben, wie r_2 zu r_1 in R; *von ihnen* wählen wir dasjenige, welches in M_0 den kleinsten Index hat, es sei m_{ι_2} und ordnen es dem r_2 zu.

r_3 hat in R bestimmte Rangbeziehungen zu r_1 und r_2; wegen der Bedingungen 2) und 3) giebt es unzählig viele Elemente m_ν von M, welche in M zu m_1 und m_{ι_2} dieselben Rangbeziehungen haben, wie r_3 zu r_1 und r_2 in R; wir wählen dasjenige von ihnen, es sei m_{ι_3}, welches in M_0 den kleinsten Index hat, dieses ordnen wir dem r_3 zu.

Nach diesem Gesetze denken wir uns das Zuordnungsverfahren fortgesetzt; sind den ν Elementen

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

von R bestimmte Elemente

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

von M als Bilder zugewiesen, welche in M dieselben Rangbeziehungen unter einander haben wie die entsprechenden in R, so werde dem Elemente $r_{\nu+1}$ von R das in M_0 mit dem kleinsten Index versehene Element $m_{\iota_{\nu+1}}$ von M als Bild zugewiesen, welches zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

dieselben Rangbeziehungen in M hat, wie $r_{\nu+1}$ zu $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ in R.

Wir haben auf diese Weise *allen* Elementen r_ν von R bestimmte Elemente m_{ι_ν} von M als Bilder zugewiesen und die Elemente m_{ι_ν} haben in M dieselbe Rangordnung wie die entsprechenden Elemente r_ν in R.

Es muss aber noch gezeigt werden, dass die Elemente m_{ι_ν} *alle Elemente* m_ν *von* M umfassen oder, was dasselbe ist, dass die Reihe

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

nur eine *Permutation* der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

ist.

Dies beweisen wir durch eine *vollständige Induction*, indem wir zeigen, dass *wenn* die Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bei der Abbildung zur Geltung kommen, *dasselbe auch bei dem folgenden Elemente* $m_{\nu+1}$ *der Fall ist.*

Sei λ so gross, dass unter den Elementen

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

die Elemente

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu,$$

(welche vorausgesetztermassen zur Abbildung gelangen) vorkommen. Es kann sein, dass sich auch $m_{\nu+1}$ darunter vorfindet; dann kommt $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung.

Findet sich aber $m_{\nu+1}$ *nicht unter den Elementen*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda},$$

so hat $m_{\nu+1}$ zu diesen Elementen innerhalb M eine bestimmte Rangstellung; dieselbe Rangstellung zu $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ in R haben unzählig viele Elemente von R, unter ihnen sei das in R_0 mit dem kleinsten Index versehene $r_{\lambda+\sigma}$.

Dann hat $m_{\nu+1}$, wie man sich leicht überzeugt, auch zu

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

dieselbe Rangstellung in M, wie $r_{\lambda+\sigma}$ zu

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}$$

in R. Da $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ bereits zur Abbildung gelangt sind, so ist $m_{\nu+1}$ das mit dem kleinsten Index in M_0 versehene Element, welches diese Rangstellung zu

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

hat. Folglich ist nach unserm Zuordnungsgesetze

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Es kommt also auch in diesem Falle das Element $m_{\nu+1}$ bei der Abbildung zur Geltung und zwar ist $r_{\lambda+\sigma}$ das ihm zugeordnete Element von R.

So sehen wir, dass durch unsern Zuordnungsmodus *die ganze Menge* M auf *die ganze Menge* R abgebildet wird; M und R sind ähnliche Mengen, w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich beispielsweise die folgenden:

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller negativen und positiven rationalen Zahlen, mit Einschluss der Null, in ihrer natürlichen Rangordnung."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Zahlen, welche grösser als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung."

„η ist der Ordnungstypus der Menge aller reellen algebraischen Zahlen, welche grösser als a und kleiner als b sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, wo a und b irgend zwei reelle Zahlen sind, $a < b$."

Denn alle diese geordneten Mengen erfüllen die drei in unserm Satze für M geforderten Bedingungen (M. v. Crelle's Journal Bd. 77, pag. 258).

Betrachten wir ferner nach den in § 8 gegebenen Definitionen Mengen mit den Typen $\eta + \eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$ so finden sich auch bei ihnen jene drei Bedingungen erfüllt. Wir haben somit die Sätze:

(7) $$\eta + \eta = \eta,$$

(8) $$\eta\eta = \eta,$$

(9) $$(1+\eta)\eta = \eta,$$

(10) $$(\eta+1)\eta = \eta,$$

(11) $$(1+\eta+1)\eta = \eta.$$

Die wiederholte Anwendung von (7) und (8) giebt für jede endliche Zahl ν:

(12) $$\eta \cdot \nu = \eta,$$

(13) $$\eta^\nu = \eta.$$

Dagegen sind, wie man leicht sieht, für $\nu > 1$, die Typen $1 + \eta$, $\eta + 1$, $\nu \cdot \eta$, $1 + \eta + 1$ sowohl unter sich, wie auch von η verschieden. Andrerseits ist

(14) $$\eta + 1 + \eta = \eta,$$

dagegen $\eta + \nu + \eta$ für $\nu > 1$ von η verschieden.

Endlich verdient hervorgehoben zu werden, dass

(15) $${}^*\eta = \eta.$$

§ 10.

Die in einer transfiniten geordneten Menge enthaltenen Fundamentalreihen.

Legen wir irgend eine einfach geordnete transfinite Menge M zu Grunde. Jede Theilmenge von M ist selbst eine geordnete Menge. Für das Studium des Typus $\overline{M}$ scheinen diejenigen Theilmengen von M, denen die Typen ω und $^*\omega$ zukommen, besonders werthvoll zu sein; wir nennen sie *‚in M enthaltene Fundamentalreihen erster Ordnung‘* und zwar die ersteren (vom Typus ω) *‚steigende‘*, die anderen (vom Typus $^*\omega$) *‚fallende‘*.

Da wir uns auf die Betrachtung von Fundamentalreihen *erster Ordnung* beschränken (in späteren Untersuchungen werden auch solche *höherer Ordnung* zur Geltung kommen), so wollen wir sie hier einfach *‚Fundamentalreihen‘* nennen.

Eine ‚steigende Fundamentalreihe‘ hat also die Form

$$\{a_\nu\}, \quad \text{wo} \quad a_\nu \prec a_{\nu+1}, \tag{1}$$

eine ‚fallende Fundamentalreihe‘ ist von der Form

$$\{b_\nu\}, \quad \text{wo} \quad b_\nu \succ b_{\nu+1}. \tag{2}$$

ν hat überall in unseren Betrachtungen (sowie auch $\varkappa$, λ, μ) die Bedeutung einer beliebigen endlichen Cardinalzahl oder auch eines endlichen Typus resp. einer endlichen Ordnungszahl.

Zwei in M enthaltene steigende Fundamentalreihen $\{a_\nu\}$ und $\{a'_\nu\}$ nennen wir, *‚zusammengehörig‘*, in Zeichen

$$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\}, \tag{3}$$

wenn sowohl zu jedem Elemente a_ν Elemente a'_λ existiren, so dass

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

wie auch zu jedem Elemente a'_ν Elemente a_μ vorhanden sind, so dass

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Zwei in M enthaltene fallende Fundamentalreihen $\{b_\nu\}$ und $\{b'_\nu\}$ heissen *‚zusammengehörig‘*, in Zeichen

$$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\}, \tag{4}$$

wenn zu jedem Elemente b_ν Elemente b'_λ vorhanden sind, so dass

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

und zu jedem Elemente b'_ν Elemente b_μ existiren, so dass

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Eine steigende Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ und eine fallende $\{b_\nu\}$ nennen wir dann *‚zusammengehörig‘*, in Zeichen

$$(5) \qquad \{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\},$$

wenn 1) für alle ν und μ

$$a_\nu \prec b_\mu$$

und 2) in M *höchstens ein* Element m_0 (also entweder nur eines oder gar kein solches) existirt, so dass für alle ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Es bestehen dann die Sätze:

A. „*Sind zwei Fundamentalreihen zusammengehörig mit einer dritten, so sind sie auch unter einander zusammengehörig.*"

B. „*Zwei gleichgerichtete Fundamentalreihen, von denen die eine Theilmenge der andern ist, sind stets zusammengehörig.*"

Existirt in M ein Element m_0, welches zu der steigenden Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ eine solche Stellung hat, dass

1) für jedes ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) für jedes Element m von M das $\prec m_0$, eine gewisse Zahl ν_0 existirt, so dass

$$a_\nu \succ m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0,$$

so wollen wir m_0 ‚*Grenzelement von* $\{a_\nu\}$ *in* M' und zugleich ein ‚*Hauptelement von* M' nennen.

Ebenso nennen wir auch m_0 ein ‚*Hauptelement von* M' und zugleich ‚*Grenzelement von* $\{b_\nu\}$ *in* M', wenn die Bedingungen erfüllt sind:

1) für jedes ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) für jedes Element m von M, das $\succ m_0$, existirt eine gewisse Zahl ν_0, so dass

$$b_\nu \prec m, \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Eine Fundamentalreihe kann *nie mehr als ein* Grenzelement in M haben; M aber hat im Allgemeinen viele Hauptelemente.

Man überzeugt sich von der Wahrheit folgender Sätze:

C. „*Hat eine Fundamentalreihe ein Grenzelement in M, so haben alle mit ihr zusammengehörigen Fundamentalreihen dasselbe Grenzelement in M.*"

D. „*Haben zwei Fundamentalreihen (gleichgerichtete oder verschiedengerichtete) ein und dasselbe Grenzelement in M, so sind sie zusammengehörig.*"

Sind M und M' zwei ähnliche geordnete Mengen, so dass

$$(6) \qquad \overline{M} = \overline{M'},$$

und legt man *irgend eine Abbildung* der beiden Mengen zu Grunde, so gelten, wie man leicht sieht, folgende Sätze:

E. „*Jeder Fundamentalreihe in M entspricht als Bild eine Fundamentalreihe in M' und umgekehrt; jeder steigenden eine steigende, jeder fallenden eine fallende; zusammengehörigen Fundamentalreihen in M entsprechen als Bilder zusammengehörige Fundamentalreihen in M' und umgekehrt.*“

F. „*Gehört zu einer Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so gehört auch zu der entsprechenden Fundamentalreihe in M' ein Grenzelement in M' und umgekehrt; und diese beiden Grenzelemente sind Bilder von einander bei der Abbildung.*“

G. „*Den Hauptelementen von M entsprechen als Bilder Hauptelemente von M' und umgekehrt.*“

Besteht eine Menge M aus lauter Hauptelementen, so dass jedes ihrer Elemente ein Hauptelement ist, so nennen wir sie eine ‚*insichdichte Menge.*‘

Giebt es zu jeder Fundamentalreihe in M ein Grenzelement in M, so nennen wir M eine ‚*abgeschlossene Menge*‘.

Eine Menge, die sowohl ‚insichdicht‘, wie auch ‚abgeschlossen‘ ist, heisse eine ‚*perfecte Menge*‘.

Hat eine Menge eins von diesen drei Prädicaten, so kommt dasselbe Prädicat auch jeder ähnlichen Menge zu; es lassen sich dieselben Prädicate daher auch den entsprechenden Ordnungstypen zuschreiben, und es giebt somit ‚*insichdichte Typen*‘, ‚*abgeschlossene Typen*‘, ‚*perfecte Typen*‘, desgleichen auch ‚*überalldichte Typen*‘ (§ 9).

So ist z. B. η ein ‚insichdichter‘ Typus; wie in § 9 gezeigt, ist er auch ‚überalldicht‘, aber nicht ‚abgeschlossen‘.

ω und $^*\omega$ haben keine Hauptelemente (Haupteinsen); dagegen haben $\omega + \nu$ und $\nu + {}^*\omega$ je ein Hauptelement und sind ‚abgeschlossene‘ Typen.

Der Typus $\omega \cdot 3$ hat zwei Hauptelemente, ist aber nicht ‚abgeschlossen‘; der Typus $\omega \cdot 3 + \nu$ hat drei Hauptelemente und ist ‚abgeschlossen‘.

§ 11.

Der Ordnungstypus θ des Linearcontinuums X.

Wir wenden uns zur Untersuchung des Ordnungstypus der Menge $X = \{x\}$ aller reellen Zahlen x, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, in ihrer natürlichen Rangordnung, so dass bei zwei beliebigen Elementen x und x' derselben

(1) $$x \prec x', \text{ falls } x < x'.$$

Die Bezeichnung dieses Typus sei

(1) $$\overline{\overline{X}} = \theta.$$

Aus den Elementen der rationalen und irrationalen Zahlenlehre weiss man, dass jede Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ in X ein Grenzelement x_0 in X hat, und dass auch umgekehrt jedes Element x von X Grenzelement von zusammengehörigen Fundamentalreihen in X ist. Somit ist X eine *‚perfecte Menge'*, θ ein *‚perfecter Typus'*.

Damit ist θ aber noch nicht ausreichend charakterisirt, wir haben vielmehr noch folgende Eigenschaft von X ins Auge zu fassen:

X *enthält* die in § 9 untersuchte Menge R vom Ordnungstypus η als Theilmenge und zwar *im Besondern so, dass zwischen je zwei beliebigen Elementen* x_0 und x_1 von X Elemente von R dem Range nach liegen.

Es soll nun gezeigt werden, dass *diese Merkmale zusammengenommen* in erschöpfender Weise den Ordnungstypus θ des Linearcontinuums X kennzeichnen, so dass der Satz gilt:

„Hat eine geordnete Menge M ein solches Gepräge, dass sie 1) ‚perfect' ist, 2) in ihr eine Menge S mit der Cardinalzahl $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$ enthalten ist, welche zu M in der Beziehung steht, dass zwischen je zwei beliebigen Elementen m_0 und m_1 von M Elemente von S dem Range nach liegen, so ist $\overline{M} = \theta$."

Beweis. Sollte S ein niedrigstes oder ein höchstes Element haben, so würden sie wegen 2) auch denselben Charakter als Elemente von M tragen; wir könnten sie alsdann von S entfernen, ohne dass diese Menge dadurch die in 2) ausgedrückte Beziehung zu M verliert.

Wir setzen daher S von vornherein ohne niedrigstes und höchstes Element voraus; S hat alsdann nach § 9 den Ordnungstypus η.

Denn da S ein Theil von M ist, so müssen nach 2) zwischen je zwei beliebigen Elementen s_0 und s_1 von S dem Range nach andere Elemente von S liegen. Ausserdem haben wir nach 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Die beiden Mengen S und R sind daher einander *‚ähnlich'*,

$$S \simeq R. \tag{2}$$

Wir denken uns irgend eine *‚Abbildung'* von R auf S zu Grunde gelegt und behaupten, dass dieselbe zugleich eine bestimmte *‚Abbildung'* von X auf M ergiebt, und zwar in folgender Weise:

Alle Elemente von X, die gleichzeitig der Menge R angehören, mögen als Bilder denjenigen Elementen von M entsprechen, welche zugleich Elemente von S sind und bei der vorausgesetzten Abbildung von R auf S jenen Elementen von R entsprechen.

Ist aber x_0 ein nicht zu R gehöriges Element von X, so lässt sich dasselbe als Grenzelement einer in X enthaltenen Fundamentalreihe $\{x_\nu\}$ ansehen, welche durch eine in R enthaltene mit ihr zusammengehörige Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ ersetzt werden kann. Der

letzteren entspricht als Bild eine Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S und M, welche wegen 1) von einem Elemente m_0 in M begrenzt wird, das nicht zu S gehört. (F, § 10). Dieses Element m_0 in M (welches dasselbe bleibt, wenn an Stelle der Fundamentalreihen $\{x_\nu\}$ und $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ andere von demselben Elemente x_0 in X begrenzte gedacht werden, [E, C, D, § 10]) gelte als Bild von x_0 in X. Umgekehrt gehört zu jedem Elemente m_0 von M, welches nicht in S vorkommt, ein ganz bestimmtes Element x_0 von X, welches nicht zu R gehört und von welchem m_0 das Bild ist.

Auf diese Weise ist zwischen X und M eine gegenseitig eindeutige Beziehung hergestellt, von der zu zeigen ist, dass sie eine ‚Abbildung' dieser Mengen begründet.

Dies steht von vornherein für diejenigen Elemente von X und M fest, welche gleichzeitig den Mengen R resp. S angehören.

Vergleichen wir ein Element r von R mit einem nicht zu R gehörigen Elemente x_0 von X; die zugehörigen Elemente von M seien s und m_0.

Ist $r < x_0$, so giebt es eine steigende Fundamentalreihe $\{r_{\varkappa_\nu}\}$, welche von x_0 begrenzt wird, und es ist von einem gewissen ν_0 an

$$r < r_{\varkappa_\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Das Bild von $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ in M ist eine steigende Fundamentalreihe $\{s_{\lambda_\nu}\}$, welch ein M von m_0 begrenzt wird, und man hat (§ 10) erstens $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ für jedes ν und andrerseits $s \prec s_{\lambda_\nu}$, für $\nu \geqq \nu_0$, daher (§ 7) $s \prec m_0$.

Ist $r > x_0$, so schliesst man ähnlich, dass $s \succ m_0$.

Betrachten wir endlich zwei nicht zu R gehörige Elemente x_0 und x_0' und die ihnen in M entsprechenden Elemente m_0 und m_0', so zeigt man durch eine analoge Betrachtung, dass wenn $x_0 < x_0'$, alsdann $m_0 \prec m_0'$.

Damit wäre der Beweis der Aehnlichkeit von X und M erbracht, und es ist daher

$$\overline{M} = \theta.$$

Halle, März 1895.

Ueber arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen.

Von

Paul Stäckel in Halle a./S.

1.

Theorem. *Es mögen $x_0, x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ die Punkte einer beliebigen abzählbaren Punktmenge im Gebiete der unbeschränkt veränderlichen complexen Grösse x bezeichnen, während Q irgend eine in dieser Ebene überalldichte Punktmenge bedeuten soll. Dann giebt es stets unendlich viele eindeutige analytische Functionen $f(x)$, die für alle Argumente $x_0, x_1, \ldots$ der Menge P nur Werthe aus der Menge Q annehmen.*

Beweis. Man bilde die ganzen rationalen Functionen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = x - x_0,\\
&\varphi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1),\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\varphi_\nu(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-1}),\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

und betrachte zunächst rein formal den Ausdruck:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \varphi_\nu(x);$$

die Grössen u_ν sind Constanten, über die noch verfügt werden darf.

Alsdann ist:

$$f(x_0) = u_0,$$

daher setze man:

$$u_0 = y_0,$$

wo y_0 ein beliebiger Punkt der Menge Q ist. Ferner hat man:

$$f(x_1) = y_0 + u_1 x_1 (x_1 - x_0).$$

Wird noch die Festsetzung getroffen, dass $x_0 = 0$ ist, falls der Punkt $x = 0$ der Menge P angehören sollte, so darf man:

$$u_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1(x_1 - x_0)}$$

setzen, wo y_1 abermals ein beliebiger Punkt der Menge Q ist. Ebenso ergiebt sich:

$$f(x_2) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x_2(x_2 - x_0)}{x_1(x_1 - x_0)} + u_2 x_2^3 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

und man kann daher wiederum u_2 so bestimmen, dass

$$f(x_2) = y_2$$

wird, wo y_2 ein beliebiger Punkt der Menge Q ist.

So geht es weiter, und nachdem $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ bestimmt worden sind, hat man für u_ν eine Gleichung der Form:

$$y_\nu = a_\nu + u_\nu . x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1)\cdots(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

in der a_ν eine bekannte rationale Function von $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ und $y_0, y_1, \ldots, y_{\nu-1}$ bedeutet, während y_ν ein beliebiger Punkt der Menge Q ist.

Hieraus geht hervor, dass bei einer solchen Bestimmung der Constanten u_ν der Ausdruck $f(x)$, rein formal betrachtet, die verlangte Eigenschaft besitzt, und es bleibt daher nur übrig zu untersuchen wie die noch willkürlichen Punkte $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, \ldots$ der Menge Q gewählt werden müssen, damit $f(x)$ eine *beständig convergente Potenzreihe von x* wird.

Führt man in dem Gliede:

$$u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}\varphi_\nu(x)$$

die Multiplicationen aus und ordnet nach steigenden Potenzen von x, so beginnt die Entwickelung mit dem Exponenten:

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

und endet mit dem Exponenten:

$$\tfrac{1}{2}\nu(\nu+1) + \nu = \tfrac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2) - 1.$$

Mithin geht $f(x)$ bei Ausführung der Multiplicationen *unmittelbar* in eine Potenzreihe von x über, die sich in der Form schreiben lässt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1} u_\nu c_{\nu,\alpha} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha};$$

hierin bedeutet $c_{\nu,\alpha}$ den Coefficienten von x^α in $\varphi_\nu(x)$.

Gelingt es daher für jeden positiven ganzzahligen Werth von ν die Ungleichheiten:

$$|u_\nu c_{\nu,\alpha}| \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!} \qquad (\alpha=0,1,2,\cdots,\nu-1)$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left|\frac{(y_\nu-a_\nu)\,c_{\nu,\alpha}}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(x_\nu-x_0)\cdots(x_\nu-x_{\nu-1})}\right| \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!}$$

zu befriedigen, so ist damit die beständige Convergenz jener Potenzreihe für $f(x)$ gesichert. Das zu erreichen ist jedoch immer auf unendlich viele Arten möglich, weil *die Punkte der Menge Q die Ebene der complexen Veränderlichen x überalldicht erfüllen sollten;* denn aus diesem Grunde kann y_ν so nahe an a_ν gewählt werden, dass die absoluten Beträge der ν Grössen:

$$(y_\nu-a_\nu)\cdot\frac{c_{\nu,\alpha}\left[\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+\alpha\right]!}{x_\nu^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}(x_\nu-x_0)\cdots(x_\nu-x_{\nu-1})} \qquad (\alpha=0,1,2,\cdots,\nu-1)$$

alle kleiner als *eins* sind.

Mithin stellt der Ausdruck:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}\varphi_\nu(x)$$

eine eindeutige analytische Function von x mit der einen wesentlich singulären Stelle $x=\infty$ dar, die für alle Argumente aus der *abzählbaren* Menge P nur Werthe aus der *überalldichten* Menge Q annimmt; dass nämlich die Constanten u_ν von einem bestimmten Index an sämmtlich verschwinden, das lässt sich augenscheinlich immer durch geeignete Wahl der Punkte y_ν verhüten.

Zusatz. Ein entsprechendes Theorem gilt, wenn die abzählbare Punktmenge P aus lauter *reellen* Punkten besteht, und die Punktmenge Q in der *reellen Axe* überalldicht ist.

2.

Anwendungen. Um von diesem allgemeinen Theoreme Anwendungen zu machen, will ich zunächst annehmen, dass die Menge P der Inbegriff aller *rationalen complexen Zahlen* ist, dass man also:

$$x_\nu = x_\nu' + i x_\nu''$$

hat, wo x_ν' und x_ν'' reelle rationale Zahlen bedeuten. Die Menge Q möge — was ja erlaubt ist — mit der Menge P identisch sein. Dann gilt der Satz:

Es giebt unendlich viele transcendente Functionen der complexen

Veränderlichen x, die für alle rationalen Werthe des Argumentes selbst lauter rationale Werthe annehmen.

Diese Eigenschaft ist also *nicht* charakteristisch für die rationalen Functionen von x mit rationalen Coefficienten. Wohl aber gilt nach Herrn Hilbert*) der Satz:

„Wenn eine *algebraische* Function von x für alle rationalen in einem beliebig kleinen Intervall gelegenen Werthe stets selber rationale Werthe annimmt, so ist sie nothwendig eine rationale Function."

Dass eine analytische Function, die für alle reellen rationalen Werthe des Argumentes selbst reelle rationale Werthe annimmt, nothwendig eine rationale Function sein müsse, hatte ein frühgestorbener, talentvoller Mathematiker, Emil Strauss, im Jahre 1886 zu beweisen versucht, war aber von Herrn Weierstrass, dem er seinen Beweisversuch mitgetheilt hatte, auf die Vergeblichkeit seiner Bemühungen aufmerksam gemacht worden. Herr Weierstrass construirte nämlich eine *transcendente* Function von x, der die verlangte Eigenschaft zukam.

Mit seiner gütigen Erlaubniss darf ich die betreffende Stelle aus seinem Briefe an Strauss vom 19. März 1886 im Folgenden mittheilen.**)

„Es werde gesetzt (für $n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\varphi_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{n+1-\nu}{\nu}\right)^2 x^2\right],$$

$$f_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x);$$

dann sind $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ ganze rationale Functionen von x mit lauter rationalen Zahlencoefficienten; der Grad der ersten ist $2n$, der Grad der andern gleich

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Ferner werde gesetzt:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1, \\ m_2 &= m_1 + 1 \,.\, 2 + 1, \\ m_3 &= m_2 + 2 \,.\, 3 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m_{\nu+1} &= m_\nu + \nu(\nu+1) + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty). \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dann kann man eine unendliche Reihe rationaler Zahlen:

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 110 (1892). S. 129.

**) Eine Abschrift dieses Briefes verdanke ich der Freundlichkeit von Frau Mathilde Speyer geb. Strauss, der ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} f_1(x) + a_2 x^{m_2} f_2(x) + \cdots + a_n x^{m_n} f_n(x) + \cdots$$

eine transcendente ganze Function von x und durch eine beständig convergente Potenzreihe von der Form:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, darstellbar ist.

Zu dem Ende werde irgend eine beständig convergirende Potenzreihe von x:

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

mit lauter *positiven* Coefficienten angenommen, und dann (für jeden bestimmten Werth von n) a_n so gewählt, dass in der nach Potenzen von x entwickelten Function:

$$a_n x^{m_n} f_n(x)$$

der Coefficient eines jeden Gliedes seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als der Coefficient des dieselbe Potenz von x enthaltenden Gliedes der Reihe

$$C_0 + C_1 x + \cdots.$$

Dann ist nicht nur der Ausdruck $f(x)$ für jeden endlichen Werth von x convergent, sondern kann auch in eine beständig convergirende Potenzreihe von der angegebenen Beschaffenheit umgeformt werden. Zugleich erhellt, dass in dieser Reihe die Coefficienten von

$$x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots x^{m_n}, \ldots$$

beziehlich:

$$a_1, a_2, \ldots a_n,$$

sind, und es ist daher, wenn man die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ so annimmt, dass nicht von einer bestimmten Stelle an alle gleich Null sind,

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine *unendliche* Reihe und stellt demgemäss eine *transcendente* ganze Function von x dar.

Dies festgestellt, sei nun x_0 eine beliebige, von Null verschiedene rationale Zahl, so bringe man dieselbe auf die Form:

$$\pm \frac{\lambda}{\mu},$$

wo λ, μ ganze positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sein sollen; dann ist

$$\varphi_{\lambda+\mu-1}(x_0) = 0;$$

es verschwinden demnach für $x = x_0$ sämmtliche Functionen $f_n(x)$, für die

$$n \gtreqless \lambda + \mu - 1$$

ist, und $f(x)$ hat einen *rationalen* Werth. Dasselbe gilt für $x = 0$, und somit ist bewiesen:

Es existiren *transcendente* ganze Functionen einer Veränderlichen von der Beschaffenheit, dass sie für *jeden* rationalen Werth ihres Argumentes einen ebenfalls rationalen Werth haben.

— — — — —.

Ich bemerke noch, dass es auch (auf mannigfaltige Weise) möglich ist, eine *transcendente* ganze Function von x herzustellen, welche lauter rationale Coefficienten und für *jeden algebraischen* Werth von x einen ebenfalls algebraischen Werth hat."

Angeregt durch die letzte Bemerkung von Herrn Weierstrass hat Strauss versucht, eine solche transcendente Function von x herzustellen, und zwar verfuhr er folgendermassen*).

Nach dem Vorgange von Herrn G. Cantor**) ordne man jeder irreduciblen ganzzahligen Function von x:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

als *Höhe* die ganze positive Zahl:

$$h = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

zu. Das Product aller Functionen derselben Höhe h ist eine ganze ganzzahlige durch x theilbare Function von x, die mit $f_n(x)$ bezeichnet werde. Bildet man noch die Producte:

$$g_h(x) = \prod_{\lambda=1}^{h} f_\lambda(x) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

so hat der Ausdruck:

$$G(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{\mu_h} g_h(x);$$

in welchem die μ_h positive ganze Zahlen sein sollen, augenscheinlich die Eigenschaft, dass jedem algebraischen Werthe von x (im Convergenzbereiche) ein algebraischer Werth von $G(x)$ zugehört.

Definirt man nun die Zahlen μ_h durch die Gleichungen:

$$\mu_h = M_1 + M_2 + \cdots + M_h + (h-1)\lambda_1 + (h-2).\lambda_2 + \cdots + 2.\lambda_{h-1} + 1.\lambda_h$$
$$(h = 1, 2, 3, \cdots, \infty),$$

*) Berichte des Freien Deutschen Hochstiftes zu Frankfurt am Main. Neue Folge. Dritter Band. Jahrgang 1890. S. 18—29.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 77 (1873). S. 259.

in denen $M_1, M_2, \ldots, M_h$ den grössten der absoluten Beträge der Coefficienten und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ den Grad beziehungsweise von $g_1, g_2, \ldots, g_h$ bezeichnet, so wird $G(x)$ eine Potenzreihe von x, die den *Einheitskreis* zum wahren Convergenzkreis hat.

Dass $G(x)$ keine *rationale* Function von x darstellt, lässt sich leicht einsehen. Es hat nämlich die höchste Potenz von x in

$$x^{\mu_{h-1}} g_{h-1}(x)$$

den Exponenten $\mu_h - M_h$, die niedrigste Potenz von x in

$$x^{\mu_h} g_h(x)$$

dagegen den Exponenten $\mu_h + 1$, sodass die dazwischen liegenden M_h Potenzen von x den Coefficienten *Null* besitzen. Da nun die Grössen M_h mit wachsendem h jede endliche Grenze überschreiten, so kann keine Recursionsformel endlicher Ordnung zwischen den Coefficienten der Potenzreihe $G(x)$ bestehen, wie es der Fall sein müsste, wenn diese Potenzreihe eine *rationale* Function von x darstellt.

Wenn jedoch Strauss hieraus schliesst, dass er in $G(x)$ eine *transcendente* Function der verlangten Beschaffenheit erhalten hat, so übersieht er dabei die Möglichkeit, dass die Fortsetzung seiner Potenzreihe zwar keine *rationale* Function, wohl aber eine *algebraische* Function von x ergeben könnte. *Sein sonst recht scharfsinniger Beweis kann daher nicht als stichhaltig anerkannt werden.*

Allerdings lässt sich diese Lücke ausfüllen. Zu diesem Zwecke braucht man nämlich nur zu beachten, dass zu jedem *rationalen* Werthe von x (innerhalb des Einheitskreises) ein *rationaler* Werth von $G(x)$ gehört, und sich den vorhin erwähnten Satz von Herrn Hilbert ins Gedächtniss zurückzurufen. Mithin stellt $G(x)$ wirklich eine *transcendente* Function von x dar.

Aber selbst wenn man davon absehen wollte, dass das von Strauss angegebene Beispiel nicht die wünschenswerthe Einfachheit besitzt, so hat es doch folgenden wesentlichen Mangel. Es zeigt nur, dass jedem algebraischen Werthe von x *innerhalb des Einheitskreises* ein algebraischer Werth einer transcendenten Function zugehören kann, und es bleibt somit die Frage offen, ob es auch transcendente Functionen von x giebt, bei denen *jedem* algebraischen Argumente ein algebraischer Functionswerth entspricht.

Dass diese Frage zu bejahen ist, ergiebt sich aus meinem allgemeinen Theoreme, wenn man als Menge P den Inbegriff aller algebraischen Zahlen nimmt und die Menge Q mit P identisch sein lässt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass man auch bei geeigneter Anordnung der algebraischen Zahlen, welche die Menge P bilden, für $f(x)$ eine beständig convergente Potenzreihe mit lauter *rationalen* Coefficienten erhalten kann.

Hat man übrigens eine solche *beständig convergente* Potenzreihe $f(x)$, so kann man auch sofort beliebig viele *beschränkt convergente* Potenzreihen mit derselben Eigenschaft angeben, die ebenfalls *transcendente* Functionen darstellen. Zu diesem Zwecke braucht man nur zu $f(x)$ eine Potenzreihe y hinzuzufügen, die aus irgend einer ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

entspringt.

Man kann sogar noch mehr erreichen. Wenn man annimmt, dass P aus allen *algebraischen* Zahlen und Q aus allen *rationalen* Zahlen besteht, so erhält man den Satz:

Es giebt unendlich viele transcendente Functionen von x, die für alle algebraischen Werthe des Argumentes selbst lauter rationale Werthe annehmen.

Dass es Functionen einer *reellen* Veränderlichen giebt, die für alle reellen algebraischen Werthe der Argumente selbst lauter reelle rationale Werthe annehmen, das hatte mir Herr G. Cantor mündlich mitgetheilt, und ich bin hierdurch angeregt worden, den entsprechenden Satz für Functionen einer *complexen* Veränderlichen zu beweisen.

Zum Schluss finde noch folgende Bemerkung Platz. Nach Herrn Lindemann*) besitzt die Function

$$e^x$$

die Eigenschaft, für alle *algebraischen* Werthe des Argumentes, *den Werth Null ausgenommen*, *transcendente* Werthe anzunehmen. Es giebt aber auch analytische Functionen von x, bei denen *ausnahmslos* jedem algebraischen Werthe des Argumentes ein transcendenter Functionswerth entspricht; denn man braucht dazu nur anzunehmen, dass die Menge P der Inbegriff aller algebraischen Zahlen, die Menge Q dagegen der Inbegriff aller transcendenten complexen Zahlen ist.

Halle a./S., December 1894.

*) Mathematische Annalen Bd. 20 (1882), S. 224.

Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Klein).

Par

M. Émile Picard à Paris.

1. Je voudrais vous présenter quelques remarques sur l'étude des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre. C'est un sujet qui a fait l'objet de bien des recherches, mais il me semble que quelques points n'ont pas été traités avec une rigueur suffisante. Ainsi prenons d'abord une équation différentielle du premier ordre et du premier degré dans le voisinage d'un point singulier que nous pouvons supposer être l'origine. Nous aurons l'équation

$$\frac{dx}{ax + by + \cdots} = \frac{dy}{a'x + b'y + \cdots}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier. La nature des racines de l'équation du second degré en λ

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joue, comme vous savez, un rôle capital dans l'étude du point singulier. En nous bornant au cas genéral c'est á dire sans supposer de relations particulières entre les coefficients, il y a trois cas à distinguer. Si les racines de (1) sont réelles et de même signe, toutes les courbes intégrales se rapprochant suffissament de l'origine passent à l'origine et on a alors ce que M. Poincaré dans ses études classiques sur ce sujet (Journal de Liouville, 1881 et 1882) appelle un *nœud*. Quand les racines de l'équation (1) sont imaginaires, il y a une infinité de courbes intégrales ayant comme point asymptote l'origine, que M. Poincaré appelle alors un *foyer*. Je n'ai aucune remarque à faire sur ces deux cas, mais il reste encore le cas du *col* où l'équation (1) a ses racines réelles et de signes contraires. Il résulte alors immédiatement des anciennes recherches de Briot et Bouquet que l'on peut trouver deux courbes intégrales passant à l'origine, mais on n'a ici

aucune forme de l'intégrale générale dans le voisinage de l'origine, et pour affirmer que les deux courbes intégrales trouvées sont *les seules qui passent à l'origine ou s'en rapprochent indéfiniment*, quelques compléments sont nécessaires. Il est d'abord presque évident que, si une courbe intégrale passe à l'origine avec une tangente déterminée, elle coïncidera avec une des deux courbes que je viens de signaler; c'est un point sur lequel il n'est pas besoin d'insister. Il nous suffira donc de montrer que toute courbe intégrale de l'équation différentielle passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment *a nécessairement une tangente déterminée* au point singulier. A cet effet, remarquons d'abord qu'on peut faire un changement de variables tel que les axes des x et des y soient les deux intégrales dont nous venons de parler. L'équation différentielle aura nécessairement alors la forme

$$\frac{dx}{x(\lambda_1 + \cdots)} = \frac{dy}{y(\lambda_2 + \cdots)}$$

les termes non écrits étant au moins du premier degré en x et y. Il est clair d'abord que, dans la région autour de l'origine où convergent les séries des dénominateurs, une courbe intégrale ne peut rencontrer l'axe des x ou l'axe des y. Si, en effet, une intégrale rencontre l'axe des y au point $(x = 0,\ y_0 \neq 0)$, elle sera tangente en ce point avec l'axe des y et devra par suite coïncider avec lui. Ceci posé, envisageons une courbe intégrale passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment et distincte de Ox et Oy. Nous pouvons supposer que, depuis un certain point P_0, elle est dans l'angle (xOy). Suivons la courbe depuis le point P_0 jusqu' à l'origine; si P désigne le point mobile de la courbe, le rayon vecteur OP tourne toujours dans le même sens autour de l'origine O, car autrement pour la position du point P correspondant à ce changement de sens, la droite OP serait tangente en P à la courbe, et on aurait pour les coordonnées de ce point

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\lambda_1 + \cdots} = \frac{1}{\lambda_2 + \cdots}$$

égalité impossible, puisque λ_1 est différent de λ_2. Supposons, pour fixer les idées; que OP marche dans le sens de Ox vers Oy; quand P tendra vers l'origine, *OP aura nécessairement une limite*, puisque OP marche toujours dans le même sens et ne peut dépasser Oy, d'après ce que nous avons dit plus haut. Il est donc établi que *la courbe intégrale considérée a une tangente à l'origine*, et nous sommes alors assuré qu'il n'y a que deux courbes intégrales passant par le point singulier considérée, c'est à dire par un col.

2. Une question du même genre, mais un peu moins simple, se présente pour les équations différentielles du premier ordre et du second degré, qu'il n'est peut être pas sans intérêt de discuter d'une manière complète à cause des nombreuses questions de géométrie où elles se rencontrent. Prenons donc l'équation

$$(ax + by + \cdots)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(a_1x + b_1y + \cdots)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (a_2x + b_2y + \cdots) = 0$$

et *cherchons les courbes intégrales passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment.* Il est expressément entendu que nous nous plaçons dans le *cas général,* c'est à dire que nous ne supposons remplie aucune condition particulière d'égalité entre a, b, a_1, b_1, a_2 et b_2.

5. On voit immédiatement que, si une courbe intégrale possède une tangente à l'origine, le coefficient angulaire de cette tangente devra être une racine de l'équation du troisième degré

$$(a+bt)t^2 + 2(a_1+b_1t)t + a_2 + b_2t = 0. \tag{2}$$

Des circonstances différentes se présenteront suivant la nature des racines de cette équation du troisième degré; les racines réelles seules seront ici intéressantes, et à une racine réelle t_0 correspondront, pour l'équation, une seule intégrale on une infinité d'intégrales suivant que l'équation différentielle en t, proposée de la transformée en posant $y = tx$, aura une intégrale ou une infinité d'intégrales prenant pour $x = 0$ la valeur t_0.

L'équation (2) se retrouve en faisant dans l'équation $y = tx$. On aura, en résolvant d'abord

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(a_1x+b_1y+\cdots) \pm \sqrt{(a_1x+b_1y+\cdots)^2-(ax+by+\cdots)(a_2x+b_2y+\cdots)}}{ax+by+\cdots} \tag{3}$$

et par suite

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{-t(a+bt)-(a_1+b_1t)+x(\quad) \pm \sqrt{(a_1+b_1t)^2-(a+bt)(a_2+b_2t)+x(\quad)}}{a+bt+x(\quad)} \tag{4}$$

en marquant par des parenthèses des séries entières en x et t. Pour $x = 0$, le second membre se réduit à

$$\frac{-t(a+bt)-(a_1+b_1t) \pm \sqrt{(a_1+b_1t)^2-(a+bt)(a_2+b_2t)}}{a+bt}.$$

En égalant cette expression à zéro, on retrouve l'équation (2) du troisième degré, après suppression de la racine $t = -\frac{a}{b}$. On pourrait avoir à craindre, pour l'équation différentielle (4) en t, quelque difficulté à cause de cette racine $t = -\frac{a}{b}$. Le second nombre de cette équation se présente en effet sous forme indéterminée pour $x = 0$, $t = -\frac{a}{b}$,

du moins pour une des déterminations du radical. Ne pourrait-il pas y avoir alors une intégrale t de l'équation tendant vers $-\frac{a}{b}$, quand x tend vers zéro. Pour voir que la chose est impossible, il suffit de considérer dans l'équation différentielle proposée en x et y, x comme fonction de y, et, posant $x = t'y$, on aura une équation différentielle entre y et t', et cette équation ne pourra avoir une intégrale t' tendant vers $-\frac{b}{a}$ quand y tend vers zéro, car il n'y a plus ici aucune difficulté, puisque $ab_2 - a_2 b \neq 0$.

4. Les courbes intégrales que nous venons d'étudier étaient supposées avoir une tangente à l'origine. *Peut-il exister des courbes intégrales se rapprochant indéfiniment de l'origine sans avoir de tangente déterminée?* Telle est la question qui doit maintenant nous occuper. Outre l'équation (2) nous aurons encore à considérer l'équation

$$(5) \qquad (a_1 + b_1 t)^2 - (a + bt)(a_2 + b_2 t) = 0$$

correspondant aux directions qui donnent une racine double pour $\frac{dy}{dx}$.

5. Supposons d'abord que l'équation (5) ait ses racines imaginaires. En se servant des coordonnées polaires, l'équation différentielle devient

$$(6) \qquad [f(\Theta) + \varrho(\quad)]\, d\varphi = \varrho[\varphi(\Theta) + \varrho(\quad)]\, d\Theta$$

en posant

$$f(\Theta = -\sin\Theta\,(a\cos\Theta + b\sin\Theta) - \cos\Theta(a_1\cos\Theta + b_1\sin\Theta)$$
$$\pm \cos\Theta\sqrt{(a_1\cos\Theta + b_1\sin\Theta)^2 - (a\cos\Theta + b\sin\Theta)(a_1\cos\Theta + b_2\sin\Theta)}$$

et $\varphi(\Theta)$ ayant une expression analogue. Les coefficients de ϱ, qui sont marqués dans l'équation (6) par des parenthèses, sont des séries ordonnées suivant les puissances de ϱ et convergentes quel que soit Θ; nous nous appuyons ici sur ce que l'équation (5) a ses racines imaginaires, d'où il résulte que le radical figurant dans $f(\Theta)$ ne peut s'annuler.

Les racines de l'équation (2) correspondent aux racines dé l'équation

$$(7) \qquad f(\Theta) = 0$$

où il est entendu, une fois pour toutes, que parmi ces racines nous ne comptons pas la racine sans intérêt pour nous répondant à

$$a\cos\Theta + b\sin\Theta = 0.$$

Il résulte de la forme de l'équation (6) que, partant d'une valeur initiale (ϱ_0, Θ_0) avec une détermination fixee pour le radical qui figure dans $f(\Theta)$, *nous pourrons toujours faire varier* Θ *dans le même sens.**)

*) Si l'on veut développer davantage ce point, sur lequel nous passons peut-être un peu rapidement dans le texte, on peut raisonner de la manière suivante. Il pourrait arriver que le rayon vecteur changeât de sens de rotation, si l'on

Les seules valeurs de Θ, appelant l'attention, sont les racines de l'équation (7). Si, Θ arrivant à une telle racine Θ_0, ϱ prend la valeur zéro, nous serons dans le cas étudié d'une courbe ayant une tangente déterminée à l'origine. Si ϱ ne prend pas la valeur zéro, le point ne présente rien de particulier pour nous.

Nous venons de dire que l'on pourra toujours suivre une courbe intégrale en faisant varier Θ dans le même sens, tant qu'on n'aura pas atteint l'origine. On peut donc penser qu'il est possible d'avoir une intégrale ayant la forme d'une spirale; nous allons voir qu'il n'en est rien.

L'équation (2) ayant au moins une racine réelle, il y aura toujours une courbe intégrale passant à l'origine et formant un arc analytique, à savoir celle qui correspond à l'intégrale holomorphe de l'équation différentielle en t. Soit C cette courbe; concevons une autre courbe intégrale Γ rencontrant en m la première, et passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment. En suivant Γ, nous pourrons arriver

---

arrivait à un point (x, y) de la courbe telle que la tangente en ce point passe à l'origine. Or le lieu des points des courbes intégrales pour lesquels la tangente passe à l'origine est la courbe que l'on obtient en remplaçant dans l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y}{x}$. Cette courbe a un point triple à l'origine, les tangentes correspondant aux directions données par l'équation (2). En coordonnées polaires, cette courbe a pour équation le coefficient de $d\varrho$ dans (6), c'est-à-dire

$$f(\Theta) + \varrho(\ \ ) = 0. \tag{L}$$

On pourrait craindre qu'une intégrale eût, sur une branche de la courbe précédente, une infinité de points dans le voisinage de l'origine, pour lesquels la tangente à l'intégrale passerait à l'origine. Dan ce cas, il ne serait plus permis d'affirmer que, si près de l'origine qu'on considère l'intégrale, le rayon vecteur marche toujours dans le même sens. Pour démontrer qu'il n'en peut être ainsi, remarquons qu'il y a une courbe intégrale tangente à l'origine à la branche considérée de la courbe (L); nous pouvons supposer, en effectuant préalablement un changement de variable, que cette courbe intégrale est l'axe des x. Pour une détermination convenable du radical $f(\Theta)$ s'annulera pour $\Theta = 0$, et l'équation différentielle devant être satisfaite pour $\Theta = 0$, quel que soit ϱ, le second terme dans (L) s'annulera pour $\Theta = 0$, quel que soit ϱ. Il en résulte que, dans le voisinage de $\Theta = 0$, l'équation différentielle peut prendre la forme

$$\Theta[1 + (\ \ )]\,d\varrho = \varrho[\varphi(\Theta) + \varrho(\ \ )]\,d\Theta,$$

la quantité représentée dans le premier membre par une parenthèse s'annulant pour $\varrho = \Theta = 0$. Si maintenant on suit une intégrale à partir d'une détermination initiale (Θ_0, ϱ_0), Θ_0 et ϱ_0 désignant des quantités positives très petites, et que Θ commence par décroître, il continuera nécessairement à décroître jusqu'à $\Theta = 0$, car le multiplicateur de $d\varrho$ ne s'annule que pour $\Theta = 0$. Ce sera pour cette dernière valeur que ϱ s'annulera si la courbe se rapproche indéfiniment de l'origine, il est clair que $\varphi(0)$ sera alors nécessairement positif.

Les considérations précedentes un peu développées permettraient même d'éviter la discussion que nous faisons dans le texte, mais on pénètre ainsi moins profondément dans la question.

au point O, Θ marchant toujours dans le même sens. Cherchons si Γ peut rencontrer C en un second point m' qui sera nécessairement situé sur C de l'autre côté que m par rapport à O (dans le cas contraire, Θ aurait du rétrograder à un certain moment).

En m l'équation différentielle donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$; l'une convient à C l'autre à Γ. Sous le radical qui figure dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$ se trouve une expression toujours positive. Les points m et m' sont de part et d'autre de O et très voisins. Supposons qu'en m ce soit la détermination positive du radical qui convienne à Γ; le coefficient angulaire de la tangente à Γ en m est

$$\text{(E)} \qquad \frac{-(a_1x+b_1y+\cdots)+\sqrt{(a_1x+b_1y+\cdots)^2-\cdots}}{ax+by+\cdots}$$

tandis que pour C il faudra mettre le signe *moins* devant le radical. Suivons maintenant (x, y) sur Γ de m en m'; le radical gardera toujours le même signe, en m' et en m les coordonnées x et y sont respectivement de signes contraires, le rapport $\frac{y}{x}$ ayant à très peu près la même valeur. Il en résulte qu'en suivant Γ, nous trouvons en m' une valeur de (E) très voisine de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en m pour la courbe C, et par suite très voisine de celle de $\frac{dy}{dx}$ en m' pour la même courbe C. Mais en m' l'équation différentielle donne deux valeurs différentes pour $\frac{dy}{dx}$; les deux valeurs que nous avons trouvées très peu différentes sont donc rigoureusement égales, et par suite la tangente en m' à la courbe C coincide avec la tangente à Γ: les deux courbes C et Γ coïncideraient donc, ce qui est absurde. La courbe Γ ne peut donc rencontrer C en aucun autre point que O (en dehors de m), et elle arrive par suite en O avec une tangente déterminée, rentrant ainsi dans la classe d'intégrales dont nous avons fait l'étude. Notre conclusion est donc que *toutes les courbes intégrales cherchées ont à l'origine une tangente déterminée.*

6. Examinons maintenant le cas où l'équation (5) a ses racines réelles. En écrivant que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ données par l'équation différentielle sont égales, on obtient une courbe ayant un point double à l'origine avec tangentes distinctes. On peut faire un changement de variables tel que les deux branches de la courbe coïncident avec Ox et Oy; nous allons nous placer dans cette hypothèse. D'après un théorème classique, les axes de coordonnées sont alors *le lieu des points de rebroussement* des courbes intégrales, et celles-ci avant d'atteindre l'origine resteront toujours dans un même quadrant que nous pouvons

supposer être le premier. Quand on suit une courbe intégrale, le rayon vecteur marche toujours dans le même sens, sauf pour les positions Ox et Oy où change le sens du mouvement; c'est ce qui résulte de ce que la seule irrationnelle figurant dans l'équation est le radical

$$P(\Theta) = \sqrt{(a_1 \cos\Theta + b_1 \sin\Theta)^2 - (a\cos\Theta + b\sin\Theta)(a_2\cos\Theta + b_2\sin\Theta)}$$

qui d'ailleurs se réduit ici à $\sqrt{\cos\Theta \sin\Theta}$ d'après nos hypothèses. Le signe du radical sera à changer quand Θ arrivera à *zéro* ou à $\frac{\pi}{2}$.

Remarquons encore que toute racine réelle τ de l'équation (2) satisfait à l'inégalité

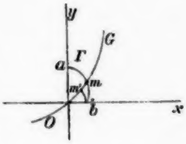
$$(a_1 + b_1\tau)^2 - (a + b\tau)(a_2 + b_2\tau) > 0$$

comme on le conclut de suite de l'équation

$$(a + b\tau)\tau^2 + 2(a_1 + b_1\tau)\tau + a_2 + b_2\tau = 0.$$

Il en résulte qu'il y aura au moins dans le premier quadrant une courbe intégrale avec une tangente déterminée.

Nous pouvons maintenant chercher à suivre une courbe intégrale qui tendrait vers l'origine. Soit C une intégrale ayant une tangente déterminée à l'origine; suivons une autre intégrale Γ, et supposons que, en suivant la courbe en allant vers l'origine, Θ aille d'abord en croissant. Il pourra arriver que ϱ tende vers zéro pour une valeur de Θ moindre que $\frac{\pi}{2}$, et alors nous aurons une branche de courbe avec une tangente déterminée. Dans le



cas contraire, Θ pourra croître jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ et la courbe Γ aura un point de rebroussement a sur l'axe des y. Il faut alors faire décroître Θ. Deux cas pourront maintenant se rencontrer: ou bien ϱ prendra la valeur *zéro* pour une certaine valeur de Θ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et 0, et alors nous aurons une courbe intégrale avec une tangente déterminée, ou bien Θ pourra atteindre la valeur zéro et on aura en b sur Ox un second point de rebroussement. Dans ce cas, il y aura certainement un point m de rencontre de Γ avec C, et pour la branche ab de Γ, le radical $\sqrt{P(\Theta)}$ aura un certain signe. Continuons à avancer sur Γ: ou bien la courbe intégrale arrivera à l'origine avec une tangente déterminée, ou bien Θ pourra aller jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; mais, dans ce dernier cas, il y aura un second point de rencontre m' de Γ avec C. Pour la branche bm', le radical $\sqrt{P(\Theta)}$ a dans l'équation différentielle un autre signe que pour la branche bm. Or en m l'équation différentielle donne deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant aux deux courbes intégrales passant

en m; ces valeurs correspondent aux deux signes du radical. L'une correspond à C l'autre à Γ, mais en m et m' les coefficients angulaires de la tangente à C sont très peu différents. Il s'en suit que le coefficient angulaire de la tangente en m' à Γ coïncide avec le coefficient angulaire de la tangente à C (puisque en m ils étaient distincts, et que le signe du radical a changé en b). Nous arrivons donc encore à une contradiction qui établit l'impossibilité du second point de rencontre m', à moins que ce dernier ne coïncide avec l'origine. Nous avons donc dans tous les cas la conclusion suivante:

Toutes les courbes intégrales passant à l'origine ou s'en rapprochant indéfiniment arrivent nécessairement en ce point avec une tangente déterminée.

Ainsi se trouve traité d'une manière qui me parait complètement rigoureuse le cas *général* de l'équation du second degré, intéressant dans diverses questions de géometrie notamment dans la recherche des lignes de courbure passant par un ombilic.

Paris, 4. Janvier 1895.

Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function für complexe Exponenten.

(Zweite Abhandlung).

Von

Fritz Schilling in Aachen.

Die folgenden Betrachtungen bilden die Fortsetzung des in diesen Annalen Bd. 46, pag. 62ff. veröffentlichten ersten Theiles. Bereits am Schlusse des § 4 daselbst sind die Punkte kurz genannt worden, die noch zu besprechen wünschenswerth sind. Dieselben betreffen die Ausdehnung der allgemeinen Construction der Fundamentalbereiche auf den Fall, dass einer oder zwei der Exponenten rein imaginär sind, sowie die Aufstellung der allgemeinen Criterien, wie sie die geometrische Theorie für das Auftreten parabolischer Ecken sowie für die functionentheoretische Verwandtschaft der Fundamentalbereiche ergiebt.

§ 5.

Construction der allgemeinen Fundamentalbereiche für einen oder zwei rein imaginäre Exponenten.

Im Anfange des § 2 des ersten Theiles war der Fall von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen worden, dass einer oder zwei der Exponenten λ, μ, ν rein imaginär sind. Wir wollen jetzt zeigen, wie auch für solche Werthe der Fundamentalbereich der zugehörigen s-Function sich geometrisch am einfachsten construiren lässt. Unsere Methode wird zunächst in genau derselben Weise vorgehen, wie für den allgemeinen Fall dreier complexer Exponenten im ersten Theile ausgeführt ist. An der Gestalt der sich in solcher Weise geometrisch ergebenden Vierecke wird jedoch dann noch eine Abänderung vorzunehmen sein, um sie zu functionentheoretisch brauchbaren Fundamentalbereichen zu erheben. Eine besondere Betrachtung widmen wir hierbei wieder dem Ausnahmefall, in dem die Bedingung

$$\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$$

erfüllt ist.

Nehmen wir jetzt zunächst an, *dass nur ein Exponent, etwa λ, rein imaginär ist*, die übrigen, μ und ν, beliebig complex sind. Der bestimmteren Ausdrucksweise wegen sei ferner $\nu' \geqq \mu'$ vorausgesetzt. Wir bestimmen vorerst die Lage der 4 Eckpunkte a_1, b_1, c_1, c_2' unseres Bereiches in der s-Ebene vermöge der Gleichung

$$D\,V(a_1 b_1 c_1 c_2') = e^{i\pi(\nu-\mu-\lambda+1)}.$$

Dann lassen wir an Stelle der gegebenen Exponenten $\lambda = i\lambda''$, μ, ν für einen Augenblick das neue Tripel $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \mu$, $\nu_1 = \nu - i\lambda''$ treten, welches das Doppelverhältniss der 4 Eckpunkte a_1, b_1, c_1, c_2' unverändert lässt, und construiren das diesen Exponenten zugehörige Kreisbogenviereck, was keine Schwierigkeit bietet. In diesem Kreisbogenviereck wird nothwendig die Ecke a_1 von zwei sich berührenden Kreisbogen mit verschwindendem Winkel gebildet werden. Nun wissen wir nach unserem Hülfssatze in § 1, dass wir durch entsprechende Zuordnung der Seitenpaare a_1c_1, a_1c_2' und b_1c_1, b_1c_2' unser Viereck zum Fundamentalbereich eines jeden Exponententripels erheben können, welcher in den reellen Theilen mit dem ursprünglichen übereinstimmt, dessen imaginäre Theile aber ganz beliebig gewählt sein können, insofern nur der Ausdruck $e^{-\pi(\nu''-\mu''-\lambda'')}$ unverändert bleibt. Wir können daher die Zuordnung der Seiten jedenfalls auch so festsetzen, dass sie den gegebenen Exponenten λ, μ, ν entsprechend ist. Doch dann tritt im Gegensatz zu dem allgemeinen Falle hier die neue Thatsache hervor, dass die Ecke a_1 einen *hyperbolischen Zipfel* darstellt, unser Kreisbogenviereck daher in solcher Form als Fundamentalbereich für die gegebenen Exponenten bekanntlich nicht brauchbar ist. *Wie werden wir nun unser Viereck abändern können, um einen brauchbaren Fundamentalbereich aus ihm zu bekommen?*

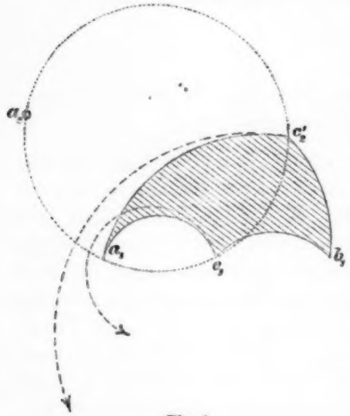


Fig. 1.

Wir haben bereits früher gelernt, dass an Stelle des hyperbolischen Zipfels ein unendliches Kreisband treten muss*). Um unsere Vorstellung zu fixiren, knüpfen wir unsere Betrachtung an das Viereck der Fig. 1 an; doch wolle man bemerken, dass der einfache geometrische Process, den wir ausführen werden, sich als allgemein anwendbar erweist. Wir erkennen zunächst, dass der zweite Fixpunkt a_2 der

*) Vgl. Annalen Bd. 44, pag. 176 ff.

hyperbolischen Substitution A, wie auch die Zuordnung des Seitenpaares $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ getroffen sein mag, gewiss auf dem Hülfskreise gelegen ist, den wir durch die Punkte a_1, c_1, c_2' construirt denken können. Jedoch kann andererseits a_2 nicht gerade auf dem Bogenstücke $c_1 c_2'$ dieses Hülfskreises liegen, welches sich in dem sichelförmigen Theile zwischen den Kreisen der Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ befindet. Wir wollen demgemäss eine beliebige Lage des Punktes a_2 in der Figur 1 auswählen. (Fällt a_2 in a_1 hinein, so ist die Substitution, welche die Zuordnung der Seiten $a_1 c_1$ und $a_1 c_2'$ leistet, eben die parabolische geworden, von der wir oben ausgingen).

Der für die in Aussicht genommene Abänderung des Bereiches wesentliche Gedanke ist jetzt folgender: Wir denken den Kreis der Seite $a_1 c_1$ durch einen von ihm in seiner Lage beliebig wenig abweichenden Kreis ersetzt, der auch von dem Punkte c_1 ausgeht, die Fixpunkte a_1 und a_2 jedoch von einander trennt. (Derselbe mag überdies, um ihn ein ev. störendes zweites Schneiden der Seite $c_1 b_1$ vermeiden zu lassen, den ursprünglichen Kreisbogen $a_1 c_1$ im Punkte c_1 berühren*)). Zu dem neuen Kreis suchen wir jetzt den vermöge der Substitution A zugeordneten Kreis, der von der Ecke c_2' ausgeht. Beide Kreise sind in der Figur 1 gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt jetzt, dass diese neuen Kreise sich niemals schneiden werden. Wir werden daher die geschlossene Ecke a_1 des hyperbolischen Zipfels durch das unendliche Kreisband ersetzen, welches sich zwischen diesen Kreisen wiederholt um die s-Kugel windet. Hiermit ist die beabsichtigte Umwandlung durchgeführt. *Das neue Kreisbogenviereck, welches in Fig. 2 nochmals für sich gezeichnet ist, stellt mit der entsprechenden Zuordnung der Seitenpaare in durchaus brauchbarer Gestalt den gesuchten Fundamentalbereich für das gegebene Exponententripel* $\lambda = i\lambda''$, μ, ν *dar.*

Fig. 2.

Sind nun weiter *zwei Exponenten, etwa* λ *und* μ, *rein imaginär*, der dritte ν dagegen beliebig complex, so ergiebt sich jetzt ganz von selbst, wie auch für sie der Fundamentalbereich zu construiren ist. Man wird ganz analog vorgehen wie soeben und sich zunächst das Kreisbogenviereck $a_1 b_1 c_1 c_2'$ für die Exponenten $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = \nu - i\lambda'' - i\mu''$ construiren, in dem die nicht verdoppelten Ecken

*) Ein Durchschneiden der Seite $b_1 c_2'$ kann auch in jedem Falle leicht vermieden werden, wie wir nicht weiter ausführen wollen.

a_1 und b_1 je von zwei sich berührenden Kreisbogen gebildet werden, indem ihre Winkel gleich 0 sind. In diesem Viereck können wir wieder die Seitenpaare $a_1 c_1$, $a_1 c_2'$ und $b_1 c_1$, $b_1 c_2'$ durch die hyperbolischen Substitutionen A und B einander zuordnen, welche den gegebenen Exponenten $i\lambda''$ und $i\mu''$ entsprechen. Hierdurch werden die Ecken a_1 und b_1 zu hyperbolischen Zipfeln; diese sind aber wieder leicht durch je ein unendliches Kreisband zu ersetzen durch genau denselben geometrischen Process wie vorhin. *Das resultirende Kreisbogenviereck wird dann wieder in durchaus brauchbarer Gestalt den Fundamentalbereich für die Exponenten* $\lambda = i\lambda''$, $\mu = i\mu''$, ν *darstellen.*

Es bleibt noch ein Wort den bisher ausgeschlossenen Fundamentalbereichen zu widmen, *für welche bei Stattfinden der Bedingung* $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ *ein oder zwei der Exponenten rein imaginär sind, sowie der Gesammtheit aller mit einem jeden derselben arithmetisch verwandten Bereiche**).

Ist nur ein Exponent rein imaginär und sind die beiden anderen beliebig complex (ohne ganzzahlig zu sein), so ist leicht zu übersehen, dass der Construction des zugehörigen Fundamentalbereiches sowie aller mit ihm arithmetisch verwandten Bereiche eine neue Schwierigkeit nicht im Wege steht. Das Gleiche ist der Fall, wenn etwa zwei Exponenten rein imaginär, der dritte complex (mit ungradzahligem reellen Theile) ist. Auf diese Fälle wollen wir nicht erst näher eingehen. Nur solche Fundamentalbereiche, für welche *zwei der Exponenten, etwa* μ *und* ν, *rein imaginär sind, während der dritte* λ, *gleich* 1 *ist, sowie alle mit denselben arithmetisch verwandten Bereiche* (für die also stets der Exponent λ eine ganze Zahl ist) erfordern noch eine besondere Beachtung, zumal wir sogleich in den folgenden Paragraphen auf sie zurückkommen werden. Die zum Vergleich heranzuziehenden Figuren des § 26 der Beiträge werden eben für diesen Ausnahmefall zu unbrauchbaren Bereichen ausarten.

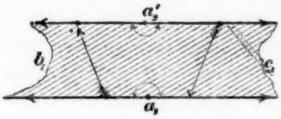
Um auch für diesen speciellen Fall die Construction der Fundamentalbereiche vollständig zu erledigen, wird man zweckmässig vorerst eine Tabelle aller mit dem Exponententripel $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = i\mu''$, $\nu_0 = i\nu''$ arithmetisch verwandten reducirten Tripel aufstellen. Man findet, dass es deren insgesammt 25 giebt**). Die ihnen entsprechenden Funda-

---

*) Wir wollen zwei Bereiche dann „arithmetisch mit einander verwandt" nennen, wenn ihre Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, deren Summe gerade ist. Wir kommen im § 7 hierauf noch genauer zu sprechen.

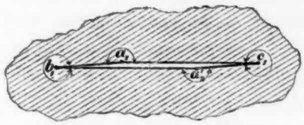
**) Diese Anzahl ergiebt sich deswegen grösser als im Falle dreier beliebiger Exponenten, weil man in der Tabelle der Beiträge § 16 für die Exponenten $i\mu''$ und $i\nu''$ beide Vorzeichen zu berücksichtigen hat, also z. B. neben dem Tripel $\lambda = 1$, $\mu = 1 + i\mu''$, $\nu = 1 + i\nu''$ auch $\lambda = 1$, $\mu = 1 - i\mu''$, $\nu = 1 - i\nu''$ vorkommt.

mentalbereiche lassen sich dann leicht zeichnen; ich will mich darauf beschränken, die 5 charakteristischen Gestalten, welche hier vorkommen, in folgenden Figuren 3, a—e zusammenzustellen*). Von diesen reducirten Bereichen zu der Gesammtheit aller erweiterten Bereiche



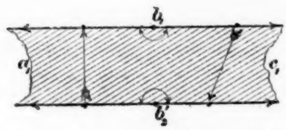
$\lambda = 1,\ \mu = i\mu_0'',\ \nu = i\nu_0''.$

a)



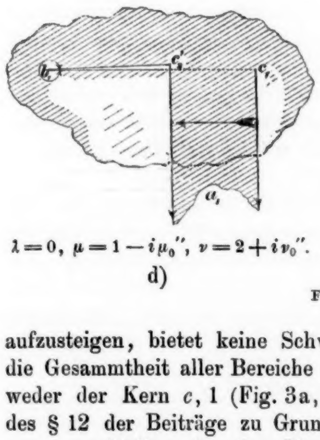
$\lambda = 1,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = 1 - i\nu_0''.$

b)



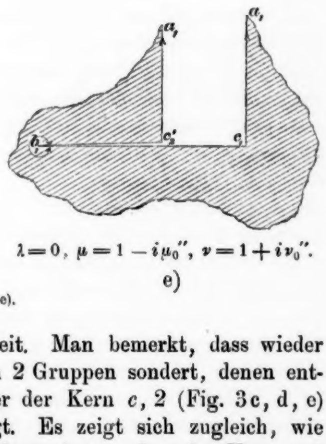
$\lambda = 0,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = i\nu_0''.$

c)



$\lambda = 0,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = 2 + i\nu_0''.$

d)



$\lambda = 0,\ \mu = 1 - i\mu_0'',\ \nu = 1 + i\nu_0''.$

e)

Fig. 3, a)—e).

aufzusteigen, bietet keine Schwierigkeit. Man bemerkt, dass wieder die Gesammtheit aller Bereiche sich in 2 Gruppen sondert, denen entweder der Kern c, 1 (Fig. 3a, b) oder der Kern c, 2 (Fig. 3c, d, e) des § 12 der Beiträge zu Grunde liegt. Es zeigt sich zugleich, wie man unmittelbar aus den Figuren ablesen kann, dass der Kern c, 1 dem Fundamentalbereich zugehört, d. h. *dass der ganzzahlige Exponent* λ *eine identische Substitution darstellt, wenn* $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ (*für* $\mu' > \nu'$) *ist. Ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so kommt*

*) In den Figuren 3a und 3c sind natürlich die hyperbolischen Zipfel in bekannter Weise umgewandelt zu denken. Doch sind die Figuren in dieser Form in Rücksicht auf die sich aufbauenden verwandten Bereiche gezeichnet worden.

der Kern c, 2 zur Anwendung, d. h. die Substitution A *hat parabolischen Charakter.*

Hiermit sind die Betrachtungen, welche sich auf die Construction der Fundamentalbereiche beziehen, zum definitiven, befriedigenden Abschluss geführt. Das allgemein erreichte Resultat fassen wir nochmals in dem Satze zusammen:

Für jede beliebige Auswahl der Exponenten λ, μ, ν, mag der einzelne Exponent ganzzahlig, rein imaginär, reell oder complex sein, und mag im besonderen die Bedingung $\pm\lambda\pm\mu\pm\nu=2n+1$ erfüllt sein oder nicht, stets lässt sich der Fundamentalbereich der zugehörigen Schwarz'schen s-Function in der Gestalt eines Kreisbogenvierecks wirklich geometrisch construiren.

§ 6.

Allgemeines Criterium für das Auftreten parabolischer oder identischer Ecken.

Wir wollen jetzt noch dem Falle, dass einer oder mehrere Exponenten ganzzahlig sind, eine zusammenfassende Betrachtung widmen. Die Construction der bezüglichen Fundamentalbereiche ist ja freilich völlig erledigt; doch interessirt es, von vorneherein allgemein angeben zu können, *ob der einem ganzzahligen Exponenten entsprechenden Ecke des Bereiches eine identische oder eine parabolische Substitution angehört.*

Wir hatten bereits wiederholt bei speciellen Bereichen Gelegenheit, uns diese Frage vorzulegen und fanden stets das folgende Criterium bestätigt:

Ist $\lambda-\mu\pm\nu=2n+1$, für $\mu'\geqq\nu'$, so besitzt die dem Exponenten λ zugehörige Substitution nothwendig identischen Charakter, d. h. die entsprechende Ecke des Fundamentalbereiches wird von zwei Bogenstücken desselben Kreises gebildet. Hierbei ist natürlich nothwendig, wenn diese Ecke verdoppelt auftreten sollte, ihre beiden Theile durch einfache erlaubte Abänderung des Bereiches vereinigt zu denken.

Ist dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, so besitzt die betreffende Substitution nothwendig parabolischen Charakter, d. h. die entsprechende einfache Ecke wird von zwei sich berührenden Kreisbogen gebildet.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass dieses Criterium völlig allgemeine Gültigkeit besitzt.

Der Fall, dass *alle drei Exponenten ganzzahlig* sind, ist in diesem Sinne bereits im § 17 der Beiträge erledigt worden.

Sind ferner *nur zwei Exponenten, etwa λ und μ, ganzzahlig,* der dritte ν beliebig complex, so zeigt die Betrachtung des Kernes der drei Geraden I, II, III, dass den Exponenten λ und μ zwei identische

Substitutionen ebensowenig entsprechen können wie je eine identische und eine parabolische Substitution. Denn gemäss der Gleichung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ müsste die dritte Substitution im ersteren Falle auch die Identität darstellen, im letzteren dagegen der parabolischen Substitution invers sein, d. h. der ihr entsprechende Exponent ν müsste ebenfalls ganzzahlig sein, was ausgeschlossen ist. *Sind daher nur 2 Exponenten ganzzahlig, so besitzen die ihnen zugehörigen Substitutionen stets parabolischen Charakter.* Man erkennt aus diesem Satze unmittelbar, dass also auch hier das obige Criterium erfüllt ist.

Kaum umständlicher zu betrachten ist jetzt der Fall, dass *nur ein Exponent, etwa* λ, *ganzzahlig ist*, wenn wir beachten, dass gerade diejenigen Werthetripel, die eine besondere Untersuchung erfordern würden, bereits vorweg erledigt sind. Mit letzteren gemeint sind eben alle Exponententripel, welche der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ genügen. Es zeigte sich für sie stets das oben aufgestellte Criterium bestätigt, mögen die nicht ganzzahligen Exponenten μ und ν ihrerseits reell, rein imaginär oder beliebig complex sein. Nun können wir leicht für allgemeine Exponententripel folgendermassen schliessen: Gehört etwa der ganzzahlige Exponent λ zu einer Identität, so müssen die beiden anderen Substitutionen (bis auf volle Umdrehungen) nothwendig zu einander invers sein, d. h. ihre Axen müssen zusammenfallen. Dann aber gilt $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ und der Exponent λ muss auch der Bedingung $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ (für $(\mu' > \nu')$ genügen. Entspricht aber andererseits dem ganzzahligen Exponenten λ eine parabolische Substitution, so kann die Bedingung $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ (für $\mu' > \nu'$) gewiss nicht gelten. Denn sonst würde ja gerade wieder der charakteristische Ausnahmefall $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ vorliegen, für welchen das Nichtbestehen der genannten Bedingung erwiesen ist, was einen Widerspruch involvirt. Unser Schlussergebniss ist daher, dass in der That das eben aufgestellte Criterium für beliebige Exponententripel ausnahmslose Gültigkeit besitzt.

§ 7.

Allgemeines Criterium für die Verwandtschaft der Fundamentalbereiche.

Bei der Construction der Fundamentalbereiche haben wir insbesondere stets auch auf die Verwandtschaft derselben Rücksicht genommen. Es zeigt sich wünschenswerth, nochmals im Zusammenhange diese Verhältnisse zu beleuchten, zumal beim Bestehen der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$, wie Herr Klein in seiner Vorlesung über die hypergeometrische Function*) bemerkt, die von Riemann gegebene analytische Definition der Verwandtschaft nicht ausreicht.

*) Wintersemester 1893/94. Vgl. das Selbstreferat Ann. Bd. 45, pag. 151.

Als allgemeine Bedingung für die Verwandtschaft zweier Fundamentalbereiche gilt, *dass die zugehörigen Functionen in zweckmässig ausgewählten Zweigen dieselbe Gruppe von Substitutionen erleiden, wenn die unabhängige Variable z beliebige Umläufe um die singulären Punkte ihrer Ebene macht.* Bei der geometrischen Uebertragung dieser Forderung auf unsere Fundamentalbereiche ergiebt sich zunächst als nothwendig, dass diese demselben Kern angehören, und demnach die Exponenten sich um ganze Zahlen von gerader Summe unterscheiden müssen. Doch ist, wie wir jetzt zeigen wollen, dieses Criterium eben nur in dem Falle zugleich auch hinreichend, wenn die Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ nicht erfüllt ist.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir alle Bereiche, deren Exponenten sich um ganze Zahlen von gerader Summe unterscheiden, als „*arithmetisch mit einander verwandt*" bezeichnen, solche, welche zugleich dieselbe Monodromiegruppe besitzen, dagegen als „*functionentheoretisch verwandt*".

Wir denken die singulären Punkte a, b, c in der Reihenfolge, wie es die Figur 4 zeigt, auf der Axe der reellen Zahlen in der z-Ebene

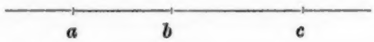


Fig. 4.

gelegen. Wie leicht zu übersehen ist, verlangt dann die charakteristische Bedingung $\mathsf{AB\Gamma} = 1$ folgendes: Wenn wir unsere Fundamentalvierecke umlaufen denken, indem wir die Fläche linker Hand lassen, so müssen die Ecken in der cyklischen Reihenfolge $a_1 c_1 b_1 c_2'$ (bezw. bei Verdoppelung einer anderen Ecke $c_1 b_1 a_1 b_2'$ oder $b_1 a_1 c_1 a_2'$) auf einander folgen, woselbst $a_1 b_1 c_1$ als Fixpunkte der Substitutionen A, B, $\mathsf{\Gamma}$ anzusehen sind.

Für ein allgemeines Werthetripel λ, μ, ν nun, welches der Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ nicht genügt, haben gewiss die drei Geraden des Kernes unter sich keinen Fixpunkt gemein. Als unmittelbare Folge ergiebt sich hieraus, dass jedem Fundamentalbereich eines solchen Kernes ein zweiter entspricht, welcher die complementäre Auswahl der drei Fixpunkte als Ecken besitzt. Beide aber sind durch eine geeignete Substitution, nämlich eine Umklappung um eine der Geraden 1, 2, 3, in einander überzuführen. Dies aber besagt, dass wir der soeben gefundenen Aufeinanderfolge der Eckpunkte des Bereiches stets gerecht werden können, dass also mit anderen Worten alle mit einem Fundamentalbereiche eines solchen Kernes arithmetisch verwandten Bereiche zugleich auch functionentheoretisch verwandt sind.

Anders aber ist es, falls die Bedingung $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ erfüllt ist. Indem jetzt die drei Geraden des Kernes einen Fixpunkt

gemeinsam haben, wissen wir, dass dann jeder beliebig gegebene Bereich eines solchen Kernes ausartet und unbrauchbar wird, falls wir verlangen, dass an Stelle der drei ihm als Ecken angehörenden Fixpunkte die complementären Fixpunkte des Kernes als Ecken auftreten sollen. Die Fundamentalbereiche desselben Kernes werden sich daher auf zwei verschiedene functionentheoretische Verwandtschaften vertheilen. Indem wir auf diesen Ausnahmefall jetzt näher eingehen, seien ganzzahlige Exponenten zunächst ausgeschlossen. Um dann das analytische Criterium für die functionentheoretische Verwandtschaft der Bereiche abzuleiten, brauchen wir nur die uns gezeichnet vorliegenden Bereiche nochmals zu überblicken. Wir wollen im einzelnen dies nicht näher ausführen; wir werden finden, dass die Gesammtheit der arithmetisch mit einander verwandten Bereiche sich auf zwei verschiedene Gruppen functionentheoretischer Verwandtschaften vertheilt, die sich folgendermassen am einfachsten umgränzen lassen: Wir bezeichnen mit λ_0, μ_0, ν_0 dasjenige Exponententripel der arithmetischen Verwandtschaft, für welches $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$ gilt und jeder Exponent in seinem positiv zu wählenden reellen Theile kleiner als 1 ist, und denken die arithmetisch verwandten Exponententripel stets in der Form $\lambda = \lambda_0 \pm p$, $\mu = \mu_0 \pm q$, $\nu = \nu_0 \pm r$ geschrieben, wo p, q, r beliebige positive ganze Zahlen sind. *Für die Exponententripel der ersten Gruppe aller mit einander functionentheoretisch verwandten Bereiche wird dann* $(\lambda_0 \pm p) + (\mu_0 \pm q) + (\nu_0 \pm r)$ *gleich einer ungeraden positiven Zahl, für die Exponententripel der zweiten Gruppe dagegen gleich einer ungeraden negativen Zahl sein**). (Für den symmetrischen Fall der geradlinigen Dreiecke besagt dieses Resultat, dass die zu zwei Dreiecken desselben Kernes gehörenden Bereiche dann functionentheoretisch verwandt sein werden, wenn die den singulären Punkten a, b, c entsprechenden Ecken der Dreiecke bei gleicher Umlaufung in demselben Sinne auf einander folgen. Die eine Gruppe der Dreiecke wird natürlich stets die positive, die andere die negative Halbebene des Argumentes abbilden).

Nun wollen wir noch ein Wort hinzufügen, falls neben der Bedingung $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ alle drei Exponenten oder einer derselben einen ganzzahligen Werth besitzt.

Sind alle drei Exponenten ganzzahlig (von ungerader Summe), so

---

*) Man vergleiche die Bemerkung von Frl. Winston in diesen Annalen Bd. 46, pag. 159—160. Das dort gegebene Criterium ist leicht mit dem unsrigen in Uebereinstimmung zu bringen, wenn man bedenkt, dass $\alpha_0' + \beta_0' + \gamma_0' = 1$ und $\alpha_0'' + \beta_0'' + \gamma_0'' = 0$ zu setzen ist und die Beziehungen gelten

$$(\alpha' + \beta' + \gamma') + (\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = 1$$

und

$$(\alpha' + \beta' + \gamma') - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = (\lambda_0 \pm p) + (\mu_0 \pm q) + (\nu_0 \pm r).$$

vertheilen sich alle diese mit einander arithmetisch verwandten Bereiche auf 4 Gruppen functionentheoretischer Verwandtschaften, je nachdem alle drei Exponenten oder nur je einer derselben zu einer identischen Substitution gehört. Des Näheren sehe man, was bereits im § 17 der Beiträge unter $a, 2$ gesagt ist.

Ist endlich nur ein Exponent, etwa λ, ganzzahlig, so haben wir die Figuren des allgemeinen Falles § 26 der Beiträge, sowie des am Schlusse des § 5 dieser Arbeit behandelten Specialfalles in Rücksicht zu ziehen. Ich will mich wieder darauf beschränken, das für beide gleichmässig gültige Resultat auszuführen:

Die Gesammtheit aller mit einander arithmetisch verwandten Bereiche vertheilt sich stets auf drei Gruppen functionentheoretischer Verwandtschaften. Von diesen ist die eine dadurch charakterisirt, dass die dem Exponenten λ zugehörige Ecke einer identischen Substitution zugehört; als Bedingung hierfür gilt nach § 6 $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$ *(für $\mu' > \nu'$); für die beiden anderen Gruppen dagegen, für welche die Substitution* A *parabolischen Charakter besitzt, gilt in unveränderter Form das obige allgemeine Criterium der Bereiche $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$, indem wir als bevorzugtes Exponententripel im allgemeinen Falle des* § 26 *der Beiträge $\lambda_0 = 0$, μ_0, ν_0 mit der Bedingung $\mu_0' < 1$, $\nu_0' < 1$ und $\mu_0 + \nu_0 = 1$, im Specialfall des* § 5 $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1 - i\mu''$, $\nu_0 = i\nu''$ *mit der Bedingung $\mu'' = \nu''$ wählen.*

Schlussbemerkung.

Hiermit hat die geometrische Theorie der Schwarz'schen s-Function ihren Abschluss gefunden und kann nun ihrerseits als Grundlage für den independenten Aufbau der ganzen Theorie dieser Functionsclasse dienen. — Wir verlangen nach dem Programm Riemann's Functionen zu studiren, die in der Ebene des Argumentes drei singuläre Punkte besitzen, bei deren Umlaufung jene lineare Substitutionen A, B, Γ mit der Bedingung $\mathsf{AB}\Gamma = 1$ erleiden. Die Existenz dieser Functionen wird durch unsere Fundamentalbereiche nachgewiesen; insbesondere ist im Falle eines ganzzahligen Exponenten zugleich ausgesprochen, ob demselben eine identische oder eine parabolische Substitution zuzuordnen ist. —

Dass jetzt, wo die Betrachtungen bis zu Ende durchgeführt sind, diese oder jene Anordnung im Rahmen des Ganzen vielleicht übersichtlicher durchführbar sein mag, liegt auf der Hand, und man wolle etwaige Mängel in dieser Hinsicht, die eine erneute Darstellung der Theorie vermeiden würde, mit Nachsicht hinnehmen.

Göttingen, Anfang Januar 1895.

Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionengruppen.

Von

P. Hoyer in Schnepfenthal b. Waltershausen.

In der Theorie der Substitutionengruppen finden zwei Sätze vielfache Anwendung, die aus dem Vorkommen gewisser Circularsubstitutionen in einer Gruppe darauf zu schliessen gestatten, dass die Gruppe symmetrisch oder alternirend ist. Diese beiden Sätze sind:

I. Enthält eine Gruppe der Elemente $x_1 \ldots x_n$ die Transpositionen $(x_1 x_2)$, $(x_1 x_3) \ldots (x_1 x_n)$, so ist sie symmetrisch.

II. Enthält eine Gruppe der Elemente $x_1 \ldots x_n$ die Circularsubstitutionen $(x_1 x_2 x_3)$, $(x_1 x_2 x_4) \ldots (x_1 x_2 x_n)$, so ist sie symmetrisch oder alternirend (sie enthält die alternirende Gruppe).

Von diesen beiden Sätzen werde ich mir im Folgenden eine Verallgemeinerung mitzutheilen erlauben, welche mittelst eines der Theorie des Zusammenhanges in Reihen angehörenden Begriffes möglich ist.

Es bezeichne (s. meine Abhandl. d. Ann. Bd. 42)

$$A_1, A_2, \ldots A_n$$

eine transitive Reihe, die so geordnet vorausgesetzt werde, dass jedes Glied A_k mit der Reihe der vorangehenden $A_1 \ldots A_{k-1}$ wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat. Finden sich die sämmtlichen Buchstaben von A_k auch in $A_1 \ldots A_{k-1}$ vor, so wird man durch Fortlassen von A_k aus der Reihe $A_1 \ldots A_n$ eine Reihe $A_1 \ldots A_{k-1} A_{k+1} \ldots A_n$ erhalten, die wieder transitiv ist und die sämmtlichen verschiedenen Buchstaben von $A_1 \ldots A_n$ enthält. Sind umgekehrt alle verschiedenen Buchstaben von $A_1 \ldots A_{k-1}$ enthalten in A_k, so kann man mit dem gleichen Erfolge $A_1 \ldots A_{k-1}$ aus der Reihe fortlassen. Verstehen wir nun unter dem „*Reduciren*" einer beliebigen Reihe jedes Fortlassen von Gliedern derselben, durch deren Fortfall weder die Anzahl der transitiven Gruppen vermehrt, noch die Anzahl der verschiedenen Buchstaben vermindert wird (sodass also beide Anzahlen für die neue Reihe den respectiven Anzahlen für die ursprüngliche gleich sind), so werden

wir unter einer *„irreductibeln Reihe“* eine solche zu verstehen haben, aus der man kein Glied fortlassen kann, ohne die Anzahl der transitiven Gruppen zu vermehren, oder die Anzahl der verschiedenen Buchstaben zu vermindern. Ist eine irreductible Reihe transitiv und wird dieselbe in der soeben angegebenen Weise geordnet, sodass also jedes Glied mit der Reihe der vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat, so kann in keiner solchen Anordnung, wie aus dem Vorstehenden folgt, ein Glied auftreten, dessen Buchstaben sämmtlich bereits unter den Buchstaben der vorangehenden Glieder enthalten sind, oder unter dessen Buchstaben sich alle verschiedenen Buchstaben der vorangehenden Glieder wieder vorfinden. Umgekehrt, wenn ein derartiges Glied bei keiner solchen Anordnung einer transitiven Reihe auftritt, so ist die Reihe auch irreductibel.

Endlich möge noch, um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, eine Reihe als *„k-stufig“* oder als *„Reihe k^{ter} Stufe“* bezeichnet werden, wenn die kleinste (von Null verschiedene) Anzahl der Buchstaben, welche zweien Gliedern der Reihe gemeinsam sind, gleich k ist. Eine k-stufige Reihe enthält also nur Glieder mit k, $k+1$ u. s. w. gemeinsamen Buchstaben, ausser solchen Gliedern, die keinen Buchstaben gemeinsam haben und die in der Reihe vorkommen oder fehlen können.

Uebertragen wir nun, wenn eine Reihe von Circularsubstitutionen (A_1), (A_2), ... (A_n) gegeben ist, die für die Reihe der Cyklen A_1, A_2, ... A_n geltenden Bezeichnungen auf die Reihe der Circularsubstitutionen, so können wir den in Rede stehenden Satz, welcher die Verallgemeinerung der obigen beiden Sätze bildet, in folgender Weise aussprechen:

Finden sich sämmtliche Buchstaben einer Gruppe in einer transitiven, irreductibeln Reihe von Circularsubstitutionen der Gruppe vor, so enthält die Gruppe die alternirende, wenn die Reihe dieser Circularsubstitutionen einstufig ist, oder wenn dieselbe eine Circularsubstitution dritter Ordnung enthält.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist der, dass die sämmtlichen Buchstaben der Gruppe in einer transitiven, einfach zusammenhängenden Reihe von Circularsubstitutionen von wenigstens zwei Gliedern enthalten sind. Denn eine einfach zusammenhängende Reihe ist stets irreductibel und, sofern sie transitiv ist und mehr als ein Glied enthält, auch einstufig. Darin als specieller Fall enthalten ist aber der obige Satz I, denn die Reihe der Transpositionen $(x_1 x_2)$, $(x_2 x_3)$ ... $(x_1 x_n)$ ist einfach zusammenhängend und transitiv, und die Gruppe muss natürlich symmetrisch sein, weil sie Transpositionen enthält. Ebenso aber ist Satz II als specieller Fall in unserm Satze enthalten, denn die Reihe $(x_1 x_2 x_3)$, $(x_1 x_2 x_4)$ ... $(x_1 x_2 x_n)$ ist transitiv, irreductibel und enthält Circularsubstitutionen dritter Ordnung.

Zum Beweise des Satzes bedürfen wir zweier Hilfssätze, die wir jetzt ableiten wollen.

Hilfssatz I. Eine Gruppe, welche durch zwei Circularsubstitutionen mit einem und nur einem gemeinsamen Buchstaben bestimmt ist, ist symmetrisch oder alternirend.

Sind

$$S_1 = (x_{-k},\ x_{-k+1} \ldots x_{-1} x_0),$$
$$S_2 = (x_0 x_1 \ldots x_l)$$

die beiden Circularsubstitutionen, so enthält die Gruppe die durch $S_2^{\alpha} (\alpha = 1 \ldots l)$ transformirte von S_1, welche gleich ist mit

$$(x_0 x_\alpha)\, S_1 (x_0 x_\alpha) = S_1 (x_{-1} x_\alpha)(x_0 x_\alpha).$$

Mithin enthält die Gruppe auch, wie durch Multiplication der erhaltenen Substitution mit S_1^{-1} folgt, die Circularsubstitution $(x_0 x_{-1} x_\alpha)$ $(\alpha = 1 \ldots l)$, also die alternirende Gruppe von $x_{-1}, x_0, x_1 \ldots x_l$. Ebenso folgt, dass die Gruppe die alternirende Gruppe von $x_{-k},\ x_{-k+1} \ldots x_{-1},\ x_0,\ x_l$ enthalten muss, sie enthält also die Circularsubstitutionen

$$(x_{-1} x_0 x_\alpha)\ (\alpha = 1 \ldots l, -2, -3 \ldots -k)$$

und folglich die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente.

Hilfssatz II. Verbindet man mit einer Gruppe G_1, welche die alternirende Gruppe ihrer sämmtlichen Elemente enthält, eine Circularsubstitution S, welche einige, aber nicht alle Elemente der Gruppe enthält, so enthält die entstehende Gruppe G_2 wieder die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente.

Es sei $S = (x_0 x_1 \ldots x_l)$. Wir nehmen zunächst an, S habe mit G_1 nur einen Buchstaben x_0 gemeinsam. Dann enthält G_1 entweder eine Transposition $(x_0 y)$, oder eine Circularsubstitution $(x_0 y z)$, wo y, z zwei beliebige Buchstaben der Gruppe G_1 sind*). Wie durch Transformation mit den Potenzen von S_1 folgt, enthält mithin die Gruppe G_2 die Transpositionen $(x_\alpha y)$, oder die Circularsubstitutionen $(x_\alpha y, z)$ $(\alpha = 0 \ldots l)$. Enthält G_1 nur die beiden Elemente x_0, y, so wird daher G_2 die symmetrische Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y$. Enthält G_1 die Elemente $x_0 y_1 \ldots y_k$, so folgt, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y_1 y_\alpha$ $(\alpha > 1)$ enthält. Mithin enthält G_2 die Circularsubstitutionen $(x_l y_1 x_\alpha)$ $(\alpha = 0, 1 \ldots l - 1)$ und $(x_l y_1 y_\alpha)$ $(\alpha = 2 \ldots k)$, und G_2 enthält folglich die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente. Hat S mit G_1 mehr als einen Buchstaben gemeinsam, so mögen x_0, x_α zwei dieser Buchstaben sein. Dann enthält G_1 wenigstens einen Buchstaben y, der sich nicht in S findet, und die Circularsubstitution $(x_0 x_\alpha y)$. Wird diese durch $S^\beta (\beta = 1 \ldots l)$ transformirt, so ergiebt sich $(x_\beta x_{\alpha+\beta} y)$. Ist keine der Zahlen β, $\alpha + \beta$

*) Natürlich setzen wir voraus, dass G_1 sich nicht auf die Identität reducirt.

congruent 0 oder α mod $(l+1)$, also β eine der Zahlen $1 \ldots l$ mit Ausnahme von α und $l+1-\alpha$, so ergiebt die Transformation von $(x_\beta x_{\alpha+\beta} y)$ durch $(x_0 x_\alpha y)$ die Circularsubstitution $(x_\beta x_{\alpha+\beta} x_0)$. Wird diese durch $S^{-\beta}$ transformirt, so erhält man $(x_0 x_\alpha x_{l+1-\beta})$. Somit enthält G_2 die Circularsubstitutionen $(x_0 x_\alpha y)$ und $(x_0 x_\alpha x_\gamma)$, wo γ jede der Zahlen $1 \ldots l$ sein kann mit Ausnahme von $l+1-\alpha$ und α. Ist $l+1-\alpha=\alpha$, so folgt hieraus, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 x_1 \ldots x_l\, y$ enthält. Ist $l+1-\alpha \gtrless \alpha$, so folgt, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1+1} \ldots x_l y$ enthält, wo $\gamma_1 = l+1-\alpha$ gesetzt ist. Ist ausserdem $l>2$, so ist entweder $l-1$, oder $l-2$ eine gerade, von Null verschiedene Zahl, und G_2 enthält daher im ersten Falle die Circularsubstitution

$$S_1 = (x_{\gamma_1+1} \ldots x_l x_0 \ldots x_{\gamma_1-1}),$$

im zweiten die Circularsubstitution

$$S_2 = (x_{\gamma_1+1} \ldots x_l x_0 \ldots x_{\gamma_1-2}),$$

oder wenn $\gamma_1 = 1$ ist, die Circularsubstitution $S_3 = (x_2 x_3 \ldots x_l)$. Im ersten Falle folgt durch Multiplication von S mit S_1^{-1}, dass G_2 die Circularsubstitution $(x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1})$ enthält, mithin enthält G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y$, weil $(x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1})$ mit der alternirenden Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1+1} \ldots x_l y$ nur den einen Buchstaben x_{γ_1-1} gemeinsam hat. Im zweiten Falle folgt durch Multiplication von S mit S_2^{-1} oder S_3^{-1}, dass G_2 die Circularsubstitution $(x_{\gamma_1-2} x_{\gamma_1-1} x_{\gamma_1})$ oder $(x_l x_0 x_1)$ enthält. G_2 enthält daher ausser $(x_{\gamma_1-2} x_{\gamma_1-1} y)$ oder $(x_l x_0 y)$ noch die Circularsubstitutionen $(x_{\gamma_1-2} x_{\gamma_1-1} x_\gamma)$ wo γ jede der Zahlen $0, 1, \ldots l$ ausser γ_1-2, γ_1-1 sein kann, oder die Circularsubstitutionen $(x_l x_0 x_\gamma)$ $(\gamma = 1 \ldots l-1)$, und es folgt wieder, dass G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y$ enthält. Das Gleiche ergiebt sich für den Fall $l=2$ unmittelbar aus der Existenz der beiden Circularsubstitutionen $(x_0 x_\alpha y)$, wo $\alpha = 1$ oder $= 2$ ist, und $(x_0 x_1 x_2)$. Für den Fall $l=1$ enthält G_2 die symmetrische Gruppe der Elemente x_0, x_1, y. Sind also $y_1 \ldots y_k$ die nicht in S enthaltenen Elemente von G_1, so enthält G_2 die alternirende Gruppe der Elemente $x_0 \ldots x_l y_\alpha$, wo α jede der Zahlen $1 \ldots k$ sein kann. Somit enthält G_2 die Circularsubstitutionen $(x_0 x_1 x_\alpha)$ $(\alpha = 2 \ldots l)$ und $(x_0 x_1 y_\beta)$ $(\beta = 1 \ldots k)$, oder doch, wenn $l=1$ ist, die Circularsubstitutionen $(x_0 x_1 y_\beta)$ $(\beta = 1 \ldots k)$, jedenfalls also die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente $x_0 \ldots x_l$ $y_1 \ldots y_k$.

Es möge nun eine Gruppe G eine transitive Reihe von Circularsubstitutionen $(A_1), (A_2) \ldots (A_n)$ enthalten. Ordnen wir diese Reihe so, dass jedes Glied mit der Reihe der vorangehenden wenigstens einen Buchstaben gemeinsam hat, so können wir bei dieser Anordnung

ein beliebiges Glied, oder zwei beliebige Glieder mit wenigstens einem gemeinsamen Buchstaben an die Spitze stellen. Enthält daher die Reihe eine Circularsubstitution dritter Ordnung, so dürfen wir voraussetzen, dass (A_1) diese Circularsubstitution ist, und ist die Reihe einstufig, so werden wir voraussetzen dürfen, dass (A_1) und (A_2) einen einzigen Buchstaben gemeinsam haben. Ist ferner die Reihe irreductibel, so sind die Buchstaben von $A_1 \dots A_{k-1}$ $(k = 2 \dots n)$ nicht sämmtlich enthalten in A_k. Ist nun (A_1) von dritter Ordnung, so enthält die durch (A_1) bestimmte Gruppe die alternirende Gruppe der Elemente von (A_1). Zufolge Hilfssatz II enthält dann die durch (A_1), (A_2) bestimmte Gruppe die alternirende Gruppe der Elemente von (A_1), (A_2), nach demselben Satze die durch (A_1), (A_2), (A_3) bestimmte Gruppe die alternirende Gruppe der Elemente von (A_1), (A_2), (A_3) u. s. f., also enthält G die alternirende Gruppe der Elemente von $(A_1) \dots (A_n)$. Haben (A_1) und (A_2) einen einzigen Buchstaben gemeinsam, so enthält zufolge Hilfssatz I die durch (A_1) und (A_2) bestimmte Gruppe die alternirende der Elemente von (A_1) und (A_2). Zufolge Hilfssatz II enthält daher die durch (A_1), (A_2), (A_3) bestimmte Gruppe die alternirende der Elemente von (A_1), (A_2), (A_3), die durch $(A_1) \dots (A_4)$ bestimmte Gruppe die alternirende der Elemente von $(A_1) \dots (A_4)$ u. s. f., also wiederum G die alternirende Gruppe der Elemente von $(A_1) \dots (A_n)$. Mithin enthält G die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente, wenn $(A_1) \dots (A_n)$ sämmtliche Elemente von G umfasst und entweder eine Circularsubstitution dritter Ordnung enthält, oder einstufig ist. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Bildet man also alle Gruppen, deren jede die Substitutionen einer transitiven, irreductibeln Reihe R von Circularsubstitutionen als erzeugende Substitutionen besitzt, so wird jede solche Gruppe symmetrisch oder alternirend, wenn die Reihe R eine Circularsubstitution dritter Ordnung besitzt, oder einstufig ist. *Unter denjenigen Gruppen, für welche die Reihe R von einer höheren Stufe ist, giebt es aber auch stets solche, welche von der symmetrischen und alternirenden Gruppe verschieden sind*, sodass die erste Stufe die *einzige* ist, deren Reihen *sämmtlich* symmetrischen oder alternirenden Gruppen Entstehung geben. Um dies einzusehen, genügt es, die durch die beiden Circularsubstitutionen

$$(A_1) = (x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k)$$

und

$$(A_2) = (x_1 z_1 x_2 z_2 \dots x_k z_k)$$

bestimmte Gruppe als Beispiel anzuführen, welche imprimitiv ist und die drei Systeme der Imprimitivität $x_1 \dots x_k$, $y_1 \dots y_k$, $z_1 \dots z_k$ enthält. Die Reihe (A_1), (A_2) ist transitiv, irreductibel und von

k^{ter} Stufe. In die Classe der Gruppen, welche durch eine transitive, irreductible Reihe von Circularsubstitutionen bestimmt sind, gehört endlich auch die Gruppe vom Grade 6 und der Ordnung 120, welche nicht mit der symmetrischen Gruppe vom Grade 5 identisch ist, und welche man durch eine transitive, irreductible Reihe dritter Stufe von drei Circularsubstitutionen vierter Ordnung bestimmen kann.

Schnepfenthal, Januar 1895.

Note über die Siebensysteme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen.*)

Von

M. Noether in Erlangen.

Für die 315 Kegelschnitte, welche eine Curve vierter Ordnung in den Berührungspunkten von vier ihrer Doppeltangenten treffen, hat O. Hesse zuerst angegeben (Crelle's J. Bd. 40, S. 260), dass man aus ihnen 7-Systeme bilden kann, die je durch die Berührungspunkte aller 28 Doppeltangenten hindurchgehen; und ein specielles solches System wird von ihm (Cr. J. Bd. 49, S. 332) und eines von Salmon (Higher plane curves, 1. Ausg. 1852) mitgetheilt. Auf die von Ersterem gestellte Frage nach *allen* derartigen 7-Systemen bin ich in Bd. 15 dieser Annalen**) soweit eingegangen, dass ich einmal 135 7-Systeme nachwies, welche je zu irreductibeln Gleichungen mit „Tripeleigenschaft" und mit einer Gruppe von 168 Substitutionen gehören; sodann dass ich 315 . 6 und 315 . 18 „uneigentliche" Systeme construirte, in welchen je *einer* der Kegelschnitte ausgezeichnet auftrat. Aus Anlass der von der bayer. Akad. demnächst erfolgenden Herausgabe der gesammelten Abhandlungen Hesse's will ich die Frage hier vollständig beantworten, indem ich alle möglichen 7-Systeme aufstelle und durch ihre, für die Substitutionsgruppe der Doppeltangenten invarianten Eigenschaften charakterisire. Es ergiebt sich insbesondere eine zweite Art von irreductibeln Systemen, welche je auf eine Galois'sche Gleichung 7ten Grades führen, an Zahl 120 . 288; und — eingeschlossen die schon genannten beiden Arten von uneigentlichen Systemen — im Ganzen fünf verschiedene Arten reductibler Systeme.

*) Auszugsweise mitgetheilt in den Sitzungsber. der bayer. Akad. vom 9. Febr. 1895.

**) „Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung."

1. *Bezeichnungen.* Ich bediene mich für die Doppeltangenten (oder „Dtn") der Hesse'schen Bezeichnung (ik), wo die Indices i und k von $1, 2, \ldots 8$ gehen, $k \neq i$ und $(ki) = (ik)$ ist. Von den in Math. Ann. 15 auseinandergesetzten Rechenregeln gebrauche ich hier folgende: Es werden Combinationen zu irgend einer Ordnung μ gebildet: $i_1 k_1 i_2 k_2 \ldots i_\mu k_\mu$, wobei die Anordnung aller Indices gleichgültig ist und zwei gleiche Indices sich gegegenseitig aufheben. Ist μ gerade, so gelangt man hierbei zu den „Steiner'schen Gruppen" (oder: „St. Gn"), von welchen 63 gleichberechtigte $[ik]$, $[iklm] \equiv [i'k'l'm']$, wo $iklmi'k'l'm'$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots 8$ vorstellt, existiren; die Combination $[12345678]$ ist hierbei als $\equiv 0$ betrachtet. Ist μ ungerade, so gelangt man zu den 28 obigen Zeichen: (ik), und zu den 36 unter einander gleichberechtigten Zeichen (für Schaaren von Berührungscurven 3[ter] Ordnung erster Art): $(iklm)$, (12345678).

Irgend eine St. G. $[a]$ lässt sich auf sechs Arten in Paare der Art $i_1 k_1 . i_2 k_2$ zerlegen; und jede der $2 . 6$ entstehenden Dtn $(i_1 k_1), \ldots$ heisst: „in $[a]$ enthalten", insofern eben $a i_1 k_1 \equiv i_2 k_2$ wieder von der Form ik wird. Zwei St. Gn $[a]$, $[b]$ heissen „syzygetisch" (Ausdruck von Frobenius), wenn $[b]$ sich gegen die beiden Dtn eines (und dann eines jeden) Paars von $[a]$ gleichmässig verhält, d. h. beide enthält oder beide nicht enthält. Drei syzygetische St. Gn $[a]$, $[b]$, $[c]$, für welche die Combination $[abc] \equiv 0$, also $[c] \equiv [ab]$ ist, mögen ein „Steiner'sches Tripel" heissen; sie enthalten vier Dtn

$$(i_1 k_1), \quad (i_2 k_2), \quad (i_3 k_3), \quad (i_4 k_4)$$

gemeinsam, für welche die Combination

$$[i_1 k_1 i_2 k_2 i_3 k_3 i_4 k_4] \equiv 0$$

ist, d. h. deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte

$$\mathfrak{K} = i_1 k_1 \,.\, i_2 k_2 \,.\, i_3 k_3 \,.\, i_4 k_4$$

liegen; und es wird

$$[a] = [i_1 k_1 i_2 k_2], \quad [b] = [i_1 k_1 i_3 k_3], \quad [c] = [i_1 k_1 i_4 k_4].$$

Die 315 gleichberechtigten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und die 315 gleichberechtigten Steiner'schen Tripel entsprechen einander also ein-eindeutig: zu jedem $\mathfrak{K}$ „gehören" die drei Gruppen des entsprechenden Steiner'schen Tripels.

Die verschiedenen Kegelschnitte und St. Gn lassen sich aus einander ableiten, indem man die Substitutionen der Art $\{ik\}$, $\{iklm\}$, welche die Gruppe der Ordnung $8!\,36$ der Doppeltangentengleichung erzeugen, wiederholt anwendet. Eine solche Substitution $\{a\}$ führt eine Dt. (ik) in (aik) über, oder lässt sie unverändert, je nachdem (ik) in $[a]$ enthalten ist, oder nicht; sie ändert also eine zu $[a]$ syzygetische St. G. $[b]$ nicht, und führt die übrigen St. Gn $[b]$ in $[ab]$ über.

2. *Die beiden Arten von Beziehungen zwischen den Kegelschnitten* $\mathfrak{K}$. Die möglichen Beziehungen zweier Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ gegen einander sind von mir in Math. Ann. 15 gegeben worden, ausführlicher auf demselben Wege von Hrn. Pascal*), der auch die Beziehungen zwischen je dreien der $\mathfrak{K}$ daraus abgeleitet hat. Was davon hier zu benutzen ist, sei zunächst angeführt.

Die Substitutionsgruppe, welche einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ unverändert lässt, besteht aus den $12 . 64$ Substitutionen, die durch diejenigen $\{a\}$ erzeugt werden, für welche $[a]$ syzygetisch ist zu den drei zu $\mathfrak{K}$ gehörigen St. Gn, verbunden mit 6 Substitutionen, welche diese drei St. Gn in einander überführen.

Die Gruppirung der Dtn gegenüber einem $\mathfrak{K}$, etwa

$$K = 12 . 34 . 56 . 78,$$

ergiebt sich aus dessen „Zerlegungsschema“, welches seinen drei St. Gn entspricht und alle nicht in K vorkommenden Dtn enthält:

$$[1234] = 13 . 24, \quad 14 . 23, \quad 57 . 68, \quad 58 . 67,$$
$$[1256] = 15 . 26, \quad 16 . 25, \quad 37 . 48, \quad 38 . 47,$$
$$[1278] = 17 . 28, \quad 18 . 27, \quad 35 . 46, \quad 36 . 45.$$

Danach zerfallen die $\mathfrak{K}$, welche keine Dt. mit K gemeinsam haben, in zwei Arten:

1) K', *erster Art gegen* K, in Zeichen $(KK')_1$. Ein K' ist gebildet durch zwei Paare derselben St. G. von K; und solcher K' giebt es 18. Z. B. $K' = 13 . 24 . 14 . 23$.

2) K'', *zweiter Art gegen* K, in Zeichen $(KK'')_2$. Ein K'' entsteht, indem man aus zweien der St. Gn von K je zwei Dtn, von der Gesammtcombination $\equiv 0$, nimmt. Solcher K'' giebt es 144. Z. B. $K'' = 13 . 14 . 37 . 47$.

Vermöge der Substitutionsgruppe von K sind sowohl die 18 K' unter einander, als die 144 K'' unter einander, K gegenüber, gleichwerthig. Die charakterisirende Eigenschaft lässt sich auch so aussprechen:

„Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, welche eine Dt. gemeinsam haben, stehen *in Beziehung erster Art* $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_1$ oder *zweiter Art* $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_2$, je nachdem die beiden zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ gehörigen Steiner'schen Tripel eine St. G. gemeinsam haben oder nicht.“

Man kann noch hinzufügen, dass für $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_1$ die nicht gemeinsamen St. Gn von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ gegeneinander syzygetisch sind; dass aber für $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_2$ in $\mathfrak{K}$ eine St. G. ausgezeichnet ist, indem sie gegen alle drei St. Gn von $\mathfrak{K}_1$ syzygetisch ist und keine der vier Dtn von $\mathfrak{K}_1$ enthält, während die übrigen beiden St. Gn von $\mathfrak{K}$ nur gegen *eine* Gruppe von $\mathfrak{K}_1$

*) Rend. d. R. Accad. dei Lincei, 1892, Nr. 11, 12; 1893, Nr. 1.

syzygetisch sind; und umgekehrt ist die letztere Gruppe von $\mathfrak{K}_1$ ebenso $\mathfrak{K}$ gegenüber ausgezeichnet. Im obigen Beispiel ist die gemeinsame St. G. von K und K': [1234]; und die ausgezeichneten St. Gn von K und K'' sind bezw. [1278], [34].

Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1)_1$ gilt, lassen sich durch einen bestimmten $\mathfrak{K}_2$ zu einem *Tripel erster Art* $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)_1$ ergänzen, indem man auch noch die letzten zwei Zerlegungen der gemeinsamen St. Gn von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ zu einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$ zusammenfasst. Die drei Glieder eines solchen Tripels sind also einer und derselben St. G. zugeordnet, sie gehen gleichartig ein und stehen gegenseitig in Beziehung erster Art. Umgekehrt gehören zu jeder St. G., den verschiedenen Zusammenfassungen ihrer sechs Zerlegungen entsprechend, 15 verschiedene Tripel erster Art, von denen es daher 63 . 15 giebt. Einem $\mathfrak{K}$ gegenüber bestehen die 18 $\mathfrak{K}'$, wo $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ gilt, somit aus 9 *Paaren* erster Art; ein solches Paar zu

$$K = 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \,.\, 78$$

ist z. B.

$$K_1' = 13 \,.\, 24 \,.\, 14 \,.\, 23, \quad K_2' = 57 \,.\, 68 \,.\, 58 \,.\, 67.$$

Auch die 144 Kegelschnitte $\mathfrak{K}''$, welche zu einem gegebenen $\mathfrak{K}$ die Beziehung zweiter Art $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}'')_2$ haben, treten $\mathfrak{K}$ gegenüber in 72 *Paaren* auf, $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_2''$, für welche jeweils $(\mathfrak{K}_1''\mathfrak{K}_2'')_1$ gilt; indem nämlich $\mathfrak{K}_2''$ jene vier Dtn enthält, welche die vier Dtn von $\mathfrak{K}_1''$ in den Zerlegungen der beiden St. Gn von $\mathfrak{K}''$, aus denen $\mathfrak{K}_1''$ genommen ist, ergänzen. Z. B.

$$K = 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \,.\, 78, \quad K_1'' = 13 \,.\, 14 \,.\, 37 \,.\, 47, \quad K_2'' = 24 \,.\, 23 \,.\, 48 \,.\, 38.$$

Zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}''$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}'')_2$ gilt, ist ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ *conjugirt*, nämlich der der vier Dtn, welche in den nach dem Obigen ausgezeichneten, gegen einander syzygetischen, beiden St. Gn von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$ gemeinsam enthalten sind. Dieser $\mathfrak{K}'$ hat gegen die beiden $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}''$, zu welchen er conjugirt ist, die Beziehungen $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$, $(\mathfrak{K}''\mathfrak{K}')_1$; und diese letztere Eigenschaft charakterisirt $\mathfrak{K}'$ ebenfalls eindeutig. Auch hat man die Eigenschaft, dass, wenn $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_2''$ eines der *Paare*, zweiter Art gegenüber $\mathfrak{K}$, bilden, der zu $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1''$ conjugirte Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ identisch ist mit demjenigen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_2''$ zu einem Tripel erster Art ergänzt.

So ist zu $K = 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \,.\, 78$, $K_1'' = 13 \,.\, 14 \,.\, 37 \,.\, 47$ conjugirt: der zu [1278] und [34] gehörige Kegelschnitt $K' = 35 \,.\, 36 \,.\, 45 \cdot 46$; und dieser bildet auch mit K_1'' und $K_2'' = 24 \,.\, 23 \,.\, 48 \,.\, 38$ ein Tripel erster Art, der St. G. [34] entsprechend.

Noch sei bemerkt, dass, wenn man einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ aus zwei St. Gn von $\mathfrak{K}$ zu Tripeln erster Art $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)_1$ und $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_2')_1$ ergänzt, die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ gegen die beiden Kegelschnitte

$\mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_2'$ sich gleichmässig verhalten, d. h. nur zu Beziehungen erster, oder nur zu solchen zweiter Art führen. Durch das erste Tripel ist das zweite im ersten Fall eindeutig, im zweiten Fall zweideutig bestimmt. Im ersten Falle ergänzen sich zwei Kegelschnitte, wie $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_1'$, je durch einen bestimmten aus der dritten St. G. von $\mathfrak{K}$ zu einem Tripel erster Art $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_1'')_1$. Im zweiten Falle ist der zu $(\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_1')_2$ conjugirte Kegelschnitt eben $\mathfrak{K}$ selbst.

3. *Die eigentlichen* 7-*Systeme erster Art* (*Tripelsysteme*). Ein solches System entsteht aus einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, indem man $\mathfrak{K}$ aus jeder seiner St. Gn zu einem Tripel erster Art ergänzt, aber so, dass nur Beziehungen erster Art vorkommen. Nach Nr. 2 ist durch das erste Tripel $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)_1$ des Quadrupel der vier übrigen Kegelschnitte $(\mathfrak{K}_3\mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5\mathfrak{K}_6)_1$ eindeutig bestimmt, wenn man von $\mathfrak{K}$ ausgeht; und man gelangt zum selben Quadrupel, nur in anderer Paartheilung, wenn man $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ im Tripel $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2)_1$ auszeichnet. Umgekehrt führt ein Quadrupel $(\mathfrak{K}_3\mathfrak{K}_4\mathfrak{K}_5\mathfrak{K}_6)_1$ durch Theilung $\mathfrak{K}_3\mathfrak{K}_4$, $\mathfrak{K}_5\mathfrak{K}_6$ auf zwei syzygetische St. Gn, also auf $\mathfrak{K}$, und durch andere Theilung auf $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$. Somit entsprechen sich die Tripel und Quadrupel gegenseitig eindeutig, und bilden je zusammen ein *Siebentripelsystem*. Solcher giebt es, indem 63 . 15 Tripel erster Art existiren, im Ganzen

$$\frac{63\,.\,15}{7} = 135.$$

So z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad K_1 = 13.24.57.68,\quad K_2 = 14.23.58.67,$$
$$K_3 = 15.26.37.48,\quad K_4 = 16.25.38.47,\quad K_5 = 17.28.35.46,$$
$$K_6 = 18.27.36.45,$$

mit den Tripeln:

$$(KK_1K_2),\ (KK_3K_4),\ (KK_5K_6),\ (K_1K_3K_5),\ (K_1K_4K_6),$$
$$(K_2K_3K_6),\ (K_2K_4K_5).$$

Jedem der sieben $\mathfrak{K}$-Tripel eines Systems gehört *eine* St. G. zu, was sieben gegeneinander syzygetische St. Gn liefert; und zu jeder dieser St. Gn gehört *ein* $\mathfrak{K}$-Tripel des Systems. Ferner entspricht jedem einzelnen der sieben Kegelschnitte des Systems *ein* Steiner'sches Tripel aus diesen sieben Gruppen, und umgekehrt. D. h.

> „Einem Tripelkegelschnittsystem entspricht eindeutig ein Tripelsystem von sieben Steiner'schen, zu einander syzygetischen, Gruppen; und zwar je den Elementen des einen Systems die Tripel des anderen". (Vgl. System S in Math. Ann. 15, pag. 95.)

Im obigen Beispiel besteht das neue System aus den St. Gn

[1234], [1256], [1278], [1357], [1368], [1458], [1467].

Man erhält alle Tripelsysteme von St. Gn, wenn man von irgend drei St. Gn $[a]$, $[b]$, $[c]$ ausgeht, welche in syzygetischer Beziehung zu einander stehen und deren Combination $[abc]$ nicht $\equiv 0$ ist, indem man alle Combinationen derselben bildet, in:

$$[a],\ [b],\ [c],\ [ab],\ [ac],\ [bc],\ [abc],$$

mit den Tripeln:

$$[a],\ [b],\ [ab];\quad [a],\ [c],\ [ac];\quad [b],\ [c],\ [bc];$$
$$[a], [bc], [abc];\quad [b], [ac], [abc];\quad [c], [ab], [abc];\quad [ab][ac][bc].$$

Aus der Gruppe von 64 . 168 Substitutionen, welche die sieben St. Gn des Systems in einander überführen, erhält man diejenige von 64 Substitutionen, welche alle sieben St. Gn unverändert lassen, hier als Product der sechs vertauschbaren Substitutionsgruppen zweiter Ordnung (wobei $\{0\}$ die identische Substitution bedeutet):

$$\{0\},\ \{a\};\quad \{0\},\ \{b\};\quad \{0\},\ \{ab\};$$
$$\{0\},\ \{c\};\quad \{0\},\ \{ac\};\quad \{0\},\ \{bc\};$$

während

$$\{abc\} \equiv \{a\}\{b\}\{c\}\{ab\}\{ac\}\{bc\}$$

ist. Nach Lösung einer Tripelgleichung hat man also zur Aufsuchung der Dtn nur noch sechs quadratische Gleichungen zu lösen. Die Gruppe von 64 . 168 Substitutionen selbst erhält man durch Verbindung der angegebenen 64 mit einem Product $STUVW$, wo man unter S, T, U, V, W im oben angegebenen Beispiel etwa bezw. die Potenzen von folgenden Substitutionen 7ter, 2ter, 3ter, 2ter, 2ter Ordnung verstehen kann:

$$s = \{71\}\{73\}\{72\}\{76\}\{75\}\{74\},\qquad t = \{12\}\{56\},$$
$$u = \{13\}\{15\}\{24\}\{26\},\qquad v = \{12\}\{34\},$$
$$w = \{13\}\{24\};$$

eine Substitutionsgruppe, welche aus der von 64 . 168 dadurch herausgenommen ist, dass sie zugleich die Dtn des Aronhold'schen 7-Systems

$$(81),\ (82),\ \ldots,\ (87)$$

in einander überführt.

4. *Die eigentlichen 7-Systeme zweiter Art.* Man kann irreductible Systeme zweiter Art aufstellen, d. h. solche, deren sieben Kegelschnitte alle in Beziehung zweiter Art zu einander stehen. Ein solches ist z. B.

$$K_0 = 12.34.56.78,\quad K_1 = 14.27.35.68,\quad K_2 = 15.36.47.28,$$
$$K_3 = 16.24.57.38,\quad K_4 = 13.25\cdot 67.48,\quad K_5 = 26.37.45.18,$$
$$K_6 = 17.23.46.58.$$

Um die Eigenschaften dieses Systems zu erkennen, combinire man die sieben Kegelschnitte desselben auf alle Weisen zu Paaren und

bestimme zu jedem der Paare die nach Nr. 2 darin ausgezeichneten beiden St. Gn und den conjugirten Kegelschnitt. Dies liefert die Tabelle:

Paar $K_l K_m$	Ausgez. St. G. in K_l	K_m	Conjugirter $K_{l,m}$	Zugeordneter K_n
$K_0 K_1$	[1256]	[1468]	16 . 25 . 37 . 48	K_4
$K_0 K_2$	[1234]	[1457]	14 . 23 . 57 . 68	K_1
$K_0 K_3$	[1278]	[1368]	27 . 36 . 45 . 18	K_5
$K_0 K_4$	[1278]	[1367]	17 . 36 . 45 . 28	K_2
$K_0 K_5$	[1234]	[1458]	14 . 23 . 67 . 58	K_6
$K_0 K_6$	[1256]	[1467]	16 . 25 . 47 . 38	K_3
$K_1 K_2$	[1468]	[1258]	25 . 37 . 46 . 18	K_5
$K_1 K_3$	[1345]	[1567]	15 . 34 . 67 . 28	K_2
$K_1 K_4$	[1247]	[1367]	17 . 24 . 36 . 58	K_6
$K_1 K_5$	[1247]	[1378]	17 . 24 . 38 . 56	K_3
$K_1 K_6$	[1345]	[1578]	15 . 26 . 34 . 78	K_0
$K_2 K_3$	[1258]	[1246]	12 . 37 . 46 . 58	K_6
$K_2 K_4$	[1457]	[1348]	14 . 26 . 57 . 38	K_3
$K_2 K_5$	[1356]	[1378]	13 . 24 . 56 . 78	K_0
$K_2 K_6$	[1356]	[1237]	13 . 27 . 56 . 48	K_4
$K_3 K_4$	[1246]	[1235]	12 . 35 . 46 . 78	K_0
$K_3 K_5$	[1567]	[1458]	15 . 23 . 67 . 48	K_4
$K_3 K_6$	[1368]	[1237]	13 . 27 . 45 . 68	K_1
$K_4 K_5$	[1235]	[1268]	12 . 35 . 47 . 68	K_1
$K_4 K_6$	[1348]	[1578]	26 . 34 . 57 . 18	K_5
$K_5 K_6$	[1268]	[1467]	16 . 35 . 47 . 28	K_2

Hiernach führt jedes Paar $K_l K_m$ zunächst auf einen ganz bestimmten weiteren Kegelschnitt K_n des Systems, nämlich auf den, welcher mit dem zum Paar conjugirten Kegelschnitt $K_{l,m}$ *zwei* Dtn gemeinsam hat. Irgend ein Kegelschnitt K_n wird auf diese Weise aus drei verschiedenen Paaren erhalten; und diese drei Paare sind zugleich den drei St. Gn von K_n einzeln zugeordnet, insofern die Combination aus den beiden ausgezeichneten St. Gn des Paars die zugehörige St. G. von K_n, welche jene zwei Dtn gepaart enthält, liefert. Dieselbe St. G. tritt auch in den Paaren $K_n K_l$ und $K_n K_m$ ausgezeichnet auf.

Weiter zeigt die Tabelle, dass, wenn das Paar $K_l K_m$ auf K_n und das Paar $K_l K_n$ auf K_p führt, das Paar $K_l K_p$ wieder zurück auf K_m führt.

Einem Kegelschnitt K_l des Systems gegenüber ordnen sich also die sechs übrigen Kegelschnitte nicht nur zu drei Paaren, sondern auch zu zwei Ternen, von denen jede *einen* Cykel $K_m K_n K_p$ bildet. Hier treten in den drei Paaren $K_l K_m$, $K_l K_n$, $K_l K_p$ die drei verschiedenen St. Gn von K_l ausgezeichnet auf.

Das Schema dieser Zuordnungen schreibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} K_1 K_6 \\ K_4 K_3 \\ K_2 K_5 \end{array}\right\} K_0, \quad \left.\begin{array}{l} K_2 K_0 \\ K_5 K_4 \\ K_3 K_6 \end{array}\right\} K_1, \quad \left.\begin{array}{l} K_3 K_1 \\ K_6 K_5 \\ K_4 K_0 \end{array}\right\} K_2,$$

$$\left.\begin{array}{l} K_4 K_2 \\ K_0 K_6 \\ K_5 K_1 \end{array}\right\} K_3, \quad \left.\begin{array}{l} K_5 K_3 \\ K_1 K_0 \\ K_6 K_2 \end{array}\right\} K_4, \quad \left.\begin{array}{l} K_6 K_4 \\ K_2 K_1 \\ K_0 K_3 \end{array}\right\} K_5, \quad \left.\begin{array}{l} K_0 K_5 \\ K_3 K_2 \\ K_1 K_4 \end{array}\right\} K_6;$$

d. h.: K_0 gegenüber hat man die drei Paare $K_1 K_6$, $K_4 K_3$, $K_2 K_5$ und die zwei cyklischen Ternen $K_1 K_4 K_2$, $K_6 K_3 K_5$; etc.

Hiernach ist die Gleichung 7^{ten} Grades, welche die sieben $\mathfrak{K}$ des Systems liefert, irreductibel, und aus irgend zwei ihrer Wurzeln ergeben sich alle übrigen eindeutig. Die Gleichung ist eine Galois'sche, mit der metacyklischen Substitutionsgruppe für die Indices l der sieben Kegelschnitte:

$$(l \mid \alpha l + \beta)$$

$$[l = 0, 1, \ldots 6;\ \alpha = 1, 2, \ldots 6;\ \beta = 0, 1, \ldots 6 \ (\text{mod. } 7)],$$

und ist als solche mittelst Ausziehens einer quadratischen, einer cubischen und einer siebenten Wurzel algebraisch lösbar.

In den Substitutionen für die Dtn ausgedrückt, schreibt sich dieselbe Gruppe der Ordnung 7 . 6 als Product der sieben Potenzen der Substitution

$$\sigma = \{76\}\,\{72\}\,\{73\}\,\{74\}\,\{71\}\,\{75\}$$

mit den sechs Potenzen der Substitution

$$\tau = \{61\}\,\{64\}\,\{65\}\,\{62\}\,\{63\},$$

d. h. mit den sechs Substitutionen:

$$\{0\},\ \tau,\ \tau^2 = \{64\}\,\{62\}\,\{53\}\,\{51\},\ \tau^3 = \{12\}\,\{34\}\,\{56\},$$

$$\tau^4 = \{62\}\,\{64\}\,\{51\}\,\{53\},\ \tau^{-1}.$$

Während in dem 7-System die drei St. Gn jedes der sieben $\mathfrak{K}$ gleichwerthig auftreten, ist dies mit dessen vier Dtn nicht der Fall, sondern es ist jeweils eine vor den übrigen drei ausgezeichnet. In der That enthalten die drei Kegelschnitte $K_{1,6}$, $K_{4,3}$, $K_{2,5}$, welche zu den drei K_0 zugeordneten Paaren conjugirt sind, sämmtlich die eine Dt. (78) von K_0, aber immer nur *je* eine der übrigen drei Dtn; und ferner kommt in den übrigen achtzehn conjugirten $K_{l,m}$ die Dt. (78) überhaupt

nicht vor, die übrigen drei Dtn von K_0 aber je zweimal. Auf diese Weise sind in den sieben Kegelschnitten des Systems bezw. die folgenden Dtn ausgezeichnet:

$$(78),\quad (68),\quad (28),\quad (38),\quad (48),\quad (18),\quad (58).$$

Dieselben bilden ein Aronhold'sches 7-System von Dtn, nämlich eines der acht zur Combination (12345678) gehörigen.

Da durch ein Aronhold'sches 7-System sämmtliche Dtn der Curve bestimmt sind, so schliesst man, dass durch Bestimmung der sieben Kegelschnitte des 7-$\mathfrak{K}$-Systems ebenfalls die 28 Dtn von einander isolirt sind. Indem also hierdurch die Gruppe der Doppeltangentengleichung, von der Ordnung $8!\,36$, auf die identische Substitution reducirt ist, das 7-$\mathfrak{K}$-System aber eine Gruppe von der Ordnung 7.6 hat, so folgt sogleich weiter:

> „dass von den charakterisirten Systemen zweiter Art im Ganzen $\frac{8!\,36}{7.6} = 120\,.\,8\,.\,36$ gleichwerthige existiren, und dass dieselben den $8\,.\,36$ Aronhold'schen 7-Systemen von Dtn je zu 120 zugeordnet sind."

Man kann dies auch so ausdrücken: Für die allgemeine Gleichung 7ten Grades, welche die sieben Dtn des obigen Aronhold'schen Systems liefert, mit einer Gruppe von der Ordnung $7!$, stellt eine symmetrische Function der Kegelschnitte des 7-$\mathfrak{K}$-Systems eine „metacyklische" Function vor, die noch $5!$ Werthe annehmen kann; die Adjunction eines dieser Werthe bringt jene Gleichung auf die des 7-$\mathfrak{K}$-Systems zurück.

Um aus dem obigen 7-$\mathfrak{K}$-System alle übrigen 7-$\mathfrak{K}$-Systeme abzuleiten, kann man zunächst alle Vertauschungen der Dtn-Indices $1, 2, \ldots 5$ vornehmen, was auf die 120 zu dem obigen Aronhold'schen 7-Dtn-System gehörigen Systeme führt; alsdann die sieben Substitutionen $\{87\}$, $\{86\}, \ldots, \{81\}$ auf dieselben ausüben, was die $120\,.\,8$ zu $(12\ldots8)$ gehörigen Systeme ergiebt; und endlich auf die letzteren noch die 35 Substitutionen der Art $\{iklm\}$; mit anderen Worten: man hat nur unter dem obigen 7-System (78), (68), (28), ..., (58) irgend eines der Aronhold'schen 7-Systeme, in irgend einer Reihenfolge genommen, zu verstehen.

Bildet man ein 7-$\mathfrak{K}$-System nur nach der Eigenschaft, dass seine Glieder zu einander in Beziehung zweiter Art stehen sollen, indem man etwa aus dem Zerlegungsschema von K_0 successive die möglichen $K_1, K_4, K_2, K_6, K_3, K_5$ dazu aufstellt, so findet man ebenfalls

$$\frac{315\,.\,144\,.\,8\,.\,4}{7\,.\,6} = 5!\,8\,.\,36$$

Systeme; d. h. auch die bezeichnete Eigenschaft definirt die Systeme vollständig (vgl. Nr. 6, ζ_1).

5. *Die uneigentlichen* 7-*Systeme.* Es mögen zunächst fünf verschiedene Arten solcher, unter sich gleichwerthiger, Systeme aufgestellt, nachher aber bewiesen werden, dass keine weiteren Arten existiren.

a) Man ergänze, wie in Nr. 3, einen Kegelschnitt K aus den Zerlegungen von jeder seiner drei St. Gn zu einem *Tripel erster Art;* aber so, dass die drei Paare

$$(A_1 A_2)_1, \quad (B_1 B_2)_1, \quad (C_1 C_2)_1,$$

gegen einander nur Beziehungen *zweiter* Art bilden. In einem solchen System zeigt dann K ein besonderes Verhalten, tritt also ausgezeichnet vor den sechs übrigen $\mathfrak{K}$ des Systems auf. Nach Schluss von Nr. 2 giebt es zum ersten Tripel KA_1A_2 bei Auswahl von K aus der zweiten St. G. von K dann noch zwei verschiedene der Bedingung genügende Paare für B_1B_2, aus der dritten St. G. von K alsdann nur noch ein Paar für C_1C_2. Es existiren also 315 . 6 derartige Systeme. Z. B.

$$\begin{aligned} K = 12.34.56.78, \quad A_1 &= 13.24.57.68, \quad A_2 = 14.23.67.58, \\ B_1 &= 15.26.47.38, \quad B_2 = 16.25.37.48, \\ C_1 &= 17.28.27.18, \quad C_2 = 35.46.36.45. \end{aligned}$$

c) Man verfahre wie in a), nur dass von den drei Paaren zwei gegeneinander in Beziehung *erster* Art, gegen das dritte in Beziehung *zweiter* Art stehen sollen. Auch in einem solchen System ist dann K ausgezeichnet. Aus K ergeben sich noch 18 Möglichkeiten, die drei übrigen Paare nach den Bedingungen zu wählen, so dass 315 . 18 derartige Systeme existiren. Z. B.

$$\begin{aligned} K = 12.34.56.78, \quad A_1 &= 13.24.57.68, \quad A_2 = 14.23.67.58, \\ B_1 &= 15.26.37.48, \quad B_2 = 16.25.38.47, \\ C_1 &= 17.28.27.18, \quad C_2 = 35.46.36.45. \end{aligned}$$

Hier ist $(A_1 A_2 B_1 B_2)$, eines der am Anfang von Nr. 3 erwähnten Quadrupel, aber nicht das zum Tripel $(KC_1C_2)_1$ gehörige.

In a) und b) hat man die schon in Math. Ann. 15 angegebenen uneigentlichen Systeme.

c) Zu K nehme man sechs Kegelschnitte, welche sämmtlich zu K in Beziehung *zweiter* Art stehen und zugleich, K gegenüber, drei *Paare* bilden (s. Nr. 2): $(A_1A_2)_1$, $(B_1B_2)_1$, $(C_1C_2)_1$. Die drei Paare stehen dann gegeneinander nur in Beziehung zweiter Art; und in dem System tritt wiederum K ausgezeichnet auf.

Man kann dabei das Paar A_1, A_2 aus der zweiten und dritten St. G. von K auf 24 verschiedene Weisen, dann B_1, B_2 aus der ersten und dritten St. G. von K auf vier Weisen, endlich C_1, C_2 aus der ersten und zweiten St. G. auf zwei Weisen wählen. Es existiren also 315 . 24 . 4 . 2 = 315 . 192 derartige Systeme. Zu denselben gehört auch das von Hesse Cr. J. 49 angeführte. Z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad A_1 = 16.38.27.45,\quad A_2 = 18.36.25.47,$$
$$B_1 = 14.67.28.35,\quad B_2 = 17.46.23.58,$$
$$C_1 = 13.57.26.48,\quad C_2 = 15.37.24.68.$$

d) Zu K nehme man ein Paar $(A_1 A_2)_1$, das mit K ein Tripel erster Art bilde; für B_1, B_2 zwei, K gegenüber nicht gepaarte, Kegelschnitte, in Beziehung erster Art zu einander und zu K, zweiter Art zu A_1 und A_2; für C_1, C_2 endlich noch zwei Kegelschnitte, die K gegenüber in Beziehung zweiter Art und gepaart sind, und die alsdann zugleich A_1, A_2, B_1, B_2 gegenüber in Beziehung zweiter Art stehen werden. Auch hierbei ist K ausgezeichnet. Z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad A_1 = 13.24.57.68,\quad A_2 = 14.23.67.58,$$
$$B_1 = 15.26.47.38,\quad B_2 = 17.28.36.45,$$
$$C_1 = 16.48.18.46,\quad C_2 = 25.37.27.35.$$

Dabei ist A_1, A_2 auf 3.3, dann B_1, B_2 auf 4.2, C_1, C_2 auf 2 Weisen wählbar; so dass 315.144 derartige Systeme existiren.

e) Man verbinde wieder ein Tripel erster Art $(K K_1 K_2)_1$ mit einem der am Anfang von Nr. 3 erwähnten Quadrupel $(A_1 A_2 A_3 A_4)_1$, aber mit einem solchen, dessen Kegelschnitte zu denen des Tripels alle in Beziehung *zweiter* Art stehen. In einem solchen System ist dann ein Tripel erster Art ausgezeichnet.

Zu jedem Tripel lassen sich hierbei acht der Bedingung genügende Quadrupel aufstellen, so dass 63.15.8 derartige Systeme existiren. Z. B.

$$K = 12.34.56.78,\quad K_1 = 13.24.57.68,\quad K_2 = 14.23.67.58,$$
$$A_1 = 15.38.27.46,\quad A_2 = 18.35.26.47,$$
$$A_3 = 16.37.28.45.\quad A_4 = 17.36.25.48.$$

6. *Sämmtliche 7-Systeme.* Um den Beweis zu führen, dass die in Nr. 3, 4 und 5 angegebenen 7-Systeme sämmtliche existirenden erschöpfen, kann man folgenden Weg einschlagen. Man geht, an der Hand des Zerlegungsschema eines bestimmten Kegelschnitts K, von allen möglichen *Ternen* von drei Kegelschnitten aus und sucht dieselben zu 7-Systemen zu ergänzen; was in systematischer Weise und unter Bezeichnung der Kegelschnitte mit K; A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, leicht so ausgeführt werden kann:

α) $(K A_1 A_2)_1$ und $(K B_1 B_2)_1$ bilden Tripel erster Art; führt auf Nr. 3 oder Nr. 5, a), b).

β) $(K A_1 A_2)_1$ bilden ein Tripel erster Art:

β_1) B_1, B_2 erster Art, aber nicht gepaart gegen K; dann, wenn nicht Fall α), nur gegenüber A_1 oder A_2, eintreten soll: entweder $(B_1 B_2)$ gegenüber $(A_1 A_2)$ in Beziehung zweiter Art, und $(B_1 B_2)_1$, was nur zu Nr. 5, d) führt. Oder $(B_1 A_1)_1$, $(B_1 A_2)_1$, $(B_2 A_1)_2$, $(B_2 A_2)_2$, was keine C_1, C_2 zulässt.

β_2) B_1 erster, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K: existirt nicht.

β_3) B_1, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K, A_1 und A_2: giebt nur Nr. 5, e).

γ) K, A_1, A_2 gegeneinander erster Art, aber kein Tripel erster Art bildend, und kein Tripel erster Art kommt im System vor:

γ_1) $(KB_1)_1$, $(A_1B_1)_1$, $(A_2B_1)_1$. Dann bilden die übrigen drei $\mathfrak{K}$ ein Tripel erster Art, gegen die Voraussetzung.

γ_2) $(KB_1)_1$, $(A_1B_1)_1$, $(A_2B_1)_2$: existirt nicht.

γ_3) $(KB_1)_1$, $(A_1B_1)_2$, $(A_2B_1)_1$: die übrigen drei $\mathfrak{K}$, die zweiter Art gegen K sein sollen, existiren nicht.

γ_4) B_1, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K: existirt wieder nicht.

δ) $(KA_1)_1$, $(KA_2)_1$, $(A_1A_2)_2$:

δ_1) $(KB_1)_1$. Dann, wenn nicht Fall γ) eintreten soll: $(A_1B_1)_2$, $(A_2B_1)_2$, was keinen B_2 liefert.

δ_2) B_1, B_2, C_1, C_2 zweiter Art gegen K; liefert wieder nichts.

ε) $(KA_1)_1$. Die übrigen fünf $\mathfrak{K}$ zweiter Art gegen K und A_1. Dies führt auf Fall Nr. 5, c); nur wird nicht, wie dort, K, sondern einer der letzteren fünf $\mathfrak{K}$ im System ausgezeichnet.

ζ) Alle sieben $\mathfrak{K}$ des Systems zweiter Art gegen einander:

ζ_1) Wenn vier der $\mathfrak{K}$: K, A, B, C, so gegeben sind, dass B mit dem zu $(KA)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}'$ zwei Dtn und C mit dem zu $(KB)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}''$ zwei Dtn gemeinsam hat, so gelangt man nur zu drei bestimmten weiteren A_1, B_1, C_1, und das System wird von der Art der in Nr. 4 angegebenen.

ζ_2) Wenn K, A, B so gegeben sind, dass B mit dem zu $(KA)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}'$ zwei Dtn gemeinsam hat, während jeder der vier übrigen C, A_1, B_1, C_1 mit dem zu $(KB)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}''$ höchstens eine, und dann wirklich je eine, Dt. gemeinsam haben soll, so erhält man kein System.

ζ_3) Wenn K, A gegeben sind und keiner der weiteren fünf $\mathfrak{K}$ des Systems mit dem zu $(KA)_2$ conjugirten $\mathfrak{K}'$ zwei Dtn gemeinsam haben soll, d. h. wenn B, C, A_1, B_1 je eine Dt., C_1 keine Dt. von $\mathfrak{K}'$ enthalten sollen, so können schon die Bedingungen für B, C, A_1, B_1 nicht erfüllt werden.

Erlangen, Februar 1895.

Ueber die allgemeinste Differentialresolvente der homogenen linearen Differentialgleichungen.

Von

Emanuel Beke in Budapest.

Der Grundgedanke des Herrn Picard bei der gruppentheoretischen Behandlung der homogenen linearen Differentialgleichungen liegt darin, dass man — ebenso wie bei der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen — eine Function der Fundamentallösungen der Differentialgleichung bildet, welche *nur* die identische Transformation der homogenen linearen Gruppe zulässt.*)

In der Theorie der algebraischen Gleichungen muss man beweisen, dass sich eine Galois'sche Function, d. h. eine rationale Function der Wurzeln einer ganz beliebigen Gleichung, welche bei einer jeden Substitution ihren Werth verändert, immer bilden lässt, wenn nur unter den Wurzeln keine zwei gleichwerthige vorkommen**). Wir stellen uns hier die ähnliche Aufgabe, welche als eine Ergänzung der gruppentheoretischen Auffassung der homogenen linearen Differentialgleichung dienen soll. Wir wollen nämlich beweisen, dass sich immer eine Function der Fundamentallösungen bilden lässt, welche bei einer jeden homogenen linearen Transformation derselben Lösungen ihren Werth verändert. —

Nehmen wir an, dass

(1) $$x_1, x_2, \ldots x_n$$

ein System von Fundamentallösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

(2) $$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \cdots + p_n x = 0$$

darstellen. Wir müssen zeigen, dass man immer solche n Functionen

(3) $$u_1 \, u_2 \ldots u_n$$

*) Picard, Comptes rendus 1883. Annales de Toulouse 1887. Comptes rendus 1894. Annalen Bd. 46.

**) Ein einfacher Beweis dieses Satzes findet sich in H. Webers Algebra p. 457.

der unabhängigen Veränderlichen t findet, dass die, von Herrn Picard benutzte Resolvente*)

$$(4) \qquad V = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

wirklich verschiedene Werthe annimmt, wenn man die Functionen x verschiedenen linearen Substitutionen unterwirft.

Wenn man die Functionen $x_1 x_2 \ldots x_n$ zuerst der homogenen linearen Transformation

$$\bar{x}_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

dann der Transformation

$$\bar{\bar{x}}_i = a'_{i1} x_1 + a'_{i2} x_2 + \cdots + a'_{in} x_n$$

unterwirft, erhalten wir aus V zuerst die bilineare Form:

$$(5) \qquad \bar{V} = \sum_1^n {}_{i,k}\, a_{ik} u_i x_k$$

dann wieder die Form:

$$\bar{\bar{V}} = \sum_1^n {}_{i,k}\, a'_{ik} u_i x_k.$$

Wir müssen also beweisen, dass sich die Functionen (3) so bestimmen lassen, dass die Gleichung:

$$(6) \qquad \sum u_i x_k (a_{ik} - a'_{ik}) = 0$$

nur dann bestehen kann, wenn einzeln:

$$(7) \qquad a_{ik} = a'_{ik}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Nehmen wir an, dass der Punkt $t = 0$ ein gewöhnlicher Punkt der Differentialgleichung (2) sei, was wir, wie bekannt, durch eine Transformation der Gleichung (2) immer erreichen können. Dann ist bekanntlich eine jede Lösung der Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes $t=0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar in der Form:

$$(8) \qquad x_k = r_{k0} + r_{k1} t + r_{k2} t^2 + \cdots$$
$$(k = 1, 2, \ldots n).$$

Nehmen wir die Functionen u auch in Gestalt von Potenzreihen an:

$$(9) \qquad u_i = m_{i0} + m_{i1} t + m_{i2} t^2 + \cdots$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

*) Eigentlich kommt die Resolvente in dieser Gestalt zuerst bei Herrn Versiot vor. Annales de l'École normal 1892. Herr Picard betrachtet auch die Differentialquotienten der Fundamentallösungen.

Dann erhalten wir aus der Gleichung (6) ein unendliches lineares Gleichungssystem für die n^2 Grössen:

$$a_{ik} - a'_{ik}. \tag{10}$$

Nehmen wir an, dass nicht sämmtliche

$$r_{k0}$$

verschwinden, dann sind die ersten n^2 Gleichungen:

$$\begin{gathered}
\sum m_{i0} r_{k0} (a_{ik} - a'_{ik}) = 0, \\
\sum (m_{i0} r_{k1} + m_{i1} r_{k0})(a_{ik} - a'_{ik}) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum (m_{i0} r_{ks} + m_{i1} r_{ks} + \cdots + m_{is} r_{k0})(a_{ik} - a'_{ik}) = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

wo wir statt $n^2 - 1$ der Kürze halber s setzten. —

Um den angezeigten Satz zu beweisen, d. h. um zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem nur die Lösung

$$a_{ik} - a'_{ik} = 0$$

zulässt, müssen wir zeigen, dass die Determinante von (11) nicht identisch d. h. nicht für eine jede Wahl der Grössen m verschwinden kann. Zu diesem Zwecke zeigen wir, dass diese Determinante bei einer bestimmten Wahl der Grösse m nicht verschwindet.

Wir setzen sämmtliche Coefficienten von u_i gleich 0, ausgenommen $m_{i,(i-1)n}$ welche wir von 0 verschieden annehmen.

Es sind also von 0 verschieden angenommen:

$$m_{10},\ m_{2n};\ m_{3\,2n},\ \ldots,\ m_{n,n^2-n}. \tag{12}$$

Wenn wir der Einfachheit halber diese Coefficienten gleich 1 setzen, dann reducirt sich die Determinante des Gleichungssystems (11) auf die n^{te} Potenz von

$$\begin{vmatrix}
r_{10}, & r_{20}, & \ldots & r_{n0} \\
r_{11}, & r_{21}, & \ldots & r_{n1} \\
r_{12}, & r_{22}, & \ldots & r_{n2} \\
\cdot, & \cdot, & \ldots & \cdot \\
r_{1n-1}, & r_{2n-1}, & \ldots & r_{n,n-1}
\end{vmatrix}. \tag{13}$$

Nun ist aber diese Determinante von einem Zahlenfactor abgesehen, die Determinante des Fundamentalsystems, d. h.:

$$\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)}
\end{vmatrix}$$

bei $t=0$. Da aber der Punkt $t=0$ ein gewöhnlicher Punkt der Gleichung (2) ist, so kann die Determinante, welche den Werth

$$Ce^{-\int p_1 dt}$$

hat, nur dann verschwinden, wenn $C=0$ ist. Dann wäre aber das System (1) kein Fundamentalsystem. Die Determinante R ist also von 0 verschieden. Damit haben wir bewiesen, dass die n^2 Gleichungen (7) bestehen müssen. —

Die Functionen u haben in diesem speciellen Falle eine sehr einfache Form, da

$$u_k = t^{(k-1)n}$$

ist. —

Wenn wir die Functionen u in dieser Gestalt wählen, dann können wir die homogene lineare Differentialgleichung $n^{2\text{ter}}$ Ordnung, der die Function V genügt, und welche wir nach der, von Herrn F. Klein in seinen Vorlesungen benutzten Bezeichnung *Differentialresolvente* nennen, wenigstens in den einfachsten Fällen, leicht bilden. So ist diese Differentialresolvente im Falle $n=2$, wenn die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung diese Gestalt:

$$x'' = qx$$

hat, die Folgende:

$$\begin{vmatrix} V & 1 & t^2 & 0 & 0 \\ V' & 0 & 2t & 1 & t^2 \\ V'' & q & 2+t^2q & 0 & 4t \\ V''' & q' & 6tq+t^2q' & q & 6+t^2q \\ V^{\text{IV}} & q''+q^2 & 12q+8tq'+t^2q^2+t^2q'', & 2q', & 8tq+2t^2q' \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$P_0 V^{\text{IV}} + P_1 V''' + P_2 V'' + P_3 V' + P_4 V = 0$$

wo:

$$\begin{aligned} P_0 &= 3 - 4t^2q, \\ P_1 &= 4(2tq + t^2q'), \\ P_2 &= 4(t^2q^2 - 9q - 3tq'), \\ P_3 &= 2t^2qq' - 4tq^2 - 3q', \\ P_4 &= 6q^2 - 5tqq' - 4t^2q'^2 - 3q'' + 4t^2qq''. \end{aligned}$$

Budapest, im März 1895.

On the Automorphic Linear Transformation of an Alternate Bilinear Form.

By

Henry Taber of Worcester, Mass.

§ 1.

In the *Philosophical Transactions* for 1858 Cayley gave the coefficients of the general linear substitution which transforms automorphically an alternate bilinear form of two sets of $2n$ cogrediant variables and of non-zero determinant as rational functions of the coefficients of the form and of the minimum number of parameters.*)

This representation was given in the form of a symbolic expression for such substitutions, namely

$$(\Omega - Y)^{-1}(\Omega + Y),$$

in which Ω denotes the matrix (that is, the square array of coefficients) of the form and Y denotes an arbitrary symmetric linear substitution or matrix, but such that the determinant of $\Omega - Y$ is not zero.**)

Of the group of linear substitutions satisfying the conditions stated above, all are given by Cayley's expression for finite values of the parameters (that is for Y finite), except those whose characteristic equation has -1 as a root. These substitutions of the group are not given by Cayley's representation for finite values of the parameters. Nevertheless, as shown by Frobenius in *Crelle's Journal* for 1878, the limit of Cayley's expression, as one or more of the parameters tends to infinity, gives every substitution of the group whose characteristic

*) "Memoir on the Automorphic Linear Transformation of a Bipartite Quadric Function."

**) Or in the nomenclature of Frobenius, in which Ω is the form in question and Y an arbitrary symmetric form. This symbolic expression for Cayley's representation is put here in a somewhat simpler form than as given by Cayley. But Cayley proves the identity between this expression and the one given by him, namely $\Omega^{-1}(\Omega + Y)(\Omega - Y)^{-1}\Omega$. The above expression was given by Frobenius (see note p. 2).

equation has -1 as a root.*) That is, if φ is a substitution of the group whose characteristic equation has -1 as a root, we can always find a symmetric linear substitution Y_ϱ whose coefficients (the parameters of the substitution) are rational functions of a parameter ϱ, of which one at least is infinite for $\varrho = 0$, such that for ϱ sufficiently small the several coefficients of the substitution

$$(\Omega - Y_\varrho)^{-1} (\Omega + Y_\varrho)$$

can be made as nearly as we please equal to the corresponding coefficients of φ.

Designating a linear substitution of the group as of the first or second kind according as it is or is not the square (or second power) of a linear substitution of the group, I show in what follows that every substitution given by Cayley's expression, for finite values of the parameters, is of the first kind; further that every linear substitution of the first kind is given by the square of Cayley's expression (the parameters being all finite), can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group, and is the m^{th} power of a substitution of the group for any index m. Whereas, I shall show that no linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of one and the same infinitesimal substitution of the group, nor can it be the m^{th} power of any substitution of the group for an even index m; nevertheless, corresponding to any linear substitution φ of the second kind can always be found a linear substitution ψ_ϱ of the group whose coefficients are algebraic functions of a parameter ϱ, such that for ϱ sufficiently small, the $(2m)^{\text{th}}$ power of ψ_ϱ may be made as nearly as we please equal to φ. Since we then have $\lim. (\psi_\varrho)^{2m} = \varphi$, and φ is not an even power of any linear substitution of the group, a discontinuity exists in the case of linear substitutions of the group which are of the second kind.

Finally, I show that every real linear substitution which transforms automorphically a real alternate bilinear form of two sets of congrediant variables and of non zero determinant is given by the composition or product of two of Cayley's expressions the parameters being all finite.**)

The symbolic notation mentioned above, employed by Cayley in his memoir, Cayley terms the "notation of matrices". The notation

---

*) Frobenius gives the representation at which Cayley had arrived twenty-one years earlier (Cayley's memoir was presented to the *Royal Society* in 1857) without reference to Cayley, and was of course unaware of Cayley's priority. Many of the theorems given by Frobenius in 1878 were given by Cayley in the memoir above referred to, and in his "Memoir on Matrices" also contained in the *Philosophical Transactions* for 1858.

**) See *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 29, p. 379.

employed by Frobenius is substancially identical with the notation of matrices. This notation will be employed in what follows.

In accordance with the notation of matrices, two linear substitutions are regarded as susceptible of being added or subtracted. Let $(\varphi)_{rs}$ denote the coefficient of the linear substitution φ which is the constituent in the r^{th} row and s^{th} column of its square array or matrix. Then the *sum* or *difference* of two linear substitutions φ and ψ is defined as follows:

$$(\varphi \pm \psi)_{rs} = (\varphi)_{rs} \pm (\psi)_{rs}.$$

As a linear substitution is determined by its matrix or square array of coefficients, I shall in what follows use the term matrix interchangeably with the term linear substitution.

Multiplication is taken as equivalent to the composition of linear substitutions. Consequently, multiplication is associative and distributive, but not in general commutative. That is, for any three linear substitutions φ, ψ, χ, we have

$$\varphi(\psi\chi) = (\varphi\psi)\chi,$$

and

$$\varphi(\psi+\chi) = (\varphi\psi) + (\varphi\psi),$$
$$(\varphi+\psi)\chi = (\varphi\chi) + (\psi\chi).$$

But in general we do not have

$$\varphi\psi = \psi\varphi.\text{*)}$$

Multiplication of a linear substitution or matrix by a *scalar* g (that is, a real or imaginary of ordinary algebra) is defined as follows:

$$(g\varphi)_{rs} = g(\varphi)_{rs}.$$

We have

$$g\varphi = \varphi g.$$

The *reciprocal* of a linear substitution is, of course, that linear substitution which multiplied by or into the given substitution gives the identical substitution. We have

$$(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}.$$

Following Cayley, the *identical substitution* will be denoted by 1. If g is a scalar, for the linear substitution $g1$, we have

$$(g1)_{rr} = g, \quad (g1)_{rs} = 0, \quad (r \neq s).$$

And following Cayley this substitution will be denoted simply by g. In particular, the substition whose coefficients are all zero (the substitution or *matrix zero*) will be denoted simply by 0.

Powers of a linear substitution or matrix are defined as follows:

*) If ψ is a polynomial in integer powers of φ, then $\varphi\psi = \psi\varphi$. Further, if $\varphi\psi = \psi\varphi$, and if $f(\varphi)$ and $F(\psi)$ are polynomials in φ and ψ respectively, we have $f(\varphi) \cdot F(\psi) = F(\psi) \cdot f(\varphi)$.

if m is any positive integer $\varphi^{m+1} = \varphi \, . \, \varphi^m$. We have $(\varphi^m)^{-1} = (\varphi^{-1})^m$. Consequently either member of this equation may be denoted by φ^{-m}; in which case the indexial law will be found to hold for integer powers of φ. If the linear substitution ψ satisfies the equation $\psi^m = \varphi$, in which m is a positive integer, ψ will be termed an m^{th} root of φ. Every linear substitution whose determinant does not vanish has an m^{th} root for any index m. A formula for the m^{th} root of the linear substitution φ as a polynomial in φ was given by Sylvester in the *Contes Rendus*, vol. 94, pp. 55, 396. This formula Sylvester afterwards extended to any function of φ expressable as a polynomial in φ*); and φ^m for any scalar m can be defined in accordance with this formula.

The linear substitution *transverse* or *conjugate* to φ (obtained by interchanging the rows and columns of the matrix or square array of coefficients of φ) will be denoted by $\breve{\varphi}$. We have

$$\breve{(\breve{\varphi})} = \varphi,$$

$$\breve{(\varphi + \psi)} = \breve{\varphi} + \breve{\psi},$$

$$\breve{(\varphi\psi)} = \breve{\psi}\breve{\varphi},$$

$$(\breve{\varphi}^{-1}) = (\breve{\varphi})^{-1}.$$

In particular if g is a scalar, $\breve{g} = g$. Finally, if $f(\varphi)$ denotes any polynomial in powers of φ, the tranverse of $f(\varphi)$ is $f(\breve{\varphi})$.

The linear substitution or matrix φ is *symmetric* if $(\varphi)_{rs} = (\varphi)_{sr}$, for which the necessary and sufficient condition is $\breve{\varphi} = \varphi$. The linear substitution φ is *skew symmetric* or *alternate* if $(\varphi)_{rs} = -(\varphi)_{sr}$, for which the necessary and sufficient condition is $\breve{\varphi} = -\varphi$. A polynomial in powers of a symmetric matrix is symmetric, and a polynomial in odd powers of a skew symmetric matrix is skew symmetric. If

$$\sum_{1}^{2n}{}^{i}(\varphi)^2_{ir} = 1, \quad \sum_{1}^{2n}{}^{i}(\varphi)_{ir}(\varphi)_{is} = 0,$$

for $r, s = 1, 2, \ldots (2n)$, but $r \neq s$ is *orthogonal*, for which the necessary and sufficient condition is $\breve{\varphi}\varphi = 1$.

The *determinant* of a linear substitution φ may be denoted by $|\varphi|$. If g is a scalar, the determinant of the linear substitution

$$\varphi - g = \varphi - g\,1$$

will then be denoted by $|\varphi - g|$; and the *characteristic equation* of φ is then

$$|\varphi - g| = 0.$$

---

*) *Johns Hopkins University Circulars*, 1884, p. 34.

We have

$$|\varphi\psi| = |\varphi| \cdot |\psi|,$$
$$|\breve{\varphi}| = |\varphi|,$$
$$|\varphi^{-1}| = \frac{1}{|\varphi|}\cdot$$

By a theorem of Cayley's if the roots of the characteristic equation of the linear substitution φ of $2n$ variables are $g_1, g_2, \ldots g_{2n}$, we have

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)\cdots(\varphi - g_{2n}) = 0.$$

This is termed by Cayley the "identical equation" to φ. If the roots of the characteristic equation of φ are not all distinct, there may be syzygies between powers of φ of lower order than $2n$. The syzygy between powers of φ of lowest order may be termed the *fundamental syzygy*. Every syzygy between powers of φ contains the factor $\varphi - g$ for each distinct root of the characteristic equation of φ.*)

§ 2.

Cayley's notation for the bilinear form

$$\sum_1^{2n}{}^r \sum_1^{2n}{}^s (\Omega)_{rs} x_s y_r$$

is

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

in which Ω denotes the matrix or square array of coefficients of the form. Throughout this paper it will be assumed that the form is alternate, that is, that

$$(\Omega)_{rr} = 0, \quad (\Omega)_{rs} = -(\Omega)_{sr};$$

for which the necessary and sufficient condition is

$$\breve{\Omega} = -\Omega.$$

If the x's and y's are cogrediant; and are transformed by the linear substitution φ so that

$$x_r = \sum{}^i (\varphi)_{ri}\xi_i, \qquad y_r = \sum{}^i (\varphi)_{ri}\eta_i,$$

substituting we have

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$$
$$= (\breve{\varphi}\Omega\varphi \between \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2n} \between \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{2n}).^{**})$$

Since Ω is skew symmetric, the matrix of the new form is also skew symmetris, and this form is therefore alternate.

*) Frobenius: Crelle, vol. 84, p. 12.

**) *Philosophical Transactions*, 1858, p. 41.

The necessary and sufficient condition that the transformation shall be automorphic is

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

It is assumed throughout this paper that the determinant of the alternate bilinear form does not vanish, that is that $|\Omega| \neq 0$. But then, since $|\breve{\varphi}| = |\varphi|$, and therefore

$$|\varphi|^2|\Omega| = |\breve{\varphi}\Omega\varphi| = |\Omega|,$$

we have

$$|\varphi|^2 = 1.$$

Since the square root of the determinant of the alternate bilinear form, that is the square root of $|\Omega|$, is a rational skew invariant of the form, we must have $|\varphi| = +1$.

If -1 is not a root of the characteristic equation of φ, then $1+\varphi$ has a reciprocal. We may therefore, in this case, put

$$Y = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1};$$

whence we obtain

$$\begin{aligned} \breve{Y} &= \quad (1+\breve{\varphi})^{-1}(1-\breve{\varphi})\breve{\Omega} \\ &= -(1-\breve{\varphi})\ (1+\breve{\varphi})^{-1}\Omega. \end{aligned}$$

But, from the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega,$$

since $|\varphi| \neq 0$, we derive

$$\breve{\varphi}\Omega = \Omega\varphi^{-1};$$

therefore

$$(1 \pm \breve{\varphi})\Omega = \Omega(1 \pm \varphi^{-1}).$$

Whence it follows that

$$\begin{aligned} \breve{Y} &= -\Omega(1-\varphi^{-1})(1+\varphi^{-1})^{-1} \\ &= -\Omega.(\varphi-1)\varphi^{-1}.\varphi(\varphi+1)^{-1} \\ &= \quad Y. \end{aligned}$$

That is, Y is symmetric.

We also have

$$(\Omega + Y)\varphi = (\Omega - Y).$$

And since

$$\Omega \pm Y = 2\Omega(1+\varphi)^{-1} \quad \text{or} \quad 2\Omega(1+\varphi)^{-1}\varphi,$$

according as we take the upper or lower sign, therefore

$$|\Omega \pm Y| \neq 0.$$

Consequently,

$$\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y).$$

This is substancially Cayley's expression for the linear substitution which automorphically transforms the alternate bilinear form whose matrix is Ω.

Conversely, if φ can be expressed thus in terms of a symmetric linear substitution Y, for which $|\Omega + Y| \neq 0$, it will satisfy the equation $\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$*); and therefore transform automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}).$$

From the expression for φ in terms of Y, or the reverse, we obtain

$$(1 + \varphi)(1 + \Omega^{-1} Y) = 2;$$

whence follows

$$\begin{aligned} \frac{|1+\varphi| \,.\, |\Omega + Y|}{|\Omega|} &= |1 + \varphi| \,.\, |1 + \Omega^{-1} Y| \\ &= |2| \\ &= 2^{2n}. \end{aligned}$$

Therefore if -1 is a root of the characteristic equation of φ, this linear substitution is not given by Cayley's expression, at least for finite values of the coefficients of the symmetric matrix Y. Nevertheless, in this case by the theorem of Frobenius above referred to, a symmetric linear substitution Y_ϱ can always be found whose coefficients are rational functions of a parameter ϱ of which one at least is infinite for $\varrho = 0$, such that $(\Omega + Y_\varrho)^{-1}(\Omega - Y_\varrho)$ may be made as nearly as we please equal to φ by taking ϱ sufficiently small.

§ 3.

As in the last section, let φ satisfy the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

Let the roots of the characteristic equation of φ be -1 of multiplicity p, g_1 of multiplicity p_1, g_2 of multiplicity p_2, etc., and g_i of multiplicity p_i.**) We then have

---

*) For if $\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y)$ in which Ω is skew symmetric and Y is symmetric, then

$$\breve{\varphi} = (\breve{\Omega} - \breve{Y})(\breve{\Omega} + \breve{Y})^{-1} = (\Omega + Y)(\Omega - Y)^{-1}.$$

Therefore, if

$$A = \Omega + Y,\quad B = (\Omega - Y),\quad \breve{\varphi}\Omega\varphi = AB^{-1}\left(\frac{A+B}{2}\right)A^{-1}B$$

which is identically equal to $\frac{A+B}{2}$ or Ω.

**) The roots of the characteristic equation of φ occur in pairs the product of two the same pair being unity. Frobenius, Crelle, vol. 84, p. 34.

Since the determinant of φ is equal to $+1$, p is even.

$$|\varphi - g| = (g+1)^p (g-g_1)^{p_1} (g-g_2)^{p_2} \dots (g-g_i)^{p_i};$$

and the identical equation to φ is

$$(\varphi+1)^p (\varphi-g_1)^{p_1} (\varphi-g_2)^{p_2} \dots (\varphi-g_i)^{p_i} = 0.$$

Corresponding respectively to the distinct roots of the characteristic equation of φ,

$$-1,\ g_1,\ g_2,\ \dots g_i,$$

are certain polynomials in φ which will be denoted by

$$\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \dots\ \Phi_i.$$

If

$$G^{(s)}(z) = \frac{\left[(z+1)^p - (g_s+1)^p\right]^{p_s}}{(-1)^{p_s}(g_s+1)^{p p_s}},$$

$$G_r^{(s)}(z) = \frac{\left[(z-g_r)^{p_r} - (g_s-g_r)^{p_r}\right]^{p_s}}{(-1)^{p_s}(g_s-g_r)^{p_r p_s}},$$

and if

$$F_0(z) = G^{(1)}(z)\cdot G^{(2)}(z) \cdots G^{(i)}(z),$$

$$F_r(z) = \frac{\left[(z-g_r)^{p_r} - (-1-g_r)^{p_r}\right]^p}{(-1)^{p(p_r+1)}(1+g_r)^{p_r p}} \cdot G_r^{(1)}(z)\cdot G_r^{(2)}(z)\cdots G_r^{(r-1)}(z)\cdot G_r^{(r+1)}(z)\cdots G_r^{(i)}(z),$$

then

$$\Phi_0 = F_0(\varphi),\ \Phi_1 = F_1(\varphi),\ \Phi_2 = F_2(\varphi),\ \dots\ \Phi_i = F_i(\varphi).$$

Since each polynomial contains every factor of the identical equation except that factor belonging to the root to which the polynomial corresponds, the binary products of different polynomials all vanish. But

$$\Phi_0^2 = \Phi_0,\quad \Phi_r^2 = \Phi_r \quad (r = 1, 2, \dots i).$$

Moreover,

$$1 = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_i,$$

and

$$(\varphi+1)^p \Phi_0 = 0,\quad (\varphi-g_r)^{p_r}\Phi_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots i).$$

Finally, if $f(z)$ denotes any rational integral function of z,

$$f(\varphi^{-1}) = \Big[f(z^{-1}) + (\varphi+1)\frac{d}{dz}f(z^{-1}) + \frac{(\varphi+1)^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}f(z^{-1}) + \cdots + \frac{(\varphi+1)^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}f(z^{-1})\Big]_{z=-1}\Phi_0$$

$$+\sum_1^i{}_r\Big[f(z^{-1}) + (\varphi-g_r)\frac{d}{dz}f(z^{-1}) + \frac{(\varphi-g_r)^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}f(z^{-1}) + \cdots + \frac{(\varphi-g^r)^{p_r-1}}{(p_r-1)!}\frac{d^{p_r-1}}{dz^{p_r-1}}f(z^{-1})\Big]_{z=g_r}\Phi_r.\text{*)}$$

---

*) See paper to appear in a forthcoming number of the *American Journal of Mathematics.*

As a consequence of the last theorem we have

$$F_0(\varphi^{-1}) = \Phi_0;$$

since for $z = -1$,

$$F_0(z^{-1}) = 1,\ \frac{d}{dz}F_0(z^{-1}) = 0,\ \cdots \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}F_0(z^{-1}) = 0,$$

and for

$$z = g_r \quad (r = 1, 2, \ldots i),$$

both $F_0(z^{-1})$ and its first $p_r - 1$ differential coefficients vanish.

Since

$$\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi = \Omega,$$

and since the determinant of φ is not zero,

$$\breve{\varphi}\ \Omega = \Omega\,\varphi^{-1},$$

$$\breve{\varphi}^2\,\Omega = \Omega\,\varphi^{-2},$$

etc.,

finally

$$f(\breve{\varphi})\,\Omega = \Omega f(\varphi^{-1}).$$

Therefore by what has just been stated

$$\breve{\Phi}_0\,\Omega = F_0(\breve{\varphi})\,\Omega = \Omega\,F_0(\varphi^{-1}) = \Omega\,\Phi_0.$$

If now we put

$$\varphi_0 = 1 - 2\Phi_0,$$

and

$$\varphi_1 = \varphi\,\varphi_0 = \varphi_0\,\varphi,$$

we have

$$\varphi_0^2 = (1 - 2\Phi_0)^2 = 1,$$

$$\breve{\varphi}_0\,\Omega = (1 - 2\breve{\Phi}_0)\,\Omega = \Omega(1 - 2\Phi_0) = \Omega\,\varphi_0.$$

Consequently

$$\breve{\varphi}_0\,\Omega\,\varphi_0 = \Omega\,\varphi_0^2 = \Omega,$$

$$\breve{\varphi}_1\,\Omega\,\varphi_1 = \breve{\varphi}_0\,\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi\,\varphi_0 = \breve{\varphi}_0\,\Omega\,\varphi_0 = \Omega.$$

Let

$$H(g) \equiv \frac{|\varphi - g|}{(g+1)^p} = (g - g_1)^{p_1}(g - g_2)^{p_2}\cdots(g - g_i)^{p_i}.$$

Then any rational symmetric function of the roots of the equation $H(g) = 0$ can be expressed rationally in terms of the coefficients of the equation $|\varphi - g| = 0$, the characteristic equation of φ. The coefficients of this equation are rational functions of the coefficients of φ; and since the coefficients of the powers of g in $F_0(g)$ are rational symmetric functions of the roots of the equation $H(g) = 0$, these coefficients can be expressed rationally in terms of the coefficients of φ. Consequently the coefficients of the linear subtitution $F_0(\varphi)$ are rational functions of the coefficients of φ.

From this it follows that the coefficients of the linear substitution $\varphi_0 = 1 - 2\Phi_0$ and $\varphi_1 = \varphi\varphi_0$ are rational functions of the coefficients of φ.

Moreover, if φ is real, Φ_0 is real, since, if φ is real, the imaginary roots of the characteristic equation of φ occur in pairs which are conjugate imaginary. Therefore, if φ is real, both φ_0 and φ_1 are real.

The characteristic equation of φ_1 has not -1 as a root. For

$$\varphi_1 = \varphi(1-2\Phi_0) = -\varphi\Phi_0 + \varphi\Phi_1 + \varphi\Phi_2 + \cdots + \varphi\Phi_i.$$

Therefore,

$$(\varphi_1 - 1)\Phi_0 = -(\varphi+1)\Phi_0,$$

and for $r = 1, 2, \ldots i$

$$(\varphi_1 - g_r)\Phi_r = (\varphi - g_r)\Phi_r;$$

and consequently

$$(\varphi_1 - 1)^p \Phi_0 = (-1)^p (\varphi+1)^p \Phi_0 = 0,$$

$$(\varphi_1 - g_r)^{p_r} \Phi_r = (\varphi - g_r)^{p_r} \Phi_r = 0.$$

Whence we obtain

$$(\varphi_1 - 1)^p = (\varphi_1 - 1)^p (1 - \Phi_0)$$

and for $r = 1, 2, \ldots i$,

$$(\varphi_1 - g_r)^{p_r} = (\varphi_1 - g_r)^{p_r} (1 - \Phi_r);$$

and therefore

$$(\varphi_1 - 1)^p (\varphi_1 - g_1)^{p_1} (\varphi_1 - g_2)^{p_2} \ldots (\varphi_1 - g_i)^{p_i}$$
$$= \left[(\varphi_1 - 1)^p (\varphi_1 - g_1)^{p_1} (\varphi_1 - g_2)^{p_2} \cdots (\varphi_1 - g_i)^{p_i}\right]\left[1 - \Phi_0 - \Phi_1 - \Phi_2 - \cdots - \Phi_i\right]$$
$$= 0.$$

But $\varphi_1 + 1$ is not a factor of this syzygy in powers of φ_1, therefore -1 cannot be a root of the characteristic equation of φ_1.

Since -1 is not a root of the characteristic equation of φ_1, we may put

$$Y_1 = \Omega(1 - \varphi_1)(1 + \varphi_1)^{-1};$$

whence we obtain as in § 2

$$\breve{Y}_1 = Y_1,$$

and

$$\varphi_1 = (\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1).$$

The coefficients of Y_1 are rational functions of the coefficients of Ω and of φ. For they are rational functions of the coefficients of Ω and of the coefficients of φ_1; and the latter are rational functions of the coefficients of φ. Since if φ is real, φ_1 is also real; therefore, if φ and Ω are real, Y_1 is also real.

§ 4.

In this and in the next two sections it will be assumed that the matrix Ω of the alternate bilinear form is real, and that the linear substitution φ satisfying the equation $\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi = \Omega$ is also real. But then since φ is real, both φ_0 and φ_1 are real.

If now Ω is not only skew symmetric, but is also orthogonal, that is, if $\breve{\Omega}\,\Omega = 1$ (whence we derive $\Omega^2 = -1$), let

$$X = \breve{\varphi}_0\,\Omega = \Omega\,\varphi_0.$$

We then have

$$\breve{X} = \breve{\Omega}\,\varphi_0 = -\,\Omega\,\varphi_0 = -\,X,$$

and

$$\Omega^{-1} X \Omega^{-1} X = \varphi_0{}^2 = 1;$$

and therefore

$$\breve{X}\,\Omega\,X = X(-\Omega)X = X\Omega^{-1}X = \Omega.$$

Since φ_0 and Ω are real, X is a real skew symmetric matrix. Therefore -1 is not a root of the characteristic equation of X. Consequently we may put

$$Y_0 = \Omega(1-X)\,(1+X)^{-1};$$

whence we obtain

$$\breve{Y}_0 = Y_0,$$

and

$$X = (\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0).$$

Since the coefficients of Y_0 are rational functions of the coefficients of Ω and of φ_0, they are therefore rational functions of the coefficients of Ω and of φ.

We have now

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0\varphi_1\\ &= \Omega^{-1} X \varphi_1\\ &= \Omega^{-1}(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1).\end{aligned}$$

If -1 is not a root of the characteristic equation of φ, this linear substitution can also be thus expressed. For, if in the above expression, we put $Y_0 = 1$, it reduces to

$$(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1),$$

since

$$\begin{aligned}\Omega^{-1}(\Omega+1)^{-1}(\Omega-1) &= (\Omega^2+\Omega)^{-1}(\Phi-1)\\ &= (\Omega-1)^{-1}(\Omega-1)\\ &= 1;\end{aligned}$$

and we have only to put

$$Y_1 = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1},$$

which is now possible.

In this case, that is, if -1 is not a root of the characteristic equation of φ, $p=0$, and therefore $\Phi_0 = 0$; consequently $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \varphi$, $X = \Omega$, and

$$Y_1 = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1},$$
$$Y_0 = \Omega(1-\Omega)(1+\Omega)^{-1} = 1.$$

We have therefore the following theorem:

Every real linear substitution φ which transforms automorphically the real alternate and orthogonal bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \dots x_{2n} \between y_1, y_2, \dots y_{2n}),$$

the x's and y's being cogredient, is given by the expression

$$\Omega^{-1}(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1),$$

in which Y_0 and Y_1 are real symmetric linear substitutions such that

$$|\Omega + Y_0| \neq 0, \quad |\Omega + Y_1| \neq 0.$$

Moreover, the coefficients of Y_0 and Y_1 can be expressed as rational functions of the coefficients of φ and the coefficients of the bilinear form. Thus if -1 is a root of the characteristic equation of φ of multiplicity p (which may be zero), and if the roots of the characteristic equation of φ, other than -1, are

$$g_1, g_2, \dots g_N, \qquad (N = 2n - p)$$

and if

$$F(z) = \frac{[(z+1)^p - (g_1+1)^p]\,[(z+1)^p - (g_2+1)^p] \cdots [(z+1)^p - (g_N+1)^p]}{(-1)^N (g_1+1)^p (g_2+1)^p \cdots (g_N+1)^p},$$

we may put

$$Y_0 = [\Omega+1) - 2F(\varphi)]\,[(\Omega+1) - 2\Omega F(\varphi)]^{-1},$$
$$Y_1 = \Omega[(1-\varphi) + 2\varphi F(\varphi)]\,[(1+\varphi) - 2\varphi F(\varphi)]^{-1}.\text{*)}$$

§ 5.

Now if φ is a solution of the equation $\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$, in which $\Omega^2 = -1$, then $\psi = \Omega^{-1}\varphi$ is also a solution of this equation. For then

$$\breve{\psi}\Omega\psi = \breve{\varphi}\breve{\Omega}^{-1} . \Omega . \Omega^{-1}\varphi = \breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

Since it is assumed that φ and Ω are real, ψ also is real.

Let -1 be a root of the characteristic equation of ψ of multiplicity p' (which may be equal to zero), and let the roots of the characteristic equation of ψ other than -1 be

$$g_1', g_2', \dots g_{N'}' \qquad (N' = 2n - p')\cdot$$

---

*) $F(\varphi)$ now replaces $\Phi_0 = F_0(\varphi)$.

Further, let

$$F(z)=\frac{[(z+1)^{p'}-(g_1'+1)^{p'}]\,[(z+1)^{p'}-(g_2'+1)^{p'}]\cdots[(z+1)^{p'}-(g'_{N'}+1)^{p'}]}{(-1)^{N'}(g_1'+1)^{p'}(g_2'+1)^{p'}\cdots(g'_{N'}+1)^{p'}}.$$

Then as shown in the last section, if

$$Y_0'=[(\Omega+1)-2F(\psi)]\,[(\Omega+1)-2\Omega F(\psi)]^{-1},$$
$$Y_1'=\Omega[(1-\psi)+2\psi F(\psi)]\,[(1+\psi)-2\psi F(\psi)],$$

Y_0' and Y_1' are symmetric, and we have

$$\Omega^{-1}\varphi=\psi=\Omega^{-1}(\Omega+Y_0')^{-1}(\Omega-Y_0')\,(\Omega+Y_1')^{-1}(\Omega-Y_1').$$

Therefore

$$\varphi=(\Omega+Y_0')^{-1}(\Omega-Y_0')\,(\Omega+Y_1')\,(\Omega-Y_1').$$

In this expression for φ the coefficients of Y_0', Y_1' are rational functions of the coefficients of Ω and of $\psi=\Omega^{-1}\varphi$, and are therefore rational functions of the coefficients of Ω and of φ.

The roots of the characteristic equation of ψ, namely the roots of the equation

$$|\psi-g|=0,$$

are identical with the roots of the equation

$$|\varphi-g\Omega|=0.$$

For

$$|\psi-g|=|\Omega^{-1}\varphi-g|=|\Omega^{-1}(\varphi-g\Omega)|=\frac{1}{|\Omega|}\,|\varphi-g\Omega|.$$

We have therefore the following theorem:

Every real linear substitution φ which transforms automorphically the real alternate and orthogonal bilinear form

$$(\Omega\between x_1,x_2,\ldots x_{2n}\between y_1,y_2,\ldots y_{2n}),$$

the x's and y's being cogrediant, is given by the expression

$$(\Omega+Y_0')^{-1}(\Omega-Y_0')\,(\Omega+Y_1')^{-1}\,(\Omega-Y_1'),$$

in which Y_0' and Y_1' are real symmetric linear substitutions such that

$$|\Omega+Y_0'|\neq 0,\quad |\Omega+Y_1'|\neq 0.$$

Moreover, if -1 is a root of multiplicity p' (which may be zero) of the equation

$$|\varphi-g\Omega|=0,$$

and if the root of the equation, other than -1, are

$$g_1',g_2',\ldots g'_{N'},\qquad (N'=2n-p')$$

and if

$$F(z)=\frac{[(z+1)^{p'}-(g_1'+1)^{p'}]\,[(z+1)^{p'}-(g_2'+1)^{p'}]\cdots[(z+1)^{p'}-(g'_{N'}+1)^{p'}]}{(-1)^{N'}(g_1'+1)^{p'}(g_2'+1)^{p'}\cdots(g'_{N'}+1)^{p'}},$$

we may put

$$Y_0' = [(1+\Omega) - 2F(\Omega^{-1}\varphi)]\,[(1+\Omega) - 2\Omega F(\Omega^{-1}\varphi)]^{-1},$$
$$Y_1' = [(\Omega-\varphi) + 2\varphi F(\Omega^{-1}\varphi)]\,[(\Omega+\varphi) - 2\varphi F(\Omega^{-1}\varphi)]^{-1}\Omega.$$

The coefficients of Y_0' and Y_1' are then rational functions of the coefficients of φ and of Ω.

§ 6.

If Ω is real but is not orthogonal, we may proceed as follows. Since Ω is real and skew symmetric, the roots of its characteristic equation are purely imaginary. Therefore, the roots of the characteristic equation of the real symmetric matrix $-\Omega^2$ are all positive; and consequently there are real symmetric fourth roots of $-\Omega^2$.*) Let ω denote any real symmetric fourth root of $-\Omega^2$ expressable as a polynomial in $-\Omega^2$. Then ω is commutative with Ω; and if

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\omega^2}$$

we have

$$\Omega'^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega^2}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^4} = -1.$$

Let now φ be any real solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

This equation may be written

$$\breve{\varphi}\omega \cdot \frac{\Omega}{\omega^2} \cdot \omega\varphi = \omega\frac{\Omega}{\omega^2}\omega,$$

that is

$$\omega^{-1}\breve{\varphi}\omega \cdot \Omega' \cdot \omega\varphi\omega^{-1} = \Omega',$$

which if

$$\psi = \omega\varphi\omega^{-1},$$

becomes,

$$\breve{\psi}\Omega'\psi = \Omega'.$$

Conversely, if ψ satisfies this equation,

$$\varphi = \omega^{-1}\psi\omega$$

will satisfy the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega.$$

Since φ and ω are real, ψ is also real. Therefore by § 5 we may put

$$\psi = (\Omega' + Y_0')^{-1}(\Omega' - Y_0')\,(\Omega' + Y_1')^{-1}(\Omega' - Y_1'),$$

in which Y_0' and Y_1' are real and symmetric.

---

*) *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 22, p. 461.

In this expression for ψ substituting for Ω' its equal $\omega^{-1}\Omega\omega^{-1}$, and putting

$$Y_0' = \omega^{-1} Y_0 \omega^{-1},$$
$$Y_1' = \omega^{-1} Y_1 \omega^{-1},$$

we have

$$\begin{aligned}\omega\varphi\omega^{-1} = \psi \\ &= (\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} + \omega^{-1} Y_0 \omega^{-1})^{-1}(\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} - \omega^{-1} Y_0 \omega^{-1}) \\ &\quad \times (\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} + \omega^{-1} Y_1 \omega^{-1})^{-1}(\omega^{-1}\Omega\omega^{-1} - \omega^{-1} Y_1 \omega^{-1}) \\ &= \omega(\Omega + Y_0)^{-1}\omega \cdot \omega^{-1}(\Omega - Y_0)\omega^{-1} \\ &\quad \times \omega(\Omega + Y_1)^{-1}\omega \,.\, \omega^{-1}(\Omega - Y_1)\omega^{-1} \\ &= \omega(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)\,(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1)\omega^{-1}.\end{aligned}$$

Therefore

$$\varphi = (\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)\,(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1).$$

Since

$$Y_0 = \omega Y_0' \omega,$$
$$Y_1 = \omega Y_1' \omega,$$

both Y_0 and Y_1 are real and symmetric.

We thus obtain the following theorem:

Every real linear substitution which transforms automorphically the real alternate bilinear form

$$(\Omega \big\backslash x_1, x_2, \ldots x_{2n} \big\backslash y_1, y_2, \ldots y_{2n})$$

of non-zero determinant, the x's and y's being cogrediant, is given by the expression

$$(\Omega + Y_0)^{-1}(\Omega - Y_0)\,(\Omega + Y_1)^{-1}(\Omega - Y_1)$$

in which Y_0 and Y_1 are real and symmetric and such that

$$|\Omega + Y_0| \neq 0, \quad |\Omega + Y_1| \neq 0.$$

§ 7.

Let e^Θ denote the infinite series $\sum_0^\infty {}_r \frac{\Theta^r}{r!}$, convergent for any matrix or linear substitution. We then have

$$(e^\Theta)^{-1} = e^{-\Theta},$$
$$(\breve{e^\Theta}) = e^{\breve{\Theta}},$$

and for any integer m

$$(e^\Theta)^m = e^{m\Theta};$$

moreover if Θ and Θ' are commutative,

$$e^\Theta e^{\Theta'} = e^{\Theta + \Theta'}.$$

Finally, for any linear substitution φ whose determinant is not zero, a polynomial Θ in integer powers of φ can be found such that

$$\varphi = e^{\Theta}.$$

Let now Ω be any skew symmetric matrix real or imaginary whose determinant is not zero, and let φ be any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi = \Omega$$

real or imaginary given by Cayley's expression; that is, let

$$\varphi = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y) = (1 + \Omega^{-1}Y)^{-1}(1 - \Omega^{-1}Y),$$

in which Y is symmetric, and such that $|\Omega + Y| \neq 0$. But then, since $|1 + \Omega^{-1}Y| \neq 0$, it follows from what precedes that a polynomial in $\Omega^{-1}Y$, namely $\vartheta_1 = f(\Omega^{-1}Y)$ can be found such that

$$1 + \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_1}.$$

If $\vartheta_2 = f(-\Omega^{-1}Y)$, we then have

$$1 - \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_2};\text{*)}$$

and therefore, (since ϑ_1 and ϑ_2 are both polynomials in $\Omega^{-1}Y$ and consequently commutative) if $\Theta\Omega = -\vartheta_1 + \vartheta_2$,

$$\varphi = (e^{\vartheta_1})^{-1}e^{\vartheta_2} = e^{-\vartheta_1}e^{\vartheta_2} = e^{\Theta\Omega}.$$

For any integer r, $(\Omega^{-1}Y)^{2r+1}\Omega^{-1}$ is symmetric; and therefore, since

$$-\vartheta_1 + \vartheta_2 = -f(\Omega^{-1}Y) + f(-\Omega^{-1}Y)$$

is a polynomial in odd powers of $\Omega^{-1}Y$,

$$\Theta = (-\vartheta_1 + \vartheta_2)\Omega^{-1}$$

is symmetric. Consequently, if m is any positive integer, and if

$$\psi = e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega},$$

then

$$\breve{\psi} = e^{-\frac{1}{m}\Omega\Theta};$$

---

*) Equating the transverse of both members of equation

$$1 + \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_1},$$

we have

$$1 - Y\Omega^{-1} = e^{\breve{\vartheta}_1}.$$

But

$$\breve{\vartheta}_1 = f(\overbrace{\Omega^{-1}Y}) = f(-Y\Omega^{-1}) = f(-\Omega\,.\,\Omega^{-1}Y\,.\,\Omega^{-1}) = \Omega\,f(-\Omega^{-1}Y)\,.\,\Omega^{-1}$$
$$= \Omega\,\vartheta_2\,\Omega^{-1}.$$

Therefore

$$\Omega(1 - \Omega^{-1}Y)\Omega^{-1} = 1 - Y\Omega^{-1} = e^{\breve{\vartheta}_1} = e^{\Omega\vartheta_2\Omega^{-1}} = \Omega e^{\vartheta_2}\Omega^{-1};$$

and consequently

$$1 - \Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_2}.$$

and we have

$$\breve{\psi}\Omega\psi = e^{-\frac{1}{m}\Omega\Theta}\Omega e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega}$$
$$= \Omega e^{-\frac{1}{m}\Theta\Omega} e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega} \;{}^{*)}$$
$$= \Omega.$$

We also have

$$\varphi = e^{\Theta\Omega} = \left(e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega}\right)^m = \psi^m.$$

Whence it follows that any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by Cayley's expression has an m^{th} root which is also a solution of this equation. The coefficients of this m^{th} root ψ can be expressed as algebraic functions of the coefficients of the substitution φ.

By taking m sufficiently great the coefficients of the linear substitution or matrix $\frac{1}{m}\Theta\Omega$ may all be made as nearly as we please equal to zero, and thus $e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega}$ may be made to approach as near as we please to the identical substitution. But since, however great m may be,

$$\varphi = \psi^m,$$

and

$$\breve{\psi}\Omega\psi = \Omega,$$

it follows that every solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by Cayley's expression can be generated by the repetition of an infinitesimal linear substitution (that is, a linear substitution differing infinitesimally from the identical substitution) which is also a solution of this equation.

A-fortiori, if φ is a solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by the square of Cayley's expression, a symmetric linear substitution Θ can be found such that

$$\varphi = e^{\Theta\Omega};$$

and then if

$$\psi = e^{\frac{1}{m}\Theta\Omega},$$

---

*) For any positive integer r, we have

$$(\Omega\Theta)^r\Omega = \Omega(\Theta\Omega)^r.$$

Therefore

$$e^{-\frac{1}{m}\Omega\Theta}\Omega = \Omega e^{-\frac{1}{m}\Theta\Omega}.$$

ψ is also a solution of the equation, and

$$\varphi = \psi^m.$$

Consequently every solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

given by the square of Cayley's expression has an m^{th} root which is a solution of this equation, and can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution which also satisfies this equation.

In § 3 it was shown that if φ is any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega,$$

we may put

$$\varphi = \varphi_0\varphi_1,$$

in which φ_0 and φ_1 are commutative; and

$$\varphi_0^2 = 1,$$
$$\varphi_1 = (\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y)$$

(Y being symmetric and such that $|\Omega + Y| \neq 0$). We therefore have

$$\varphi^2 = \varphi_0^2\varphi_1^2 = \varphi_1^2 = [(\Omega + Y)^{-1}(\Omega - Y)]^2.$$

Consequently every solution of the equation

$$\breve{\varphi}\Omega\varphi = \Omega$$

which is the second power of a solution of this equation is given by the square of Cayley's expression.

But not every solution of this equation is the second power of a linear substitution satisfying the equation. We are therefore led to designate a solution of this equation, that is a substitution of the group of linear substitutions which transform automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n})$$

as of the first or second kind according as it is or is not the second power of a substitution of the group. From what precedes, we see that every substitution of the group given by Cayley's expression is of the first kind; and that every linear substitution of the first kind is given by the square of Cayley's expression, has an m^{th} root belonging to the group, and can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group.

The characteristic equation of an infinitesimal linear substitution cannot have -1 as a root. Therefore every infinitesimal substitution of the group is given by Cayley's expression (the coefficients of Y

being all infinately near to zero)*), and is consequently of the first kind. Since the repetition of a linear substitution of the first kind gives a substitution of that kind, it follows that no linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group.**)

Every linear substitution of the second kind has a $(2m+1)^{\text{th}}$ root belonging to the group, for any positive integer m. For if φ is any solution of the equation

$$\breve{\varphi}\,\Omega\,\varphi = \Omega,$$

(and therefore, *a-fortiori*, if φ is a solution of this equation of the second kind), we may put

$$\varphi = \varphi_0\varphi_1,$$

in which φ_0 and φ_1 are solution of the equation, are commutative, and

$$\varphi_0^{\,2} = 1;$$

whereas, -1 is not a root of the characteristic equation of φ_1, so that we may put

$$\Omega^{-1}Y = (1-\varphi_1)(1+\varphi_1)^{-1}$$

(in consequence of which Y is symmetric), and have

$$\varphi_1 = (1+\Omega^{-1}Y)^{-1}(1-\Omega^{-1}Y).$$

Proceedings as before, if

$$\vartheta_1 = f(\Omega^{-1}Y)$$

is a polynomial in $\Omega^{-1}Y$ such that

$$1+\Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_1},$$

then, if

$$\vartheta_2 = f(-\Omega^{-1}Y),$$
$$1-\Omega^{-1}Y = e^{\vartheta_2};$$

and if

$$\Theta = (-\vartheta_1+\vartheta_2)\Omega^{-1},$$

---

*) If -1 is not a root of the characteristic equation of φ, then

$$\varphi = (\Omega+Y)^{-1}(\Omega-Y),$$

and

$$Y = \Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1}.$$

If φ is infinately near to the identical substitution, the coefficients of $1-\varphi$ are all infinitesimal, and the linear substitution $1+\varphi$ is infinately near to the substitution 2.1; therefore, since Ω is finite, the coefficients of the linear substitution $\Omega(1-\varphi)(1+\varphi)^{-1}$ are all infinitesimal, that is the coefficients of Y are all infinately near to zero.

**) That is, no linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of *one and the same* infinitesimal substitution of the group. Every linear substitution of the group can be generated by infinitesimal substitutions of the group.

Θ is symmetric, and

$$\varphi_1 = e^{\Theta\Omega}.$$

Since $\Theta\Omega$ is a polynomial in $\Omega^{-1}Y$, it can be expressed as a polynomial in φ_1. Therefore $\Theta\Omega$ is commutative with φ_0, and $e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}$ is also commutative with φ_0. If now

$$\psi = \varphi_0 e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega},$$

we then have

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0\varphi_1\\ &= \varphi_0 e^{\Theta\Omega}\\ &= \left(\varphi_0 e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}\right)^{2m+1}\\ &= \psi^m,\end{aligned}$$

and, moreover,

$$\begin{aligned}\breve{\psi}\,\Omega\psi &= e^{-\frac{1}{2m+1}\Omega\Theta}\,\breve{\varphi}_0\Omega\varphi_0 e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}\\ &= e^{-\frac{1}{2m+1}\Omega\Theta}\,\Omega e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}\\ &= \Omega e^{-\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega} e^{\frac{1}{2m+1}\Theta\Omega}\\ &= \Omega.\end{aligned}$$

By definition no linear substitution of the second kind can have a $(2m)^{\text{th}}$ root which is a substitution of the group. But from the theorem of Frobenius referred to in § 1, it follows that a substitution of the first kind (itself an even power of a substitution of the group) can be found which shall be as nearly as we please equal to the substitution of the second kind in question. Thus, if φ is any substitution of the second kind, by the theorem of Frobenius, a symmetric linear substitution Y_ϱ can be found whose coefficients are rational functions of a parameter ϱ, one of which at least is infinite for $\varrho = 0$, such that the several coefficients of the substitution

$$\varphi_\varrho = (\Omega + Y_\varrho)^{-1}(\Omega - Y_\varrho)$$

can be made as nearly as we please equal to the corresponding coefficients of φ by taking ϱ sufficiently small. Thus we have

$$\varphi = \lim_{\varrho=0}[(\Omega + Y_\varrho)^{-1}(\Omega - Y_\varrho)].$$

Since φ_ϱ is given by Cayley's expression, a linear substitution ψ_ϱ which also belongs to the group can be found whose coefficients are algebraic functions of the coefficients of φ_ϱ (and therefore algebraic functions of the parameter ϱ) such that

$$\varphi_\varrho = \psi_\varrho^{2m}.$$

Therefore, by taking ϱ sufficiently small, ψ_ϱ^{2m} can be made as nearly as we please equal to φ. So long as $\varrho \neq 0$, φ_ϱ is a linear substitution of the first kind, that is, it is an even power of a linear substitution of the group; but the limit of φ_ϱ, for $\varrho = 0$, namely the linear substitution φ, is of the second kind, that is φ is not an even power of any linear substitution of the group. A discontinuity therefore exists is the case of linear substitutions of the second kind.

These results may be summarized as follows. *Any linear substitution (real or imaginary) belonging to the group of linear substitutions which transform automorphically the alternate bilinear form*

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n})$$

of non-zero determinant, the x's and y's being cogrediant is of the first or second kind according as it is or is not the second power of a linear substitution of the group. All linear substitutions given by Cayley's expression (including all infinitesimal linear substitutions of the group) are of the first kind. And every linear substitution of the first kind has an m^{th} root belonging to the group for any index m, can be generated by the repetition of an infinitesimal substitution of the group, and is given by the square of Cayley's expression. No linear substitution of the second kind can be generated by the repetition of one and the same infinitesimal substitution of the group. Every linear substitution of the second kind has a $(2m+1)^{th}$ root belonging to the group for any integer m; but no linear substitution of the second kind has a $(2m)^{th}$ root belonging to the group. Nevertheless, corresponding to any linear substitution φ of the second kind, a linear substitution ψ_ϱ belonging to the group, whose coefficients are algebraic functions of a parameter ϱ, can always be found such that $(\psi_\varrho)^{2m}$ can be made as nearly as we please equal to φ by taking ϱ sufficiently small.

§ 8.

If φ is a linear substitution of the first kind which transforms automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_{2n} \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

then, as shown in the preceeding section, a linear substitution ψ belonging to the group can be found such that

$$\varphi = \psi^2.$$

Since ψ belongs to the group, we have

$$\breve{\psi}\Omega\psi = \Omega.$$

Therefore

$$\psi = \Omega \psi^{-1} \Omega^{-1};$$

that is, $\breve{\psi}$ und ψ^{-1} are equivalent*).

If -1 is a root of the characteristic equation of φ, then both $\pm\sqrt{-1}$ are roots of the characteristic equation of ψ. For the roots of the characteristic equation of φ are the squares of the roots of the characteristic equation of ψ; and if $\sqrt{-1}$ is a root of the characteristic equation of ψ, that is if

$$|\psi - \sqrt{-1}| = 0,$$

then the determinant of the transverse of $\psi - \sqrt{-1}$ is zero, that is

$$|\breve{\psi} - \sqrt{-1}| = 0.$$

But since the substitutions ψ and ψ^{-1} are equivalent, the substitutions $\breve{\psi} - \sqrt{-1}$ and $\psi^{-1} - \sqrt{-1}$ are also equivalent. Therefore

$$|\psi^{-1} - \sqrt{-1}| = 0;$$

and since

$$-\sqrt{-1}\,\psi^{-1}(\psi + \sqrt{-1}) = \psi^{-1} - \sqrt{-1},$$

consequently

$$|\psi + \sqrt{-1}| = 0,$$

since $|\psi^{-1}| \neq 0$.

If the nullity**) of $\psi - \sqrt{-1}$ is m (that is, if the $(m-1)^{\text{th}}$ minors of the determinant of $\psi - \sqrt{-1}$ all vanish, but not all the m^{th} minors), then the nullity of the transverse of this substitution, namely $\breve{\psi} - \sqrt{-1}$, which only differs from it by the interchange of the rows and columns of its square array of coefficients, is also m. But since $\breve{\psi} - \sqrt{-1}$ and $\psi^{-1} - \sqrt{-1}$ are equivalent, the nullity of $\psi^{-1} - \sqrt{-1}$ is then m; and therefore the nullity of

$$\psi + \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,\psi\,(\psi^{-1} - \sqrt{-1})$$

is m. Whence it follows from the corollary of the law of nullity***) that the nullity of

$$\varphi + 1 = (\psi - \sqrt{-1})\,(\psi + \sqrt{-1})$$

---

*) Two substitutions φ and ψ are equivalent if we can find a substitution χ of non-zero determinant such that

$$\varphi = \chi \psi \chi^{-1}.$$

**) The term nullity is due to Sylvester. Nullity of order m is equivalent to *rank* (*Rang*) $2n - m$, the number of variables of the substitution being $2n$.

***) See *Johns Hopkins University Circularo,* vol 3, p. 10.

is $2m$, — that is the $(2m-1)^{th}$ minors of the determinant of $\varphi+1$ all vanish but not all the $(2m)^{th}$ minors.

We have therefore the following theorem:

If φ is a linear substitution of the first kind belonging to the group of linear substitutions which transform automorphically the alternate bilinear form

$$(\Omega \between x_1, x_2, \ldots x_2 \between y_1, y_2, \ldots y_{2n}),$$

of non-zero determinant, then if the $(2m)^{th}$ minors of $\varphi+1$ (the minors of order $2n-2m$) all vanish, the $(2m+1)^{th}$ minors of $\varphi+1$ (the minors of order $2n-2m-1$) all vanish also. That is, the order of the minor of $\varphi+1$ of highest order that does not vanish is even.

Further we may show in like manner that the nullity of $(\varphi+1)^2$ is even; that is that the order of the non-vanishiug minor of $(\varphi+1)^2$ of highest order is even. Similarly with respect to $(\varphi+1)^3$ and the successive powers of $\varphi+1$.

Worcester, Mass., February 6th, 1895.

Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen dritter Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ & \qquad + \cdots + L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx} \\ & = x^m\frac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + K_2 x^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} \\ & \qquad + \cdots + K_{m-2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} + K_{m-1}x\frac{dy}{dx} + K_m y, \end{aligned}\right.$$

die vom Verfasser im 38^{ten} Bande dieser Annalen*) aufgestellt worden ist ($K_1, \ldots K_m$, $L_1, \ldots L_{n-1}$ constant, $m < n$), lässt sich, wie er in einer weiteren Arbeit**) gezeigt hat, sowohl durch die Substitution

$$(2)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\, t^{\lambda}\, T\, dt$$

als auch durch die Substitution

$$(3)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}}\, t^{\lambda}\, T\, dt$$

auf eine analog gebildete Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen. Die letztere Gleichung dient zur Bestimmung von T als Function von t. Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man bis zu einer durch einfache bestimmte Integrale lösbaren Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung. Die letztgenannte Arbeit (in Crelle's J. Bd. 112) beschränkt sich darauf, die Reductionsmethode zu entwickeln. In nach-

*) „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe", Bd. 38, pag. 587.

**) „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe", Crelle's Journal für Math. Bd. 112, pag. 58.

stehendem Aufsatze soll nun auf den *Fall* $n = 3$ der Gleichung (1) näher eingegangen und eine Uebersicht der bestimmten Doppelintegrale, welche dann particuläre Lösungen von (1) sind, gegeben werden*).

Der Gleichung (1) genügt eine eindeutige Potenzreihe

$$(4)\left\{\begin{aligned} &F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{n-1}; x)\\ &= 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}}x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}x^2 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

deren Parameter $\alpha_1, \ldots \alpha_m, \varrho_1, \ldots \varrho_{n-1}$ mit den Constanten $K_1, \ldots K_m$, $L_1, \ldots L_{n-1}$ durch algebraische Gleichungen verbunden sind**). Die $n-1$ mehrdeutigen Hauptlösungen von (1) sind Producte aus je einer Potenz von x und einer Reihe von der Form (4). Die Constanten ϱ_i, $\varrho_i - \varrho_k$ werden als nicht ganzzahlig vorausgesetzt.

Die bestimmten Doppelintegrale, welche hier als Lösungen der Gleichung (1) im Fall $n = 3$ abgeleitet werden sollen, entstehen aus den soeben genannten Reihen durch Multiplication mit transcendenten Constanten. Als solche Constanten treten einerseits Euler'sche Integrale, andererseits die analog gebildeten Integrale mit complexem Integrationsweg auf. Mit Rücksicht auf das Folgende mögen zunächst einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf die Integration gewisser Reihen beziehen.

Hat ein nach t genommenes bestimmtes Integral

$$\int (t-x)^{q-p-1}t^{p-1}(l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt,$$

in welchem $p, q, l_0, l_1, \ldots$ als constant, x als unabhängig von t und die Reihe $l_0 + l_1 t + \cdots$ als convergent angenommen wird, zum Integrationsweg eine geschlossene Curve, welche im Nullpunkt beginnt und endigt und aus einem einmaligen positiven Umlauf um den Punkt x besteht, so liefert die Substitution

$$t = xz, \qquad dt = x\,dz,$$

als Weg der Variable z einen im Nullpunkt beginnenden Umlauf um den Punkt 1. Für die geschlossenen Integrationswege wird hier, wie in den früheren Arbeiten des Verfassers, die abgekürzte Bezeichnung angewendet, welche in § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (Bd. 35 dieser Annalen, pag. 472) angegeben ist.

---

*) Für $m = n$ entsteht aus (1) die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit 2 endlichen singulären Punkten, welche im 102ten Bande des Crelle'schen Journals vom Verfasser ausführlicher behandelt worden ist. In vorliegender Arbeit bleibt der Fall $m = n$ von der Betrachtung ausgeschlossen.

**) Cfr. Bd. 38 dieser Annalen, pag. 588—594.

Man erhält dann die Gleichung

$$\int_0^{\overline{(x)}} (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt$$

$$= x^{q-1} \int_0^{\overline{(1)}} (z-1)^{q-p-1} z^{p-1} (l_0 + l_1 xz + \cdots + l_\nu x^\nu z^\nu + \cdots)\, dz,$$

auf deren rechter Seite ausser den Constanten l_ν auch die Potenzen von x vor die Integralzeichen treten. Nennt man nach Bd. 35 dieser Annalen, pag. 510, $\overline{E}(a, b)$ das geschlossene Integral

$$\overline{E}(a, b) = \int_0^{\overline{(1)}} z^{a-1} (z-1)^{b-1}\, dz, \tag{5}$$

so ergiebt sich nach Anwendung der Reductionsformel

$$\overline{E}(a+\nu, b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)} \overline{E}(a, b)$$

(ν positiv und ganzzahlig) die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\overline{(x)}} (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt \\ &= x^{q-1} \overline{E}(p, q-p) \left[\begin{aligned} &l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \frac{p(p+1)}{q(q+1)} l_2 x^2 + \cdots \\ &\cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots \end{aligned}\right], \end{aligned}\right. \tag{6}$$

in der, mit Rücksicht auf die Integralgrenze 0, der reelle Theil von p positiv sein muss.

Beschreibt die Variable t statt des in (6) vorausgesetzten Weges einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, in der Art dass zuerst x, dann 0 im positiven Sinne, hierauf x im negativen und endlich 0 im negativen Sinne umkreist werden, so entsteht durch die Substitution $t = xz$ die zu (6) analoge Gleichung

$$\int_c^{\overline{(x, 0, x-, 0-)}} (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt \tag{7}$$

$$= e^{\pi i (p-1)} x^{q-1}\, \mathfrak{E}(p, q-p) \left[l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots \right],$$

woselbst die Integralgrenze $\mathfrak{c}$ beliebig bleibt, und $\mathfrak{E}(a, b)$ nach Band 35 dieser Annalen, pag. 499, das Integral

$$\mathfrak{E}(a, b) = e^{-\pi i (a+b)} \int_c^{\overline{(1, 0, 1-, 0-)}} z^{a-1} (1-z)^{b-1}\, dz \tag{8}$$

bedeutet. In (7) kommt die Reductionsformel

$$\mathfrak{E}(a+\nu, b) = (-1)^\nu \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)} \mathfrak{E}(a, b)$$

zur Anwendung. Für die Potenzen z^{a-1} und $(1-z)^{b-1}$ werden die in Band 35, pag. 498 und 510, bezeichneten Zweige vorausgesetzt.

Für das entsprechende Integral mit geradlinigem, von 0 bis x erstrecktem Integrationswege gilt, wenn unter $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$(9)\qquad E(a, b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,dz$$

verstanden wird, die Formel

$$(10)\qquad \int_0^x (t-x)^{q-p-1}\, t^{p-1}(l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\,dt =$$

$$(-1)^{q-p-1} x^{q-1} E(p, q-p)\Big(l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

in der die reellen Theile von p und $q-p$ positiv sein sollen.

Man nehme ferner an, dass die Variable t vom Nullpunkte in einer Richtung, welcher der zum Punkte x führenden entgegengesetzt ist, ausgeht, einen positiven Umlauf um den Nullpunkt macht und zu letzterem längs der zuerst durchlaufenen Strecke zurückkehrt (Fig. 1). Wird die Function

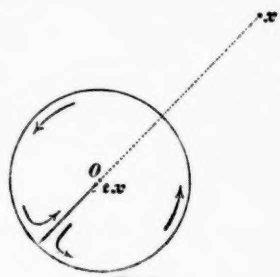


Fig. 1.

$$e^{\frac{x}{t}}\, t^{p-1}(l_0 + l_1 t + \cdots l_\nu t^\nu + \cdots)$$

nach t längs dieser Curve integrirt, so ergiebt nach Band 41 dieser Annalen, pag. 171, die Substitution $t = xz$ die Gleichung

$$(11)\qquad \int_{-\epsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{t}}\, t^{p-1}(l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\,dt$$

$$= x^p\, \overline{\Gamma}(-p)\Big(l_0 + \frac{l_1 x}{p+1} + \cdots + \frac{l_\nu x^\nu}{(p+1)(p+2)\ldots(p+\nu)} + \cdots\Big).$$

In derselben wird durch ϵ eine unendlich kleine positive reelle Constante, und durch $\overline{\Gamma}(a)$ das Integral (Band 35, pag. 514)

$$(12)\qquad \overline{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^u u^{a-1}\,du,$$

welches durch die Substitution $u = \frac{1}{z}$ die Form

$$(12\text{a})\qquad \overline{\Gamma}(a) = \int_{-\epsilon}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{z}}\, z^{-a-1}\,dz$$

annimmt (Band 41, pag. 158), bezeichnet.

Die Gleichung (1) geht für $m = n = 2$ in die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(13) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \varrho]\,\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

über. Im Falle $n = 2$, $m = 1$ entsteht aus (1) die Gleichung

$$(14) \qquad x\,\frac{d^2y}{dx^2} = (x-\varrho)\,\frac{dy}{dx} + \alpha y,$$

der die Reihe

$$(15) \qquad F(\alpha;\varrho;x) = 1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)}\,x^2 + \cdots \text{ inf.}$$

und eine analoge mit $x^{1-\varrho}$ multiplicirte Reihe genügen. Für die nachstehenden Rechnungen kommt ausserdem noch eine dritte Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung in Betracht, welche dem Falle $n = 2$, $m = 0$ der Gleichung (1) entspricht, nämlich die Gleichung

$$(16) \qquad x\,\frac{d^2y}{ax^2} + \varrho\,\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Um das Folgende übersichtlicher zu machen, wird es nothwendig, die bestimmten Integrale, welche die Lösungen der Differentialgleichungen (13), (14), (16) darstellen, in Kürze anzugeben. Nennt man Φ die Function

$$(17) \qquad \Phi = (u-x)^{-\beta}\,u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

und $C_1, \ldots C_6$ die Constanten

$$\begin{aligned}
C_1 &= e^{\pi i(1-\varrho)}\,\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha),\\
C_2 &= e^{\pi i(1-\alpha-\beta)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta),\\
C_3 &= e^{\pi i(\beta-\varrho)}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ \varrho-\alpha-\beta),\\
C_4 &= e^{\pi i(1-\beta)}\,\mathfrak{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\beta),\\
C_5 &= e^{-\pi i\varrho}\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ \varrho-\alpha),\\
C_6 &= e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\,\mathfrak{E}(\beta-\alpha,\ 1-\beta),
\end{aligned}$$

so sind die Hauptlösungen von (13) im allgemeinen Falle gleich den Ausdrücken (Band 35 dieser Annalen, pag. 517—526):

$$(18) \quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_c}^{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)} \Phi\,du = C_1 F(\alpha,\beta;\varrho;x),\\[2ex] \displaystyle\overline{\int_c}^{(x,\,0,x-,0-)} \Phi\,du = C_2 x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x),\end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_c}^{(\mathfrak{B},0,\,\mathfrak{B}-,\,0-)} \Phi\,du = C_3 F(\alpha,\beta;\ \alpha+\beta-\varrho+1;\ 1-x),\\[2ex] \displaystyle\overline{\int_c}^{(x,\,1,\,x-,1-)} \Phi\,du = C_4 (1-x)^{\varrho-\alpha-\beta} F(\varrho-\alpha,\varrho-\beta;\varrho-\alpha-\beta+1;1-x),\end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_c^{\overline{(1,0,1-,0-)}} \Phi\, du = C_5 x^{-\beta} F\left(\beta,\, \beta-\varrho+1;\, \beta-\alpha+1;\, \frac{1}{x}\right), \\ \displaystyle\int_c^{\overline{(\mathfrak{C},x,\mathfrak{C}-,x-)}} \Phi\, du = C_6 x^{-\alpha} F\left(\alpha,\, \alpha-\varrho+1;\, \alpha-\beta+1;\, \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ werden Linien verstanden, die von 0 zu x, resp. von 1 zu x und von 0 zu 1 gezogen sind; c ist ein beliebiger, jedoch von 0 und 1 verschiedener Punkt der u-Ebene. Die Umkreisung der Linien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ wird in derselben Weise wie die der einzelnen singulären Punkte bezeichnet. Die Integrale (18), (19), (20) behalten für beliebige Werthe der Constanten α, β, ϱ einen bestimmten Sinn. In den speciellen Fällen, wo eins oder mehrere dieser Integrale identisch verschwinden, hat man statt des Doppelumlaufs eine einfache geschlossene Curve, resp. eine geradlinige Strecke als Integrationsweg zu wählen.

Die Differentialgleichung (14) wird im allgemeinen Falle durch die bestimmten Integrale

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\overline{(\mathfrak{A})}} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du = \bar{\Gamma}(1-\varrho) F(\alpha;\, \varrho;\, x), \\ \displaystyle\int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}} e^u (u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho}\, du \\ \qquad = e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho;\, x) \end{cases}$$

(Band 36 dieser Annalen, pag. 84—96) befriedigt, wo $\mathfrak{A}$, wie in (18), die Verbindungslinie der Punkte 0 und x bezeichnet. Sind die Constanten $1-\alpha$ und $\alpha-\varrho+1$ (im reellen Theil) positiv, so kann man statt des letzteren Integrals das Integral mit geradlinigem Integrationsweg

$$(22)\quad \int_0^x e^u (u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho} du$$
$$= (-1)^\alpha E(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho;\, x)$$

nehmen. Ist nur eine dieser Constanten positiv, so wird ein einfacher Umlauf als Integrationsweg angewendet.

Die Differentialgleichung (16), der die unendlichen Reihen

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(\varrho;\, x) = 1 + \dfrac{x}{1\,.\,\varrho} + \dfrac{x^2}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)} + \cdots, \\ x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho;\, x) = x^{1-\varrho}\left\{1 + \dfrac{x}{1\,.\,(2-\varrho)} + \dfrac{x^2}{1\,.\,2\,.\,(2-\varrho)\,(3-\varrho)} + \cdots\right\} \end{cases}$$

genügen, gestattet zwei wesentlich von einander verschiedene Lösungen durch bestimmte Integrale. Einerseits hat man die Gleichungen (Band 38 dieser Annalen, pag. 228—237)

$$(24)\quad \overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\,\mathfrak{A})} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\,\bar{\Gamma}(2-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x),$$

woselbst die Variable u die Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ der Punkte 0 und x zweimal hintereinander im positiven Sinne umkreist, und

$$(25)\quad \begin{cases} \overline{\int}_{0}^{(x)} \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\dfrac{du}{\sqrt{u}} = \\ \overline{\int}_{\mathfrak{c}}^{(x,\,0,\,x-,\,0-)} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\,\bar{E}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\varrho\right)x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Andererseits bestehen die Identitäten*)

$$(26)\quad \begin{cases} \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du = \bar{\Gamma}(1-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x), \\ \overline{\int}_{-\mathfrak{c}x}^{(0)} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du = \bar{\Gamma}(\varrho-1)\,x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Unter $\mathfrak{c}$ wird, wie in (11) und (12a), eine unendlich kleine positive reelle Constante verstanden. Statt des in (25) angegebenen Integrals kann man, wenn der reelle Theil von $\frac{3}{2}-\varrho$ positiv ist, das geradlinige Integral

$$(27)\quad \int_{0}^{x} \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\,E\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\varrho\right)x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x)$$

anwenden.

In den nachstehenden §§ 2 und 3 wird der *Fall* $n=3$, $m=1$, und in § 4 der *Fall* $n=3$, $m=2$ der Differentialgleichung (1) behandelt. Auf den Fall $n=3$, $m=0$ dieser Gleichung ist der Verfasser bereits in Band 41 dieser Annalen, pag. 199—208, näher eingegangen.

§ 2.

Für $n=3$, $m=1$ entsteht aus (1) die Differentialgleichung

$$(28)\qquad x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\varrho+\sigma+1)\,x\frac{d^2y}{dx^2}+(\varrho\sigma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0,$$

welche durch die eindeutige Reihe

---

*) Cfr. „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten", Band 41 dieser Annalen, pag. 174—178.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Darstellung der Bessel'schen Function als geschlossenes Integral, welche sich am Schluss der ebengenannten Arbeit findet, bereits von Herrn N. Sonine in seiner Abhandlung „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries" im 16ten Bande dieser Annalen (Abschnitt II) angegeben worden ist, was zu erwähnen ich nicht unterlassen möchte.

$$(29)\quad F(\alpha;\varrho,\sigma;x)=1+\frac{\alpha}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\cdots$$

und durch die Producte

$$(30)\quad \begin{cases} x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;2-\varrho,\sigma-\varrho+1;x) \\ \qquad =x^{1-\varrho}\left(1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1.(2-\varrho)(\sigma-\varrho+1)}x+\cdots\right), \\ x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1;2-\sigma,\varrho-\sigma+1;x) \\ \qquad =x^{1-\sigma}\left(1+\frac{\alpha-\sigma+1}{1.(2-\sigma)(\varrho-\sigma+1)}x+\cdots\right) \end{cases}$$

befriedigt wird. Die Constanten ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ sind nach der Voraussetzung nicht ganzzahlig.

Indem man auf die Gleichung (28) nach einander eine Substitution von der Form (2) und eine Substitution von der Form (3) anwendet, findet man zwei verschiedene Systeme von bestimmten Doppelintegralen, welche die Hauptlösungen von (28) darstellen. Das erstere dieser Systeme enthält selbst noch wesentlich verschiedene Ausdrücke für die einzelnen Hauptlösungen, in Folge der (in § 1 angegebenen) doppelten Auflösung der Gleichung (16) durch bestimmte Integrale.

Man führt in (28) zunächst den Ausdruck

$$(31)\quad y=\int_g^h(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}V\,dv$$

ein, in welchem V nur von v abhängt, und die Grenzen g, h entweder constant oder gleich x sind. Dann wird V (cfr. Crelle's Journal, Band 112, pag. 65) ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$v\frac{d^2V}{dv^2}+(\varrho-\sigma+1)\frac{dV}{dv}-V=0,$$

die sich von (16) nur dadurch unterscheidet, dass v, V, $\varrho-\sigma+1$ an die Stelle von x, y, ϱ getreten sind. Nach § 1 kommen für V sowohl Integrale von der Form (24) und (25), resp. (27), als auch Integrale von der Form (26) in Betracht. Die Reihen, die der Gleichung für V genügen, sind

$$\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\,v),\qquad v^{\sigma-\varrho}\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\,v).$$

Um aus (31) die mehrdeutigen Hauptlösungen von (28) zu erhalten, wählt man als Weg der Variable v entweder die geradlinige Strecke von 0 bis x oder einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, resp. einen einfachen Umlauf um x oder 0. Nach (24) ist

$$\overline{\int_\infty^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')}} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$=2^{2\varrho-2\sigma+1}e^{2\pi i(\sigma-\varrho)}\,\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\,v),$$

wenn unter $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v verstanden wird. Man lasse hierin die u-Curve aus einem Kreise, der den ganzen Weg der Variable v $\big($in (31)$\big)$ umschliesst, und aus einem Abschnitte

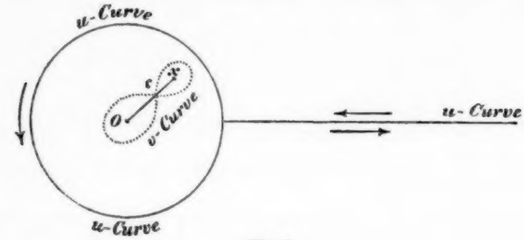


Fig. 2.

der positiven reellen Axe bestehen (Fig. 2). Die Anwendung der Formel (10), in welcher t durch v, und die Reihe $l_0 + l_1 t + \cdots$ durch

$$2^{2\varrho-2\sigma+1}e^{2\pi i(\sigma-\varrho)}\,\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\left\{1+\frac{v}{1.(\varrho-\sigma+1)}+\frac{v^2}{1.2.(\varrho-\sigma+1)(\varrho-\sigma+2)}+\cdots\right\}$$

ersetzt wird, führt dann zu der Gleichung

$$(32)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (v-x)^{-\alpha}\, v^{\alpha-\sigma}\, dv \,\overline{\int_\infty}^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}}\,(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{u}} \\ \qquad = \mathfrak{N}_1 x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;\, 2-\sigma,\, \varrho-\sigma+1;\, x), \end{cases}$$

woselbst $\mathfrak{N}_1$ die Constante

$$\mathfrak{N}_1 = 2^{2\varrho-2\sigma+1}e^{\pi i(2\sigma-2\varrho-\alpha)}\,\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\,E(\alpha-\sigma+1,\, 1-\alpha)$$

bedeutet.

Zur Convergenz des Doppelintegrals (32) ist erforderlich, dass die reellen Bestandtheile der Constanten $\alpha-\sigma+1$ und $1-\alpha$ positiv seien. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird statt der Formel (10) die Formel (7), resp. (6), benutzt. Im allgemeinen Falle, wo die Formel (7) zur Anwendung gelangt, findet man die Gleichung

$$(33)\quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma}\, dv \,\overline{\int_\infty}^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,\frac{du}{\sqrt{u}} \\ \qquad = \mathfrak{N}_2 x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;\, 2-\sigma,\, \varrho-\sigma+1;\, x), \end{cases}$$

in der

$$\mathfrak{N}_2 = 2^{2\varrho-2\sigma+1}e^{\pi i(\alpha+\sigma-2\varrho)}\,\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\,\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\, 1-\alpha)$$

gesetzt ist. Die analoge aus (6) folgende Entwicklung soll hier nicht besonders angeführt werden.

Man substituire ferner, gemäss (27), für V den Ausdruck

$$(34)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}} \\ = 2E\left(\frac{1}{2},\, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)v^{\sigma-\varrho}\,\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\, v). \end{cases}$$

Die Convergenz des links stehenden Integrals erfordert, dass der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ positiv sei. Aber die Differentialgleichung (28) ist nach ϱ und σ symmetrisch. Wird also σ als diejenige der zwei Constanten ϱ, σ definirt, die den grösseren reellen Bestandtheil hat, so ist der obigen Bedingung genügt. Indem man in (31) den Doppelumlauf um die Punkte x und 0 als Integrationsweg von v nimmt und für V das bezeichnete Integral einsetzt, erhält man mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$(35)\quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}dv\int_0^v\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}} \\ = \mathfrak{N}_3\, x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho,\, \sigma-\varrho+1;\, x), \end{cases}$$

wo unter $\mathfrak{N}_3$ die Constante

$$\mathfrak{N}_3 = 2e^{\pi i(\alpha-\varrho)}E\left(\frac{1}{2},\, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha)$$

verstanden wird.

Es ist ferner nach (26)

$$\overline{\int_{-\infty}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}du = \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\, v),$$

$$\overline{\int_{-\epsilon v}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}du = \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,v^{\sigma-\varrho}\,\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\, v).$$

Werden diese Functionen nach einander an Stelle von V in (31) eingeführt, so liefert die Formel (7) die Gleichungen

$$(36)\quad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\,\overline{\int_{-\infty}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du$$

$$= e^{\pi i(\alpha-\sigma)}\,\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\, 1-\alpha)\,x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1;\, 2-\sigma,\, \varrho-\sigma+1;\, x),$$

und

$$(37)\quad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}dv\,\overline{\int_{-\epsilon v}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du$$

$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha)\,x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho,\, \sigma-\varrho+1;\, x).$$

Die Doppelintegrale (33) und (36) stellen die eine, die Integrale (35) und (37) die andere mehrdeutige Hauptlösung der Differentialgleichung

(28) für beliebige Werthe der Constanten α, ϱ, σ dar. Auszunehmen sind nur die speciellen Werthe dieser Constanten, für welche die Grössen $\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)$, $\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\ 1-\alpha)$ verschwinden. In letzteren Fällen wird statt des Doppelumlaufs ein einfacher Umlauf um x oder 0, resp. die geradlinige Strecke von 0 bis x als Weg von v genommen.

Man lasse sodann in (31) die Variable v einen geschlossenen Integrationsweg durchlaufen, der im unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe beginnt und endigt und sowohl den Nullpunkt als auch den Punkt x umschliesst, und zwar möge dieser Weg aus einem (in beiden Richtungen durchlaufenen) Abschnitte der negativen reellen Axe und aus einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, innerhalb dessen der Punkt x liegt, bestehen. Da mod. v hiernach stets grösser als mod. x ist, so kann die Potenz $(v-x)^{-\alpha}$ in die convergente Reihe

$$v^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{v}\right)^{-\alpha}=v^{-\alpha}\left\{1+\frac{\alpha}{1}\frac{x}{v}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\frac{u^2}{v^2}+\cdots\right\}$$

entwickelt werden. Also ist für den genannten Integrationsweg

$$\overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,V\,dv$$

$$=\mathfrak{G}_0+\frac{\alpha}{1}\mathfrak{G}_1x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1\,.\,2\ldots\nu}\mathfrak{G}_\nu x^\nu+\cdots,$$

wo durch $\mathfrak{A}$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und x, und durch $\mathfrak{G}_\nu$ (für $\nu=0,1,2,\ldots$) das constante Integral

$$\mathfrak{G}_\nu=\overline{\int}_{-\infty}^{(0)}v^{-\sigma-\nu}\,V\,dv$$

bezeichnet wird. Man setze nun für V das in (34) genannte Integral

$$\int^{v}\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

ein, welches durch die Substitution $u=vu_1^{\,2}$, $du=2vu_1\,du_1$, die Gestalt

$$2v^{\sigma-\varrho}\int_0^1\left(e^{2u_1\sqrt{v}}+e^{-2u_1\sqrt{v}}\right)(1-u_1^{\,2})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,du_1$$

annimmt. Dann wird

$$\mathfrak{G}_\nu=2\overline{\int}_{-\infty}^{(0)}v^{-\varrho-\nu}\,dv\int_0^1\left(e^{2u_1\sqrt{v}}+e^{-2u_1\sqrt{v}}\right)(1-u_1^{\,2})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\,du_1.$$

Dieses Doppelintegral ist aber, wenn die reellen Theile von $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt werden, nach § 3 (Formel (24))

des Aufsatzes des Verfassers „Ueber fünf Doppelintegrale"*) gleich dem Ausdruck

$$2^{2\varrho+2\nu-1}\,E\left(\varrho-\tfrac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu),$$

wofür, wegen der Reductionsformeln der Integrale E und $\overline{\Gamma}$,

$$\frac{2^{2\varrho-1}E\left(\varrho-\frac{1}{1},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\ \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}$$

geschrieben werden kann. Man gelangt somit zu der Gleichung

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}&\overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_0^v\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\&=2^{2\varrho-1}E\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x),\end{aligned}\right.$$

deren rechte Seite gleich dem Producte aus der Reihe (29) und einer Constanten ist.**)

---

*) Band 41 dieser Annalen, pag. 191.

**) Die obige (zur Gleichung (38) führende) Rechnung ist derjenigen analog, welche am Schluss des § 5 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho,\sigma;\ x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho,\sigma,\tau;\ x)$", Band 41 dieser Annalen, pag. 204, angestellt wird. Auch die übrigen in §§ 5 und 6 der genannten Arbeit enthaltenen Entwickelungen übertragen sich auf die hier behandelte Differentialgleichung 3ter Ordnung. Man bemerke, dass auf diese Weise noch die Formeln

$$(38\text{a})\quad\left\{\begin{aligned}&\overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_{-\infty i}^{+\infty i}e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}\,du\\&=\overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{\Gamma}(1-\sigma)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x),\end{aligned}\right.$$

$$(38\text{b})\quad\left\{\begin{aligned}&\overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\int_0^v e^{-2\sqrt{u}}(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\&=2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}E\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x),\end{aligned}\right.$$

$$(38\text{c})\quad\left\{\begin{aligned}&\overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}\,dv\ \overline{\int}_0^{(v)}e^{-2\sqrt{u}}(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\\&=2^{2\varrho-1}e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\overline{E}\left(\varrho-\tfrac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x)\end{aligned}\right.$$

erhalten werden. Hierbei ist vorausgesetzt, dass der reelle Theil von $\varrho-1$ positiv sei; ausserdem werden in (38a) die reellen Theile von $\sigma-1$ und $\varrho-\sigma$, in (38b) der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv angenommen. Die Variable v geht in den Integralen (38b) und (38c) vom unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe aus und umkreist die Linie $\mathfrak{A}$ (welche die Punkte 0 und x verbindet) zweimal

§ 3.

Die zweite Substitution, die auf die Gleichung (28) angewendet wird, ist

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V_1 \, dv. \tag{39}$$

Die Function V_1 befriedigt in diesem Falle (cfr. Crelle's Journal, Band 112, pag. 79) die Differentialgleichung

$$v \frac{d^2 V_1}{dv^2} = \{v - (\varrho - \sigma + 1)\} \frac{dV_1}{dv} + (\alpha - \sigma + 1) V_1, \tag{40}$$

die aus der Gleichung (14) entsteht, wenn die Grössen x, y, α, ϱ durch $v, V_1, \alpha - \sigma + 1, \varrho - \sigma + 1$ ersetzt werden. Gemäss (21) nimmt man für V_1, indem man durch $\mathfrak{A}'$ wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v bezeichnet, nach einander die Integrale

$$\bar{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} e^u (u - v)^{\sigma - \alpha - 1} u^{\alpha - \varrho} du = \bar{\Gamma}(\sigma - \varrho) F(\alpha - \sigma + 1; \varrho - \sigma + 1; v),$$

$$\bar{\int}_c^{(v, 0, v-, 0-)} e^u (u - v)^{\sigma - \alpha - 1} u^{\alpha - \varrho} du$$
$$= e^{\pi i(\alpha - \varrho)} \mathfrak{C}(\alpha - \varrho + 1, \sigma - \alpha) v^{\sigma - \varrho} F(\alpha - \varrho + 1; \sigma - \varrho + 1; v).$$

Dann ergeben sich aus der Formel (11), in der l_ν den Werth

$$\bar{\Gamma}(\sigma - \varrho) \frac{(\alpha - \sigma + 1)(\alpha - \sigma + 2)\ldots(\alpha - \sigma + \nu)}{1.2\ldots\nu.(\varrho - \sigma + 1)(\varrho - \sigma + 2)\ldots(\varrho - \sigma + \nu)},$$

resp.

$$e^{\pi i(\alpha - \varrho)} \mathfrak{C}(\alpha - \varrho + 1, \sigma - \alpha) \frac{(\alpha - \varrho + 1)(\alpha - \varrho + 2)\ldots(\alpha - \varrho + \nu)}{1.2\ldots\nu.(\sigma - \varrho + 1)(\sigma - \varrho + 2)\ldots(\sigma - \varrho + \nu)},$$

und p den Werth $1 - \sigma$, resp. $1 - \varrho$ erhält, die für beliebige Werthe von α, ϱ, σ gültigen Gleichungen

$$\bar{\int}_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} dv \bar{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} e^u (u - v)^{\sigma - \alpha - 1} u^{\alpha - \varrho} du \tag{41}$$
$$= \bar{\Gamma}(\sigma - \varrho) \bar{\Gamma}(\sigma - 1) x^{1 - \sigma} F(\alpha - \sigma + 1; 2 - \sigma, \varrho - \sigma + 1; x),$$

$$\bar{\int}_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} dv \bar{\int}_c^{(v, 0, v-, 0-)} e^u (u - v)^{\sigma - \alpha - 1} u^{\alpha - \varrho} du \tag{42}$$
$$= e^{\pi i(\alpha - \varrho)} \mathfrak{C}(\alpha - \varrho + 1, \sigma - \alpha) \bar{\Gamma}(\varrho - 1) x^{1 - \varrho} F(\alpha - \varrho + 1; 2 - \varrho, \sigma - \varrho + 1; x).$$

---

hinter einander in positiver Drehungsrichtung. Bei dem Integral (38a), wo der Weg von v der nämliche wie (38) ist, durchläuft die Variable u im Uebrigen die imaginäre Axe, umgeht aber den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe.

Die Gleichung (41) wird niemals illusorisch. Denn da $\overline{\Gamma}(a)$ nur für ein positives ganzzahliges a verschwindet, und ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ hier als nicht ganzzahlig vorausgesetzt werden, so sind $\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)$ und $\overline{\Gamma}(\sigma-1)$, wie auch $\overline{\Gamma}(\varrho-1)$, von Null verschieden. Das auf der rechten Seite der Gleichung (42) stehende Integral $\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\ \sigma-\alpha)$ nimmt den Werth Null an, wenn $\alpha-\varrho+1$ oder $\sigma-\alpha$ eine positive ganze Zahl ist; zugleich verschwindet dann das auf der linken Seite von (42) befindliche Doppelintegral. In diesen speciellen Fällen hat man die Gleichung (42) durch die einfachere analoge Gleichung zu ersetzen, auf deren linker Seite die Variable u (statt des Doppelumlaufs) einen einmaligen Umlauf um v, resp. 0 (bei 0, resp. v beginnend) ausführt oder die Verbindungslinie der Punkte 0 und v durchläuft $\big($cfr. (22)$\big)$.

Ist der reelle Theil von $\alpha-\varrho+1$ positiv, so genügt der Differentialgleichung (40) das particuläre Integral

$$\overline{\int_0^{(v)}} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du,$$

das durch die Substitution $u = vu_1$, $du = v\,du_1$, die Gestalt

$$v^{\sigma-\varrho} \overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v} (u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

annimmt. Man setze den letzteren Ausdruck an Stelle von V_1 in (39) ein und lasse die Variable v von $-\infty$ aus einen positiven Umlauf um den Nullpunkt machen. Das hierdurch entstehende Doppelintegral

$$\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho} dv \overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v} (u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

ergiebt, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ in $1+\frac{1}{v}\frac{x}{1}+\frac{1}{v^2}\frac{x^2}{1.2}+\cdots$ entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1 \frac{x}{1} + \mathfrak{H}_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \mathfrak{H}_\nu \frac{x^\nu}{1.2\ldots\nu} + \cdots,$$

wo $\mathfrak{H}_\nu$ das constante Doppelintegral

$$\mathfrak{H}_\nu = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\varrho-\nu} dv \overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v} (u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

bezeichnet. Für $\mathfrak{H}_\nu$ gilt aber, wenn angenommen wird, dass der reelle Theil von α positiv sei, die Gleichung*)

$$\mathfrak{H}_\nu = \overline{\Gamma}(1-\varrho-\nu)\, \overline{E}(\alpha+\nu,\ \sigma-\alpha).$$

*) Cfr. § 3 des Aufsatzes des Verfassers „Ueber ein vielfaches, auf Euler'sche Integrale reducirbares Integral" im 107ten Bande des Crelle'schen Journals, p. 246. Die dort abgeleitete Formel:

Indem man dann mittelst der für die Integrale $\overline{E}$ und $\overline{\Gamma}$ geltenden Reductionsformeln die Grösse $\mathfrak{H}_\nu$ in den Quotienten

$$\mathfrak{H}_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}\,\overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{E}(\alpha,\sigma-\alpha)$$

umformt, findet man

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\varrho}\, dv \overline{\int}_0^{(1)} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1 \\ &\quad = \overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{E}(\alpha,\sigma-\alpha)\,F(\alpha;\,\varrho,\sigma;\,x). \end{aligned}\right.$$

Das betrachtete Doppelintegral stellt also, wie das Doppelintegral (38), resp. (38a), (38b), (38c), die eindeutige particuläre Lösung der Differentialgleichung (28) dar.

§ 4.

Die Differentialgleichung

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\varrho+\sigma+1)\,x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\frac{dy}{dx} \\ &= x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha+\beta+1)\,x\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y, \end{aligned}\right.$$

$$\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} s^{-a}\,ds \int_0^1 e^{st}\,t^b\,(1-t)^{c-1}\,dt = \overline{\Gamma}\,(1-a)\,E(a+b,\,c)$$

lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Variable t vom Nullpunkte aus den Punkt 1 umkreist. Giebt man dem Doppelintegral

$$H = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} s^{-a}\,ds \overline{\int}_0^{(1)} e^{st}\,t^b\,(t-1)^{c-1}\,dt$$

die Form

$$H = \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^s s^{-a}\,ds \overline{\int}_0^{(1)} e^{s(t-1)}\,t^b\,(t-1)^{c-1}\,dt$$

und setzt für $e^{s(t-1)}$ die Reihe $1+\frac{s(t-1)}{1}+\cdots$ ein, so entsteht für H eine Reihenentwickelung, in welcher der allgemeine Term

$$\overline{\Gamma}(1-a-\nu)\,\overline{E}\,(b+1,\,c+\nu),$$

lautet. Eine Rechnung von derselben Art, wie sie in dem genannten Aufsatze enthalten ist, führt dann zu der Gleichung

$$H = \overline{\Gamma}\,(1-a)\,\overline{E}\,(a+b,\,c),$$

durch welche das obige Integral $\mathfrak{H}_\nu$ bestimmt wird.

die sich aus (1) im Falle $n = 3$, $m = 2$ ergiebt, und deren Hauptlösungen in Reihenform

$$(45)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta;\ \varrho, \sigma;\ x), = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \,.\, \varrho\sigma} x + \cdots, \\ x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1;\ 2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x), \\ x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x) \end{cases}$$

lauten, ist vom Verfasser bereits in § 1 und § 2 der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte" (Crelle's Journal, Band 108, pag. 50) behandelt worden. Die Gleichung wird daselbst durch Doppelintegrale gelöst, zu denen man durch eine Substitution von der Form (2) gelangt. Im Folgenden soll, als Ergänzung dieser Rechnung, die Substitution (cfr. 3)

$$(46)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, V_2\, dv$$

auf die Gleichung (44) angewendet werden. Man erhält hierdurch (nach zweimaliger theilweiser Integration) für die Function V_2 die Differentialgleichung

$$(47)\qquad v(v-1)\frac{d^2 V_2}{dv^2} + \{(\alpha+\beta-2\sigma+3)\,v - (\varrho-\sigma+1)\}\frac{dV_2}{dv} + (\alpha-\sigma+1)(\beta-\sigma+1)\,V_2 = 0,$$

die aus (13) entsteht, wenn die Grössen v, V_2, $\alpha-\sigma+1$, $\beta-\sigma+1$, $\varrho-\sigma+1$ statt x, y, α, β, ϱ gesetzt werden.

Um die mehrdeutigen Hauptlösungen der Gleichung (44) aus dem Integral (46) abzuleiten, nimmt man $g = h = -\,\mathfrak{c}x$ und lässt (wie in (41) und (42)) die Variable v den in (11) für die Variable t angegebenen Weg durchlaufen. Sind die reellen Bestandtheile der Constanten $\beta-\varrho+1$ und $\sigma-\beta$ positiv, so kann für V_2 zunächst das Integral

$$\int_0^v (v-u)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

gewählt werden, das durch die Substitution $u = vu_1$, $du = v\,du_1$, in das Product

$$v^{\sigma-\varrho}\int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1$$

übergeht. Das auf diese Weise erhaltene Doppelintegral

$$\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1$$

verwandelt sich durch die Substitution $v = x v_1$, $dv = x\, dv_1$, in den Ausdruck

$$x^{1-\varrho}\int_{-\varepsilon}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{v_1}} v_1^{-\varrho}\, dv_1 \int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v_1 x)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1,$$

in welchem die Potenz $(1-u_1 v_1 x)^{\varrho-\alpha-1}$ nach dem binomischen Satze in die Reihe

$$1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1} u_1 v_1 x+\cdots+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\dots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\dots\nu} u_1^\nu v_1^\nu x^\nu+\cdots$$

entwickelt wird. Diese Reihe ist im vorliegenden Falle für einen beliebigen Werth von x anwendbar; denn die v-Curve, welche in ihren Dimensionen beliebig bleibt, kann so klein genommen werden, dass mod. $(u_1 v_1 x)$, d. h. mod. $(u_1 v)$ die Einheit nicht erreicht. Somit gewinnt man, nach Berücksichtigung von (9) und (12a), für das genannte Doppelintegral die Entwickelung

$$x^{1-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\alpha-\varrho+1)\dots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\dots\nu}\,\overline{\Gamma}(\varrho-1-\nu)\, E(\beta-\varrho+1+\nu, \sigma-\beta).$$

Da nun

$$E(\beta-\varrho+1+\nu, \sigma-\beta)=\frac{(\beta-\varrho+1)\dots(\beta-\varrho+\nu)}{(\sigma-\varrho+1)\dots(\sigma-\varrho+\nu)} E(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta).$$

und (cfr. Band 35 dieser Annalen, pag. 515)

$$\overline{\Gamma}(\varrho-1-\nu)=\frac{\overline{\Gamma}(\varrho-1)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\dots(\nu+1-\varrho)}$$

ist, so entsteht die Gleichung

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv \int_0^v (v-u)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du\\ &=\overline{\Gamma}(\varrho-1)\, E(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta)\, x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1; 2-\varrho,\\ &\qquad\qquad \sigma-\varrho+1; x).\end{aligned}\right.$$

Erfüllen die Constanten β, ϱ, σ die oben erwähnte Bedingung $(\beta-\varrho+1>0,\ \sigma-\beta>0)$ nicht, so wird die vorstehende Rechnung in

der Art modificirt, dass ein Doppelumlauf (cfr. das zweite Integral (18)), resp. ein einfacher Umlauf um 0 oder v den Weg der Variable u bildet. Im allgemeinen Falle findet man die zu (48) analoge Gleichung

$$(49)\quad \overline{\int}_{-\varepsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{c}^{(v,0,v-,0-)} (v-u)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$
$$= \mathfrak{N}' x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1;\ 2-\varrho, \sigma-\varrho+1;\ x),$$

in der die Constante $\mathfrak{N}'$ den Werth

$$\mathfrak{N}' = e^{\pi i(\sigma-\varrho+1)}\, \overline{\Gamma}(\varrho-1)\, \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta)$$

hat.

Für V_2 soll ferner der Ausdruck

$$(50)\qquad \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du,$$

der dem ersten Integral (18) entspricht, in (46) substituirt werden, während v einen Integrationsweg von derselben Art, wie in (48), (49) durchläuft. Unter $\mathfrak{A}'$ wird wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v verstanden. Um die Wege von u und v näher zu bestimmen, schlägt man um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, von denen der grössere $\mathfrak{K}$ die positive reelle Axe im Punkte c schneiden möge. Die Radien beider Kreise werden kleiner als 1 vorausgesetzt. Man construirt ausserdem um den Punkt 1 als Mittelpunkt einen durch den Punkt c gehenden Kreis $\mathfrak{L}$. Der Kreis $\mathfrak{K}'$ möge zusammen mit der vom Punkte $-\varepsilon x$ zum Punkte d (Fig. 3) gezogenen Geraden für den

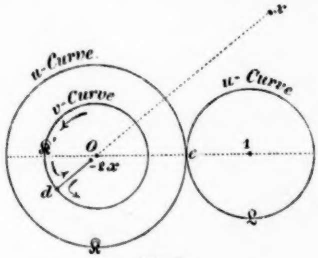


Fig. 3.

Weg der Variable v angewendet werden. Die Variable u soll vom Punkte c ausgehen und die Kreise $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$ zuerst in positiver, dann (in der nämlichen Reihenfolge) in negativer Drehungsrichtung durchlaufen. Da nach diesen Festsetzungen mod. u stets grösser als mod. v ist, so besteht für die Potenz $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ die convergente Entwickelung

$$(u-v)^{\sigma-\beta-1} = u^{\sigma-\beta-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{\sigma-\beta-1}$$

$$= u^{\sigma-\beta-1}\left\{1+\frac{\beta-\sigma+1}{1}\frac{v}{u}+\cdots+\frac{(\beta-\sigma+1)\ldots(\beta-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu}\frac{v^\nu}{u^\nu}+\cdots\right\}.$$

Das Doppelintegral

$$\overline{\int}_{-tx}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\,dv \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

geht, wenn für $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ die obige Reihe gesetzt, und zugleich $v = xv_1$, $dv = x\,dv_1$ substituirt wird, in die Summe

$$x^{1-\sigma}\left\{\mathfrak{M}_0+\frac{\beta-\sigma+1}{1}\mathfrak{M}_1 x+\cdots+\frac{(\beta-\sigma+1)\ldots(\beta-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu}\mathfrak{M}_\nu x^\nu+\cdots\right\}$$

über, in der $\mathfrak{M}_\nu$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das Product

$$\mathfrak{M}_\nu = \overline{\int}_{-t}^{(0)} e^{\frac{1}{v_1}} v_1^{-\sigma+\nu}\,dv_1 \overline{\int}_{c}^{(1,0,1-,0-)} u^{\sigma-\varrho-\nu-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. Nach (8) und (12a) ist

$$\mathfrak{M}_\nu = \overline{\Gamma}(\sigma-1-\nu)e^{\pi i(\sigma-\alpha-\nu)}\mathfrak{E}(\sigma-\varrho-\nu,\ \varrho-\alpha)$$

$$= e^{\pi i(\sigma-\alpha)}\overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\ \varrho-\alpha)\,\frac{(\alpha-\sigma+1)(\alpha-\sigma+2)\ldots(\alpha-\sigma+\nu)}{(2-\sigma)\ldots(\nu-\sigma)(\varrho-\sigma+1)\ldots(\varrho-\sigma+\nu)}.$$

Also gilt, wenn man $\mathfrak{N}''$ die Constante

$$\mathfrak{N}'' = e^{\pi i(\sigma-\alpha)}\overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\ \varrho-\alpha)$$

nennt, die Gleichung

$$(51)\quad \overline{\int}_{-tx}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\,dv \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

$$= \mathfrak{N}'' x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x).$$

Endlich lässt sich auch die eindeutige particuläre Lösung der Differentialgleichung (43)

$$F(\alpha, \beta;\ \varrho, \sigma;\ x)$$

durch ein Integral von der Form (46) darstellen. Als Integrationsweg von v dient dann (wie in (43)) eine von $-\infty$ ausgehende geschlossene Curve, die den Nullpunkt umkreist. Die reellen Theile der Constanten α und β werden hierbei als positiv vorausgesetzt. Für die Durchführung der Rechnung benutzt man eine auf ein Doppelintegral bezügliche Formel. Der Verfasser hat in § 3 der bereits erwähnten Abhandlung

„Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc." (Band 102 des Crelle'schen Journals, pag. 91) die Gleichung

$$\int_0^1 v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}\,dv\int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}\,du$$
$$= E(k_1, l_1)\,E(k_2, k_1+l_1+l_2)$$

abgeleitet. Eine ähnliche Formel besteht auch für den Fall, dass die Variablen u und v, statt die Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 zu durchlaufen, vom Punkte 1 aus einen Umlauf um den Nullpunkt machen. Man findet bei Anwendung dieser Integrationswege, indem man das Integral (5) durch die Substitution $z = 1 - w$ in

$$\bar{E}(a, b) = e^{-\pi i b}\overline{\int_1^{(0)}} w^{b-1}(1-w)^{a-1}\,dw$$

(Band 35 dieser Annalen, pag. 513) umformt, die Gleichung*)

---

*) Für die Potenz $(1-uv)^{-a-b}$ gilt, da die Wege der Variablen u und v aus einem kleinen Kreise um den Nullpunkt und aus einem zwischen 0 und 1 liegenden Stücke der reellen Axe zusammengesetzt werden können (so dass mod. $(uv) < 1$ ist), die convergente Entwickelung

$$(1-uv)^{-a-b} = 1 + \frac{a+b}{1}uv + \cdots + \frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}u^p v^p + \cdots.$$

Daher ist das in (52) genannte Doppelintegral gleich der Summe

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}\overline{\int_1^{(0)}} v^{b+p-1}(1-v)^{a-1}\,dv\overline{\int_1^{(0)}} u^{l+p-1}(1-u)^{k-1}\,du,$$

$$= \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}e^{\pi i(b+l)}\bar{E}(a, b+p)\,\bar{E}(k, l+p)$$

die, wenn man für $\bar{E}(a, b+p)$, $\bar{E}(k, l+p)$ das Product

$$\frac{b(b+1)\ldots(b+p-1)}{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}\,\frac{l(l+1)\ldots(l+p-1)}{(k+l)\ldots(k+l+p-1)}\bar{E}(a, b)\,\bar{E}(k, l)$$

einsetzt, die Form

$$e^{\pi i(b+l)}\bar{E}(a, b)\,\bar{E}(k, l)\left\{1 + \frac{bl}{1.(k+l)} + \frac{b(b+1)\,l(l+1)}{1.2.(k+l)(k+l+1)} + \cdots\right\}$$

annimmt. Der in der Klammer befindliche Ausdruck stellt aber eine Gauss'sche hypergeometrische Reihe mit dem vierten Argument 1 dar, welche den Werth $\dfrac{\Gamma(k+l)\,\Gamma(k-b)}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+l-b)}$ hat. Da nun $\bar{E}(k, l)$ gleich dem Quotienten $\dfrac{\Gamma(k)\,\bar{\Gamma}(l)}{\Gamma(k+l)}$ ist, so ergiebt sich das Doppelintegral (52) in der That als identisch mit dem Producte

$$e^{\pi i(b+l)}\bar{E}(a, b)\frac{\Gamma(k-b)\,\bar{\Gamma}(l)}{\Gamma(k-b+l)} = e^{\pi i(b+l)}\bar{E}(a, b)\,\bar{E}(k-b, l).$$

$$(52)\quad \begin{cases} \overline{\int_1^{(0)}} v^{b-1}(1-v)^{a-1}\,dv \overline{\int_1^{(0)}} u^{l-1}(1-u)^{k-1}(1-uv)^{-a-b}\,du \\ \qquad = e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a,\,b)\,\overline{E}(k-b,\,l). \end{cases}$$

Man bilde, indem man in (46) an Stelle von V_2 das Integral

$$\overline{\int_\infty^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\sigma}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

nimmt, das Doppelintegral

$$(53)\qquad \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,dv \overline{\int_\infty^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du.$$

Dasselbe liefert, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ nach Potenzen von x entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1\frac{x}{1} + \mathfrak{P}_2\frac{x^2}{1.2} + \cdots + \mathfrak{P}_\nu\frac{x^\nu}{1.2\ldots\nu} + \cdots,$$

in der $\mathfrak{P}_\nu$ die Constante

$$\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\sigma-\nu}\,dv \overline{\int_\infty^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. Man substituirt

$$u = \frac{1}{1-u_1},\quad v = \frac{v_1}{v_1-1},$$

so dass $u_1 = \frac{u-1}{u}$, $v_1 = \frac{v}{v-1}$ ist. Der Weg der Variable u möge aus einem (in beiden Richtungen durchlaufenen) Abschnitte der positiven reellen Axe und einem kleinen Kreise um den Punkt 1 bestehen, der Weg der Variable v aus einem Abschnitt der negativen reellen Axe und einem kleinen Kreise um den Nullpunkt. Dann ergiebt sich sowohl für u_1 als für v_1 ein Weg, der vom Punkte 1 ausgeht und den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung umkreist. Es entsteht auf diese Weise für $\mathfrak{P}_\nu$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_\nu = (-1)^{\sigma+\nu-1}\overline{\int_1^{(0)}} v_1^{-\sigma-\nu}(1-v_1)^{\beta+\nu-1}dv_1 \overline{\int_1^{(0)}} u_1^{\varrho-\alpha-1}(1-u_1)^{\alpha-\sigma}(1-u_1v_1)^{\sigma-\beta-1}\,du_1.$$

Die Anwendung der Formel (52) giebt nun

$$\mathfrak{P}_\nu = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\,\overline{E}(\beta+\nu,\,1-\sigma-\nu)\,\overline{E}(\alpha+\nu,\,\varrho-\alpha),$$

so dass, nach Berücksichtigung der Reductionsformel

$$\overline{E}(a,\,b-\nu) = (-1)^\nu\frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-\nu)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-\nu)}\,\overline{E}(a,\,b)$$

und der analogen in § 1 angegebenen Formel für $\overline{E}(a+\nu, b)$, die Grösse $\mathfrak{P}_\nu$ in den Ausdruck

$$e^{\pi i(\varrho-\alpha)} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}\,\overline{E}(\beta, 1-\sigma)\,\overline{E}(\alpha, \varrho-\alpha)$$

übergeht. Somit wird für das Doppelintegral (53) die Gleichung

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int_{\infty}^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du \\ &= e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\,\overline{E}(\alpha, \varrho-\alpha)\,\overline{E}(\beta, 1-\sigma)\, F(\alpha, \beta; \varrho, \sigma; x) \end{aligned}\right.$$

erhalten.

Ueber unverzweigte lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf ebenen Curven vierten Grades.

(Auszug aus einem an F. Klein gerichteten Briefe.)

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Sind $z_1 z_2 z_3$ durch die Gleichung verbunden

$$f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 = 0$$

so lässt sich die ternäre Form

$$r = r_z^2 = (r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3)^2$$

in eine Form in z_1, z_2 transformiren $R = (R_1 z_1 + R_2 z_2)^2$. Die Invariante $(RR)^2$ dieser binären Form hat dann den Werth:

$$\frac{1}{f_3^2}(r r_1 f)^2.$$

Zwischen den Covarianten einer ternären Form

$$f = a_x^4 = 0$$

besteht u. A. die Relation:

$$a_x a_3 (afu)^2 = \frac{1}{3} u_x u_3 \Delta - \frac{1}{2} f_3 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - \frac{1}{2} u_x^2 \Delta_3$$

in welcher:

$$f_k = a_x^3 a_k; \quad \Delta = \Delta_x^6 = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2; \quad \Delta_3 = \Delta_x^5 \Delta_3$$

bedeutet. Aus ihr ergeben sich die Formeln:

$$a_x^2(afu)^2 = -\tfrac{1}{6}u_x^2\Delta;\quad (abf)^2 a_x b_x a_3 b_3 = \tfrac{1}{3}\Delta f_{33} - \Delta_3 f_3$$

und da:

$$(f_3^2)_{y^2} = f_3 \cdot a_x a_3 a_y^2 - \tfrac{3}{10}\, a_x b_x a_3 b_3 (a_y b_x - b_y a_x)^2$$

ist, auch:

$$(f_3^2 fu)^2 = f_3\Big(\tfrac{1}{3}u_x u_3 \Delta - \tfrac{1}{2} f_3 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - \tfrac{1}{5}u_x^2 \Delta_3\Big) - \tfrac{1}{10}u_x^2 \Delta f_{33}.$$

Bezeichnet man die Differentiale der Variabeln x_i durch

$$dx_i = z_i$$

und ist x_3 durch die Gleichung $f = 0$ als implicite Function der unabhängigen Variabeln $x_1 x_2$ gegeben, so ist $d_2 x_1 = d_2 x_2 = 0$ und z_3 und $d_2 x_3$ sind als Functionen von z_1 und z_2, x durch die Gleichungen bestimmt:

$$(1)\qquad a_x^3 a_z = f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 = 0,$$

$$(2)\qquad 3a_x^2 a_z^2 + f_3 d_2 x_3 = 0.$$

Man kann dieselben dazu benutzen, um die 2ten Differentiale von Functionen von x durch quadratische Functionen von $z_1\, z_2$ auszudrücken. Die 2ten Differentiale der Formen:

$$\Pi = p_x^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$g = f_3^2 = g_x^6$$

werden nach $F(2)$ die quadratischen Formen in $z_1 z_2 z_3$

$$d_2\Pi = \tfrac{3}{4} p_x^{-\frac{5}{2}} p_z^2 + \tfrac{3}{2} a_x^2 a_z^2 \cdot \tfrac{1}{f_3} p_x^{-\frac{3}{2}} p_3,$$

$$d_2 g = 30 g_x^4 g_z^2 - 18 g_x^5 g_3 \cdot \tfrac{1}{f_3} a_x^2 a_z^2.$$

Trägt man hier für z_3 seinen Werth aus F. (1) ein, so erhält man 2 binäre quadratische Formen Π, f_3^2 in z_1, z_2; schiebt man sie 2 Mal binär übereinander, so erhält man die Ueberschiebung $(\Pi, f_3^2)^2$, welche sich nach Satz I durch ternäre symbolische Producte so ausdrücken lässt:

$$\tfrac{9}{2}(\Pi f_3^2)^2 = \left\{\begin{aligned} &\tfrac{5}{f_3^2} p_x^{-\frac{5}{2}} g_x^4 (pgf)^2 - \tfrac{3}{f_3^3} g_x^5 g_3 a_x^2 (apf)^2 p_x^{-\frac{3}{2}} \\ &+ \tfrac{10}{f_3^3} p_x^{-\frac{3}{2}} p_3 g_x^4 a_x^2 (agf)^2 + \tfrac{6}{f_3^4} p_x^{-\frac{3}{2}} p_3 g_x^5 g_3 a_x^2 b_x^2 (abf) \end{aligned}\right.$$

$$= -\tfrac{5}{2} p_x^{-\frac{5}{2}} a_x^2 b_x^2 (abp)^2 - \tfrac{\Delta_3}{f_3}\Pi.$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass die von Ihnen im 46ten Band der Annalen pag. 80 gegebene Formel

$$(\Pi, f_3^2)^2 + \left(\frac{-H_3}{f_3} + \Omega\right)\Pi = 0$$

in diese übergeht

$$a_x^2 b_x^2 (ab\Pi)^2 + \Omega\Pi = 0.$$

München, im April 1895.

Berichtigungen zum 45. Bande.

S. 598 Z. 11 v. u. statt $\left(P : \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ix}}}{\Delta}\right)$ lies $\left(P \cdot \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ix}}}{\Delta}\right)$

„ 599 „ 3 v. o. statt $p_1(r)$ und $p_2(r)$ lies $p_1(z)$ und $p_2(z)$

„ „ „ 4 v. o. statt r lies z.

Berichtigungen zum 46. Bande.

S. 9 Anm. lies: § 3 statt § 6.

„ 15 Anm. lies: 12 u. 13 statt 27 u. 28.

„ 23 Zeile 12 v. o. lies: $a_4(x+1)^3 + a_5(y+1)^3$.

„ 24 „ 3 v. u. ist das Zeichen — zu streichen.

„ 47 „ 9 v. o. lies 37 statt 7.

„ „ „ 10 „ „ „ $-\frac{A_2^2 B}{27}(2A_2B^2h_2^3 + 27A_1h_4^2)$ statt $+2A_2B^2h_2^3 + 27\,A_1h_4^2$.

„ „ „ 11 „ „ „ 37 statt 7.

„ 49 Gleichung (36) lies $\overline{F}(\overline{y}, \overline{x})$ statt $\overline{F}(y, \overline{x})$.

„ 55 Zeile 8 v. u. lies 47 statt 17.

„ „ „ 13 „ „ „ 46 „ 16.